奥赛经典



专 题 研 究 系 列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

奥林匹克数学中的代数问题

◇沈文选 张垚 冷岗松/编著

◆湖南师范大学出版社

奥赛经典

专题研究系列

奥林匹克数学中的代数问题

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

◇沈文选 张垚 冷岗松/编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

奥林匹克数学中的代数问题/沈文选，张垚，冷岗松编著.—修订本.—长沙：湖南师范大学出版社，2009.5
（奥赛经典丛书·专题研究系列）
ISBN 978-7-5648-0027-7

Ⅰ.奥… Ⅱ.①沈…②张…③冷… Ⅲ.代数课—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 074340 号

奥林匹克数学中的代数问题
沈文选 张 垚 冷岗松 编著

◇组 稿：廖小刚
◇责任编辑：廖小刚
◇责任校对：蒋旭东
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山 邮编/410081
电话/0731.8853867 8872751 传真/0731.8872636
网址/http：//press. hunnu. edu. cn
◇印刷：长沙化勘印刷有限公司

◇开本：730×960 1/16 开
◇印张：28.5
◇插页：0.25
◇字数：610 千字
◇版次：2004 年 7 月第 1 版 2009 年 5 月第 1 次修订
2009 年 5 月第 4 次印刷
◇书号：ISBN 978-7-5648-0027-7
◇定价：31.00 元



◆沈文选

男，1948年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，硕士生导师，湖南师范大学数学奥林匹克研究所副所长，中国数学奥林匹克高级教练，全国初等数学研究会理事长，全国高等师范院校数学教育研究会常务理事，《数学教育学报》编委，湖南省高师教育研究会理事长，湖南省数学会初等数学委员会副主任，湖南省数学奥林匹克培训的主要组织者与授课者，湖南师大附中、长沙市一中数学奥林匹克培训主要教练。

已出版著作《走进教育数学》、《单形论导引》、《矩阵的初等应用》、《中学数学思想方法》、《竞赛数学教程》等30余部，发表学术论文《奥林匹克数学研究与数学奥林匹克教育》等80余篇，发表初等数学研究、数学思想方法研究和数学奥林匹克研究等文章200余篇。多年来为全国初、高中数学联赛，数学冬令营提供试题20余道，是1997年全国高中数学联赛，2002年全国初中数学联赛，2003年第18届数学冬令营命题组成员。



◆张 垚

男，1938年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，中国数学奥林匹克高级教练，湖南省数学奥林匹克主教练，美国《数学评论》评论员。1987～1999年任湖南省数学会副理事长兼普及工作委员会主任，负责全省数学竞赛的组织及培训工作，并主持了1989年全国初中数学联赛和1997年全国高中数学联赛的命题工作。

已出版图书《数学奥林匹克理论、方法、技巧》等17部，发表学术论文80余篇。从1992年起享受国务院颁发的政府特殊津贴。曾荣获湖南省优秀教师，全国优秀教师，曾宪梓教育基金高等师范院校教师奖三等奖，湖南省教委科技进步奖二等奖等多项表彰和奖励。所培训的学生有100余人进入全国中学生数学冬令营，其中有40余人进入国家集训队，14人进入国家队，在国际中学生数学竞赛(IMO)中，共夺得10枚金牌和3枚银牌。



◆冷岗松

男，1961年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院、上海大学数学系教授，博士生导师，湖南师范大学数学奥林匹克研究所所长，中国数学奥林匹克委员会委员，美国《数学评论》评论员。从2000年起参加中国数学奥林匹克国家集训队的教练工作和上海市数学奥林匹克选手的培训工作。2001～2004年，多次参加国家集训队，中国数学奥林匹克(CMO)，西部数学竞赛，女子数学竞赛的命题工作。1991～2004年担任湖南省数学奥林匹克培训主要教练，为湖南师大附中、长沙市一中前后10位同学在IMO中获取金牌做了大量培训工作。

已出版专著《高中数学竞赛解题方法研究》，在国内外重要数学学术期刊发表论文30余篇。先后承担国家自然科学基金项目，教育部博士点基金项目等多项。曾获湖南省教委科技进步奖二等奖。

前 言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动.多年来的实践表明:这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣,焕发青少年的学习热情,吸引他们去读一些数学小册子,促使他们寻找机会去听一些名师的讲座;这项活动可以使参与者眼界大开,跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子,去与其他"高手"互相琢磨,激励并培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神;这项活动可以使参与者求知欲望大增,使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等诸能力与日俱进.这是一种有深刻内涵的文化现象,因此,越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外,还积极地参与到国际数学奥林匹克中.

我国自1986年参加国际数学奥林匹克以来,所取得成绩举世公认,十多年来一直保持世界领先的水平.其中,到2007年止,湖南的学生已取得10块金牌、3块银牌的好成绩.这优异的成绩,是中华民族精神的体现,是国人潜质的反映,是民族强盛的希望.为使我国数学奥林匹克事业可持续发展,一方面要继续吸引越来越多的青少年参与,吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来,另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系,要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略,研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系.为此,在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下,2003年,湖南师范大学成立了"数学奥林匹克研究所".研究所组建近一年来,我们几位教授都积极投身到研究所的工作中,除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外,还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理,以专题讲座的形式编写成了这套专题研究丛书,分几何、代数、组合、数论、真题分析五卷.这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料,而且还可激发解竞赛题的直觉或灵感.从教育心理学角度上说,只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识,才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动.

由于这套丛书篇幅较大,2009年又进行了修订,有些部分可能整理欠完善,敬请专家、同行和读者不吝指正.

编 者
2009年5月

目 录

第一篇 集合问题

第一章 集合中的对应原理

【基础知识】

定义1 设 A 和 B 是两个集合(二者可以相同),如果对于每个 $x \in A$,都有唯一确定的 $y \in B$ 与之对应,则称这个对应关系为 A 到 B 的映射,记为 $f: A \to B$,这时 $y = f(x) \in B$ 称为 $x \in A$ 的象,而 x 称为 y 的原象.

特别地,当 A 和 B 都是数集时,映射 f 称为函数.

定义2 设 f 为从 A 到 B 的一个映射.

(1) 如果对于任何 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$,都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为单射.

(2) 如果对于任何 $y \in B$,都有 $x \in A$,使得 $f(x) = y$,则称 f 为满射.

(3) 如果映射 f 既是单射又是满射,则称 f 为双射,或一一映射.

(4) 如果 f 为满射,且对任何 $y \in B$,恰有 A 中的 m 个元素,它们的象都是 y,则称 f 为(倍数为 m 的)倍数映射.

我们用 $|A|$ 表示集 A 的元素个数(或基数),则有下面的对应原理:

对应原理 设 A 和 B 都是有限集,f 为从 A 到 B 的一个映射.

(1) 如果 f 为单射,则 $|A| \leqslant |B|$;

(2) 如果 f 为满射,则 $|A| \geqslant |B|$;

(3) 如果 f 为双射,则 $|A| = |B|$;

(4) 如果 f 为倍数是 m 的倍数映射,则 $|A| = m|B|$.

【典型例题与基本方法】

例1 如果从数1,2,…,14中,按由小到大的顺序取出a_1,a_2,a_3,使同时满足$a_2-a_1\geqslant 3$与$a_3-a_2\geqslant 3$,那么所有符合上述要求的不同取法有________种.

(1989年全国高中联赛题)

解 令$S=\{1,2,\cdots,14\}$,$S'=\{1,2,\cdots,10\}$.

$T=\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_1,a_2,a_3\in S,a_2-a_1\geqslant 3,a_3-a_2\geqslant 3\}$,

$T'=\{(a'_1,a'_2,a'_3)\mid a'_1,a'_2,a'_3\in S',a'_1<a'_2<a'_3\}$.

作对应$(a_1,a_2,a_3)\to(a'_1,a'_2,a'_3)$,这里$a'_1=a_1,a'_2=a_2-2,a'_3=a_3-4(a_1,a_2,a_3\in T)$.

容易验证,这个对应是一个一一对应或一一映射或双射,则$|T|=|T'|$.

从而,问题转化为求$|T'|$,即求在S'集中选取三个不同元素的组合数$C_{10}^3=120$.

另解 赋值$x_i=\begin{cases}1,若\ i\ 被选取,\\0,若\ i\ 没被选取,\end{cases}$其中$i=1,2,\cdots,14$.

于是,从14个数的集合中任选三个数的子集表示一种取法,对应着一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$,反之,任一排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$必对应着一个取法.故任取三个数的子集所表示的一种取法的取法集合到所有的排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$集之间的对应是一一映射.

根据题设的要求,取法总数等于排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$中有3个1,11个0,而且每两个1中至少隔着两个0的排列数.为了求出这样的排列数,我们选排好模式1001001,然后将剩下的7个0插入3个1形成的4个空位中,故有$C_{7+4-1}^7=C_{10}^3$种方法,此即为所有不同的取法总数

注 此问题可推广到一般情形:求从集合$\{1,2,\cdots,n\}$中任取满足下列条件的r个$a_1,a_2,\cdots,a_r$的不同取法数.(1)$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_r\leqslant n$;(2)$a_{k+1}-a_k\geqslant m$,$k=1,2,\cdots,r-1$,其中$m\in\mathbf{N}^*$.

事实上,可将所有满足(1),(2)的r数组的集合记为A.由(2)有$a_k\leqslant a_{k+1}-m(k=1,2,\cdots,r-1)$,即$a_k<a_{k+1}-(m-1)$.

所以,$a_1<a_2-(m-1)<a_3-2(m-1)<a_4-3(m-1)$
$<\cdots<a_r-(r-1)(m-1)$.

令 $b_i=a_i-(i-1)(m-1),i=1,2,\cdots r$,则

$1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_r\leqslant n-(r-1)(m-1)$.

记集合$\{1,2,\cdots,n-(r-1)(m-1)\}$的(无重复)$r$元数组的集合为$B$,则$A$与$B$之

间存在一一对应，即双射.

于是 $|A|=|B|=C^{r}_{n-(r-1)(m-1)}$.

例2 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，A 为至少含有两项的公差为正的等差数列，其项都在 S 中，且添加 S 的其他元素于 A 后均不能构成与 A 有相同公差的等差数列.求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看作等差数列). (1991 年全国高中联赛题)

解 当 $n=2k$ 时，满足题目要求的每个数列 A 中有两连续项，使其前一项在集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中，而后一项在集合 $\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$ 中；反之，从 $\{1,2,\cdots,k\}$ 和 $\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$ 中各取一数，并以两数之差作为公差，可作出一个满足要求的 A.容易看出，这种对应是一一对应，即双射.故 A 的个数为 $k\cdot k=\frac{1}{4}n^{2}$.

当 $n=2k+1$ 时，满足题目要求的每一个数列 A 中必有连续两项，其前一项在集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中，后一项在集合 $\{k+1,k+2,\cdots,2k+1\}$ 中，讨论与前面类似.故此时 A 的个数为 $k\cdot(k+1)=\frac{1}{4}(n^{2}-1)$ 个.

两种情况统一起来，共有 $[\frac{n^{2}}{4}]$ 个 A.

例3 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$，若 X 是 S_n 的子集，把 X 中的所有数的和称为 X 的“容量”(规定空集的容量为 0).若 X 的容量为奇(偶)数，则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1) 求证：S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

(2) 求证：当 $n\geqslant 3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等.

(3) 当 $n\geqslant 3$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和. (1992 年全国高中联赛题)

解 (1) S_n 的子集有 2^n 个，可分为两类：(a) 不含元素 1 的子集(包括空集 $\varnothing$)；(b) 含有元素 1 的子集.对(a) 中任一集合 X_1，对应着(b) 中的集合 $Y_1=X_1\cup\{1\}$；反之，(b) 中任一元素 Y_1 都是(a) 中元素 X_1 的象，并满足 $Y_1=X_1\cup\{1\}$，且(a) 中不同集合也对应着(b) 中不同的集合.因此，(a)、(b) 的集合间可建立一一对应，即双射.

又若 X_1 是 S_n 的偶子集，则 $X_1\cup\{1\}$ 是奇子集；反之，若 X_1 是 S_n 的奇子集，则 $X_1\cup\{1\}$ 是偶子集.因此，S_n 的奇子集与偶子集个数相等，都等于 2^{n-1} 个.

(2) 设 A_n 表示 S_n 中全体奇子集容量之和，B_n 表示 S_n 中全体偶子集容量之和.又设 a_n、b_n 分别表示 S_n 中奇、偶子集的个数，由(1) 知 $a_n=b_n=2^{n-1}$.

(i) 若 n 为奇数($n\geqslant 3$) 时，S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成：① S_{n-1} 的奇子集；② S_{n-1} 的每个偶子集与集 $\{n\}$ 的并.于是 $A_n=A_{n-1}+(B_{n-1}+n\cdot b_{n-1})=A_{n-1}+B_{n-1}+n\cdot 2^{n-2}$.类似可得 $B_n=A_{n-1}+B_{n-1}+n\cdot 2^{n-2}$，因此，$A_n=B_n$.

(ii) 若 n 为偶数($n \geqslant 4$) 时,S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成:① S_{n-1} 的所有奇子集;② S_{n-1} 的每个奇子集与集 $\{n\}$ 的并. 于是,$A_n = A_{n-1} + (A_{n-1} + n \cdot a_{n-1}) = 2A_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}$. 类似可得,$B_n = 2B_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}$. 由(i) 知 $A_{n-1} = B_{n-1}$,所以 $A_n = B_n$.

综上,对任何 $n \geqslant 3, A_n = B_n$.

(3) X 对 S_n 的补集为 $\complement_{S_n}X$,则 X 与 $\complement_{S_n}X$ 的容量之和等于 S_n 的容量,即 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. 因此,$S_n$ 中所有子集的容量之和是 $2^{n-1} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = 2^{n-2} \cdot n(n+1)$.

因为 $A_n = B_n$,当 $n \geqslant 3$ 时,故 $A_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-2} \cdot n(n+1) = 2^{n-3} \cdot n(n+1)$.

例 4 设 n 是正整数,集合 $M = \{1, 2, \cdots, 2n\}$,求最小的正整数 k,使得对于 M 的任何一个 k 元子集,其中必有 4 个互不相同的元素之和等于 $4n + 1$.

(2005 年东南地区奥林匹克题)

解 考虑 M 的 $n+2$ 元子集 $P = \{n-1, n, n+1, \cdots, 2n\}$. P 中任何 4 个不同元素之和不小于 $n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = 4n + 1$,所以 $k \geqslant n + 3$.

将 M 的元配为 n 对,$B_i = (i, 2n + 1 - i), 1 \leqslant i \leqslant n$.

对 M 的任一 $n + 3$ 元子集 A,必有三对 B_{i1}, B_{i2}, B_{i3} 同属于 A(i_1, i_2, i_3 两两不同).

又将 M 的元配为 $n - 1$ 对,$C_i = (i, 2n - i), 1 \leqslant i \leqslant n - 1$,对 M 的任一 $n + 3$ 元子集 A,必有一对 C_{i4},同属于 A.

这一对 C_{i4} 必与刚才三对 B_{i1}, B_{i2}, B_{i3} 中至少一对无公共元,这 4 个元素互不相同,且和为 $2n + 1 + 2n = 4n + 1$.

因此,所求的最小正整数 $k = n + 3$.

【解题思维策略分析】

1. 注意单射方法的运用

例 5 设 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k, S = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$. 若(i) S 中每 r 个元的集合的交集非空;(ii) 每 $r+1$ 个元的集合的交集为空集. 问:(1) $|A|$ 至少是多少?(2) 当 $|A|$ 最小时,集 $|A_i|$ 为多少?

解 (1) 考虑足标集 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的任一 r 元子集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$,在 $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}$ 中任取一个元素 a,作映射 $f: \{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \to a$.

于是,f 是足标集的 r 元子集的集合到 A 的一个单射. 事实上,若 $\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$ 也对应于 a,则会形成 $r + 1$ 个子集的交集不空,矛盾.

因此,$|A|$ 不少于足标集的 r 元子集的个数,即 $|A| \geqslant C_k^r$.

(2) 考虑任一 A_i，在 S 中任取其余 r 个集，它们的交集至少有一个元(不空)，而此交集与 A_i 取交为空集．由于有 C_{k-1}^r 种不同取法，因而 $|A_i| \leqslant |A| - C_{k-1}^r$．当 $|A| = C_k^r$ 时，$|A_i| \leqslant C_{k-1}^{r-1}$．

另一方面，A_i 与 S' 中任选 $r-1$ 个其余的集取交，至少有一个，从而 $|A_i| \geqslant C_{k-1}^{r-1}$．

这说明，当 $|A|$ 取最小值 C_n^k 时，每个 A_i 的集都是 C_{k-1}^{r-1}．

注　此例的结论具有一般性，许多竞赛题都是它的特殊情形．如第 13 届莫斯科竞赛题："某城市有公共汽车 10 条线路，现知沿其中 9 条线路可走遍所有车站，但沿其中任何 8 条线路不能走遍所有车站．问至少有多少个不同的车站?" 按上述例题中结论(1) 知，至少有 45 个车站．

例 6　在一个车厢中，任何 $m(m \geqslant 3)$ 个旅客都有唯一的公共朋友(当甲是乙的朋友时，乙也是甲的朋友．任何人不作为他自己的朋友)．问在这个车厢中，朋友最多的人有多少个朋友?

(第 5 届国家集训队选拔试题)

解　设朋友最多的人有 k 个朋友，显然，$k \geqslant m$．若 $k > m$，设 A 有 k 个朋友 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，并记 $S = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$．

设 $B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}$ 是从 S 中任取的 $m-1$ 个元素，则 $A_1, B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}$ 这 m 个人有唯一的一个公共朋友，记为 C_i．因 C_i 是 A 的朋友，故 $C_i \in S$，这说明 S 中的每 $m-1$ 个元素对应着 S 中的唯一确定的一个元素．

又若 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}\} \neq \{B_{j_1}, B_{j_2}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$，且 $\{A, B_{i_1}, \cdots, B_{i_{m-1}}\}$ 与 $\{A, B_{j_1}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$ 对应的唯一的公共朋友分别为 $C_i, C_j \in S$，则必有 $C_i \neq C_j$，否则 $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_{m-1}}\} \cup \{B_{j_1}, B_{j_2}, \cdots, B_{j_{m-1}}\}$ 至少有 m 个元素，而他们至少有两个朋友 A 和 C_i，此与已知矛盾．

这样一来，上述的对应就是一个单射．因此，S 中的 $m-1$ 元子集的个数 $C_k^{m-1} \leqslant k$．

但 $m \geqslant 3$ 时，$m-1 \geqslant 2$，这时 $C_k^{m-1} > C_k^1 = k$ 与上述结果矛盾，这说明 $k > m$ 不能成立．

故朋友最多的人的朋友个数的最大值为 m．

例 7　设 $n(n \geqslant 2)$ 是整数．S 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集，S 中没有一个数整除另一个数，也没有两个互质的数．求 S 的元素个数的最大值．

(2005 年巴尔干地区奥林匹克题)

解　构造映射 f:

$$S \to \left\{\left[\frac{n}{2}\right]+1, \left[\frac{n}{2}\right]+2, \cdots, n\right\},$$

f 把 $x \in S$ 变成 $2^k x \in (\frac{n}{2}, n]$（其中，$k$ 是非负整数），集合 $\{[\frac{n}{2}]+1, [\frac{n}{2}]+2, \cdots, n\}$ 中的元素满足"没有一个数整除另一个数"这一条件.

易知这是一个单射，这是因为若存在非负整数 k_1、k_2，使得 $2^{k_1}x = 2^{k_2}y$，不妨设 $k_1 < k_2$，则 $y \mid x$，矛盾.

又对于 x、$y \in S$，则 $(x, y) > 1$.

而 $(x, y) \mid (f(x), f(y))$，则 $(f(x), f(y)) > 1$.

从而，$f(S)$ 中不含有两个连续的整数.

因此，$|S| \leqslant \left[\frac{\frac{n}{2}+1}{2}\right] = \left[\frac{n+2}{4}\right]$.

另外，当 $S = \{k \mid k$ 是偶数，$k > \frac{n}{2}\}$ 时，S 满足题设要求.

故 $|S|$ 的最大值为 $\left[\frac{n+2}{4}\right]$.

例 8 考虑方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

其中系数 a_{ij} 为整数，不全为 0. 试证：在 $n \geqslant 2m$ 时，有一组整数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足 $0 < \max|x_i| \leqslant n(\max|a_{ij}|)(i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$.

证明 先假定 $n = 2m$. 设 $A = \max|a_{ij}|$，$B = mA$，集合

$X = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid |x_j| \leqslant B, j = 1, 2, \cdots, n\}$，

$Y = \{(y_1, y_2, \cdots, y_n) \mid |y_i| \leqslant nAB, i = 1, 2, \cdots, m\}$.

作映射 $f: y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n (i = 1, 2, \cdots, m)$.

显然 f 是从集 X 到 Y 的映射(因为 $|y_i| \leqslant |a_{i1}| \cdot |x_1| + |a_{i2}| \cdot |x_2| + \cdots + |a_{in}| \cdot |x_n| \leqslant nAB$).

由于 $|x| = (2B+1)^n = (2mA+1)^{2m} = (4m^2A^2 + 4mA + 1)^m$
$> (2nAB + 1)^m = |Y|$.

所以 f 一定不是单射，也就是说，X 中必有两个不同元素 $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$，$(x''_1, x''_2, \cdots, x''_n)$ 具有相同的象.

令 $x_j = x'_j - x''_j (j = 1, 2, \cdots, n)$，

则 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是方程组的解，并且

$0 < \max|x_j| < \max|x'_j| + \max|x''_j| \leqslant 2B = nA$.

如果 $n > 2m$，根据上面所证，方程组有解 $(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}, 0, \cdots, 0)$ 满足 $0 < \max|x_j| \leqslant 2mA < nA$.

注 此例是从反面运用单射的概念来解题的.

2. 构造适当的映射,利用对应原理实现问题的转化

通过构造适当的映射,进而利用对应原理实现问题的转化,可以达到另辟蹊径的效果.

例 9 在一个 6×6 的棋盘上放置了 11 块 1×2 的骨牌,每一个骨牌恰好覆盖两个方格.证明:无论这 11 块骨牌怎么放置,总能再放入一块骨牌.

证明 若有某一行存在 4 个空格,由于每行仅有 6 格,必有两空格是相邻的,可放置一块骨牌,否则每行至多有 3 个空格.

如果这 11 块骨牌放置以后,不能再放入一块骨牌,考虑两个集合:

$X = \{$下面 5×6 的空格集合$\}$, $Y = \{$上面 5×6 的骨牌集合$\}$.

则必有:(i) 空格的上方必须对应骨牌(否则,若空格的上方还对应空格,则连续两个空格可以放置一块骨牌).

(ii) 不同的空格必定对应不同的骨牌(否则,若两个不同的空格对应同一骨牌,这个空格必相邻,因而这两个空格可以放置一块骨牌).

于是,这种空格与骨牌的对应构成了从 X 到 Y 的映射:$f: x \to y$.显然,这是一个单射.

由上述可见,$|x| \leqslant |y| \leqslant 11$.

又由于整个棋盘上有空格 $6\times 6 - 11\times 2 = 14$ 个,除最上面一行可能有的空格外,应有 $|X| \geqslant 11$.

故 $|X| = |Y| = 11$.

这说明,这种空格与骨牌的对应构成了从 X 到 Y 的一一映射.于是,集合 Y 中有 11 块骨牌,即棋盘上面的 5×6 上有 11 块骨牌,从而棋盘的最后一行全是空格.这又导致矛盾.

综上所述,命题获证.

例 10 用 n 个数(允许重复)组成一个长为 N 的数列,且 $N \geqslant 2^n$.试证:可在这个数列中找出若干个连续的项,它们的乘积是一个完全平方数.

证明 设 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的长为 N 的数列为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,这里 $b_i \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}(i = 1, 2, \cdots, N)$

作映射 $f: B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \to \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$,其中 $v_j = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$.对于每个 $j(1 \leqslant j \leqslant n)$,我们赋值

$$c_i=\begin{cases}0,\text{若 } a_i \text{ 在 } b_1,b_2,\cdots,b_j \text{ 中出现偶数次},\\1,\text{若 } a_i \text{ 在 } b_1,b_2,\cdots,b_j \text{ 中出现奇数次}.\end{cases}$$

如果有某个 $v_j=\{0,0,\cdots,0\}$，那么，在乘积 $b_1b_2\cdots b_j$ 中，每个 a_i 都出现偶数次，所以积为完全平方数.

如果每个 $v_i\neq(0,0,\cdots,0)$，那么，由于集合 $\{(c_1,c_2,\cdots,c_n)\mid c_i=0$ 或 $1,i=1,2,\cdots,n\}$ 恰有 2^n-1 个元素，由题设 $N\geqslant 2^n>2^n-1$，所以必有 h 和 $k(1\leqslant k<h\leqslant N)$ 满足 $v_k=v_h$. 这时，在乘积 $b_1b_2\cdots b_k$ 和 $b_1b_2\cdots b_h$ 中每个 a_i 出现的次数具有相同的奇偶性，从而它们的商，即乘积 $b_{k+1}b_{k+2}\cdots b_n$ 中每个 a_i 出现偶数次，亦即 $b_{k+1}b_{k+2}\cdots b_n$ 为完全平方数.

【模拟实战】

习题 A

1. T 为坐标平面上所有整点的集合（横、纵坐标都是整数的点称为整点），如果两个整点 $(x,y),(u,v)$ 满足 $|x-u|+|y-v|=1$，则称这两个点为相邻点. 证明：存在集合 $S\subsetneqq T$，使得每个点 $P\in T$，在 P 与 P 的相邻点中恰好有一个属于 S.
2. 设有 m 只茶杯，开始时杯口都朝上. 把茶杯随意翻转，现定每翻转 n 只，算一次翻动，翻动过的茶杯允许再翻. 证明：当 $m(\geqslant 3)$ 为奇数，$n(\geqslant 2$ 且 $n<m)$ 为偶数时，无论翻动多少次，都不能使杯口都朝下.
3. 在数轴上给定两点 1 和 $\sqrt{2}$，在区间 $(1,\sqrt{2})$ 内任取 n 个点，在此 $n+2$ 个点中，每相邻两点连一线段，可得 $n+1$ 条线段. 证明：在此 $n+1$ 条线段中，以一个有理点和一个无理点为端点的线段恰有奇数条.
4. 将正整数 n 表示为一些正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 的和，即 $n=a_1+a_2+\cdots+a_p$，其中 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_p$. 记 $f(n)$ 是如此表示的方法种数（如 $4=4,4=1+3,4=2+2,4=1+1+2,4=1+1+1+1$，故 $f(4)=5$）. 证明：对任意 $n\geqslant 1$，$f(n+1)\leqslant\frac{1}{2}[f(n)+f(n+2)]$.

习题 B

1. 某 48 个自然数的乘积恰好有 10 个不同的质因数. 证明：从这 48 个数中可以挑出 4 个数来，它们的乘积恰好是一个平方数.

2. 设 $M=\{1,2,\cdots,20\}$. 对于 M 的任一 9 元子集 s, $f(s)$ 取 1 到 20 中的一个整数($1\leqslant f(s)\leqslant 20$). 证明:存在 M 的一个 10 元子集 T,使得所有的 $k\in T$,都有 $f(T\setminus\{k\})\neq k$.
(IMO - 31 国家集训队训练题)
3. 将正整数 n 写成若干个 1 和若干个 2 之和,和项顺序不同认为是不同的写法,所有写法种数记为 $\alpha(n)$;将 n 写成若干个大于 1 的正整数之和,和项顺序不同认为是不同的写法,所有写法的种数记为 $\beta(n)$. 求证:对每个 n,都有 $\alpha(n)=\beta(n+2)$.
4. 集 $S=\{1,2,\cdots,1990\}$. 如果 S 的某个 31 元子集的元素和被 5 整除,则称为是 S 的好子集. 求 S 的好子集的个数.
(IMO - 31 预选题)

第二章　集合中的最大、最小问题

【基础知识】

集合问题中最大、最小问题是一类综合性较强的问题,它既涉及数论知识、代数知识,还涉及组合知识.因而,求解这类问题要具体问题具体分析,有时要采用类分法,有时要采用构造法,有时还要采用反证法等各种各样的方法.

【典型例题与基本方法】

例 1　设 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$,A 是 M 的子集且满足条件:当 $x\in A$,$15x\notin A$,则 A 中元素的个数最多是________.　　　　(1995 年全国高中联赛题)

解　构造子集 A 如下:

$1995\div15=133$,记 $A_1=\{134,135,\cdots,1995\}$,则 $|A_1|=1862$(个).

$133\div15=8$ 余 13,记 $A_2=\{9,10,\cdots,133\}$,则 $|A_2|=125$(个).

记 $A_3=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,则 $|A_3|=8$(个).

显然,$A_1\cup A_2\cup A_3=\{1,2,\cdots,1995\}$,$A_i\cap A_j=\varnothing$,$i\neq j$,且 $\{15a\mid a\in A_{i+1}\}\subsetneqq A_i$,$i=1,2,3$.

令 $A=A_1\cup A_3$,那么,A 是满足要求的子集,且

$|A|=|A_1|+|A_2|=1862+8=1870$.

例 2　设 $S=\{1,2,3,4\}$,n 项的数列:$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有下列性质,对于 S 的任何一个非空子集 B(B 的元素个数记为 $|B|$),在该数列中有相邻的 $|B|$ 项恰好组成集合 B,求 n 的最小值.　　　　(1997 年上海市竞赛题)

解　n 的最小值为 8.

首先证明 S 中的每个数在数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少出现 2 次.

事实上,若 S 中的某个数在这个数列中只出现 1 次,由于含这个数的二元子集共有 3 个,但在数列中含这个数的相邻两项至多只有两种取法,因此,不可能 3 个含这个数的二元子集都在数列相邻两项中出现.矛盾.

由此,可得 $n\geqslant8$.

另外,数列 3,1,2,3,4,1,2,4 满足题设条件,且只有 8 项,所以,n 的最小值为 8.

例3 设 S 为$\{1,2,\cdots,50\}$ 的具有下列性质的子集，S 中任意两个不同元素之和不被 7 整除，则 S 中元素最多可能有几个？ （第 43 届美国中学生竞赛题）

解 将$\{1,2,\cdots,50\}$ 按照模 7 分成 7 类：

$K_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$，

$K_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$，

$K_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$，

$K_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$，

$K_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$，

$K_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$，

$K_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$.

下面证明：$S=K_1\cup K_2\cup K_3\cup\{7\}$ 为满足要求的最大集合.

首先，对 $a,b\in S,a\neq b$，有三种可能：

(i)$a,b\in K_i(1\leqslant i\leqslant 3)$，则 $a+b\equiv 2i \pmod 7$，$a+b$ 不能被 7 整除.

(ii)$a\in K_i,b\in K_j(1\leqslant i\neq j\leqslant 3)$，则 $a+b\equiv i+j \pmod 7$，$a+b$ 不能被 7 整除.

(iii)$a\in K_i,b=7(1\leqslant i\leqslant 3)$，则 $a+b\equiv i \pmod 7$，$a+b$ 不能被 7 整除.

综上知，S 中任两个元素之和不能被 7 整除.

其次若给 S 添加一个元素 c，则必存在 S 中的一个元素与 c 之和能被 7 整除.

添加的 c 有 4 种可能：

(i)$c\in K_4$，则 c 与 K_3 中的元素之和能被 7 整除.

(ii)$c\in K_5$，则 c 与 K_2 中的元素之和能被 7 整除.

(iii)$c\in K_6$，则 c 与 K_1 中的元素之和能被 7 整除.

(iv)$c\in K_0$，则 c 与 7 之和能被 7 整除.

综上知，S 中元素不能再增添.所以，S 中元素的最大值为

$|S|=|K_1|+|K_2|+|K_3|+1=23$.

例4 设自然数 $n\geqslant 5$，n 个不同的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有下列性质：对集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的任何两个不同的非空子集 A 和 B，A 中所有数的和与 B 中所有数的和都不会相等.在上述条件下，求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 的最大值. （1994 年上海市竞赛题）

解 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$.

先证明：对任何自然数 $k\leqslant n$，都有 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\geqslant 2^k-1$. ①

用反证法.若 $\sum_{i=1}^{k} a_i < 2^k - 1$,则 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 的每个非空子集的元素和不超过 $2^k - 2$.但 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 有 $2^k - 1$ 个非空子集,根据抽屉原理,必有两个非空子集的元素和相等,这与题设矛盾.故所证结论 ① 成立.

接着证明:$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. ②

事实上,$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$

$$= \frac{a_1 - 1}{a_1} + \frac{a_2 - 2}{2a_2} + \cdots + \frac{a_n - 2^{n-1}}{2^{n-1} a_n}.$$

令 $c_i = \frac{1}{2^{i-1} a_i}, d_i = a_i - 2^{i-1}, D_k = \sum_{i=1}^{k} d_i$.

显然,$c_1 > c_2 > \cdots > c_n$,

$$D_k = \sum_{i=1}^{k} a_i - (1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}) = \sum_{i=1}^{k} a_i - (2^k - 1) \geqslant 0.$$

于是,我们有

$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i d_i$

$= c_1 D_1 + c_2(D_2 - D_1) + \cdots + c_n(D_n - D_{n-1})$

$= (c_1 - c_2)D_1 + (c_2 - c_3)D_2 + \cdots + (c_{n-1} - c_n)D_{n-1} + c_n D_n$

$\geqslant 0$.

故 ② 式得证.

注意到,当 $S = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$ 时,题设条件成立.此时,有

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

因此,所求的最大值是 $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

【解题思维策略分析】

1. 假定结论来推导,具体构造来验证

例 5 10 人到书店买书,已知:(1) 每人都买了三种书;(2) 任何两人所买的书中,都至少有一种相同.问购买人数最多的一种书最少有几个人购买?

(1993 年中国奥林匹克题)

解 设购买人数最多的一种书有 x 人购买,10 人中的甲购买了三种书,因其他 9

人都至少有一种书与甲的书相同,又 $9\div3=3$,则知甲的三种书中,购买人数最多的一种书不少于4人购买,故 $x\geqslant4$.

若 $x=4$,则甲的三种书均有4人购买.

同理,其他9人的每种书也均有4人购买.

故10人所买书的总数应是4的倍数,即 $4\mid30$,矛盾.所以 $x\geqslant5$.

当 $x=5$ 时,设 A_i 为互不相同的书,存在购买人数最多的一种书恰有5人购买情况如下列集合表示:$\{A_1,A_2,A_3\}$,$\{A_1,A_2,A_6\}$,$\{A_2,A_3,A_4\}$,$\{A_1,A_4,A_6\}$,$\{A_1,A_4,A_5\}$,$\{A_2,A_4,A_5\}$,$\{A_1,A_3,A_5\}$,$\{A_2,A_5,A_6\}$,$\{A_3,A_5,A_6\}$,$\{A_3,A_4,A_6\}$.

例6 设 $S=\{1,2,\cdots,50\}$,求最小自然数 k,使得 S 的任一 k 元子集中都存在两个不同的数 a 和 b,满足 $(a+b)\mid ab$. (1993年中国冬令营题)

解 设有 $a,b\in S$ 满足条件 $(a+b)\mid ab$,记 $c=(a,b)$,于是 $a=ca_1,b=cb_1$,其中 $a_1,b_1\in\mathbf{N}^+$ 且有 $(a_1,b_1)=1,a_1\neq b_1$,不妨设 $a_1>b_1$.

由于 $a+b=c(a_1+b_1),ab=c^2a_1b_1$,

因此,$(a_1+b_1)\mid ca_1b_1$.

又由于 $(a_1+b_1,a_1)=1,(a_1+b_1,b_1)=1$,

因此,$(a_1+b_1)\mid c$.

于是,$a,b\in S$,所以 $a+b\leqslant99$,即

$c(a_1+a_1)\leqslant99$,亦即 $3\leqslant a_1+b_1\leqslant9$.

由此可知,S 中满足条件 $(a+b)\mid ab$ 的不同数对 (a,b) 共有23对,列举如下:

$a_1+b_1=3$ 时,c 是3的倍数,属于这一类的 (a,b) 有(6,3),(12,6),(18,9),(24,12),(30,15),(36,18),(42,21),(48,24);

$a_1+b_1=4$ 时,有(12,4),(24,8),(36,12),(48,16);

$a_1+b_1=5$ 时,有(20,5),(40,10),(15,10),(30,20),(45,30);

$a_1+b_1=6$ 时,有(30,6);

$a_1+b_1=7$ 时,有(42,7),(35,14),(28,21);

$a_1+b_1=8$ 时,有(40,24);

$a_1+b_1=9$ 时,有(45,36).

令 $M=\{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\}$,则上述23个数对中的每一个数对都至少包含 M 中的一个元素.令 $T=S-M$.

于是,T 中任何两数都不能成为满足要求的数对 (a,b).因为 $|M|=12$,$|T|=50-12=38$,所以,所求最小自然数 $k\geqslant39$.

另一方面,下列12个满足题中要求的数对互不相交,它们是:

(6,3),(12,4),(20,5),(42,7),(24,8),(18,9),

(40,10),(35,14),(30,15),(48,16),(28,21),(45,36).

对于 S 中任一 39 元子集 R,它只比 S 少 11 个元素,而这 11 个元素至多属于上述 12 个数对中的 11 个,因此,必有 12 对中的一对属于 R.

综上所述,所求的最小自然数 $k=39$.

例 7 设 $S=\{A=(a_1,a_2,\cdots,a_8)\mid a_i=0$ 或 $1,i=1,2,\cdots,8\}$,对于 S 中的两个元素 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_8)$ 和 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_8)$,记 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{8}|a_i-b_i|$,并称其为 A 和 B 之间的距离.问 S 中最多能取出多少元素,它们之中任何两个的距离 $\geqslant 5$?

(1995 年中国国家队选拔赛题)

解 设 S' 是 S 的子集,并且 S' 中的任何两个元素之间的距离 $\geqslant 5$.

设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_8)$ 和 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_8)$ 是 S' 中的两个元素,记

$$w(A)=\sum_{i=1}^{8}a_i,\ w(B)=\sum_{i=1}^{8}b_i.$$

显然,$w(A)$,$w(B)$ 分别表示 A,B 中的 1 的个数.

如果 $w(A)+w(B)\geqslant 12$,那么 A 和 B 中至少有 4 个 1 的位置相同,从而

$d(A,B)\leqslant 8-4=4$,

此与 S' 的定义矛盾.因此,必有 $w(A)+w(B)\leqslant 11$.

从上式可知,在集合 S' 的元素中,最多只有一个元素里的 1 的个数 $\geqslant 6$.

不妨设 $(0,0,0,0,0,0,0,0)\in S'$(因为可以将 S' 内的每一个元素的第 i 个分量同时由 1 变 0 或由 0 变 1,不改变 S' 的性质).

这样,S' 中的其他元素中 1 的个数 $\geqslant 5$.如果 S' 中有两个 1 的个数等于 5 的元素,那么由 $5+5-8=2$ 可知,这两个元素至少有两个相同的分量位置上都是 1.又因为这两个元素的距离 $\geqslant 5$,所以这两个元素至多有两个相同的分量位置上都是 1.

综上所述,S' 中任何两个 1 的个数等于 5 的元素恰在两个相同的分量位置上都是 1,因此,S' 中至多有两个 1 的个数等于 5 的元素.

由上面的讨论可知,S' 中至多有 4 个元素,其中一个为全为 0 的元素,一个是 1 的个数 $\geqslant 6$ 的元素,2 个是 1 的个数 $=5$ 的元素.

另一方面,S' 可以由以下 4 个元素构成:

(0,0,0,0,0,0,0,0),(1,1,1,0,0,1,1,1),

(1,1,1,1,1,0,0,0),(0,0,0,1,1,1,1,1).

故在 S 中最多能取出 4 个元素,它们之中任何两个的距离 $\geqslant 5$.

例 8 11 个集合 $M_1,M_2,\cdots,M_{11}$,每个集合有 5 个元素,并且任意两个集合的交非

空.求具有同一公共元素的集合数目的最大值的最小可能值.

(1994年罗马尼亚国家队选拔赛题)

解 用 $n(x)$ 表示含有元素 x 的集合的数目.用 T 表示所有11个集合 $M_1, M_2, \cdots, M_{11}$ 内全部元素组成的集合,即 $T = \bigcup_{i=1}^{11} M_i$.

由题设可知,$\sum_{x\in T} n(x) = 5 \cdot 11 = 55$. $(*)$

用 $C_{n(x)}^2$ 表示从 $n(x)$ 个集合中任选两个集合组成集合对的对数,也是从11个集合中任选两个含有元素 x 的集合组成集合对的对数(如果 $n(x) = 1$,规定 $C_{n(x)}^2 = 0$).由于任意两个集合 $M_i, M_j(1 \leqslant i < j \leqslant 11)$ 的交非空,因此,M_i 与 M_j 至少有一个公共元素 $x \in T$. 换句话说,任何一对集合 $(M_i, M_j)(1 \leqslant i < j \leqslant 11)$ 至少有一个公共元素 $x \in T$. (M_i, M_j) 是 $n(x)$ 个含 x 的集合中一对集合,所以,有

$$\sum_{x\in T} C_{n(x)}^2 \geqslant C_{11}^2 = 55, \text{即} \quad \frac{1}{2}\sum_{x\in T} n(x)[n(x) - 1] \geqslant 55.$$

记 $n = \max\{n(x) \mid x \in T\}$,则由上式可得 $\frac{1}{2}(n-1)\sum_{x\in T} n(x) \geqslant 55$.

再利用 $(*)$ 式,可得 $\frac{1}{2}(n-1) \geqslant 1$,从而 $n \geqslant 3$.

如果 $n = 3$,那么,对任意的 $x \in T$,都有 $n(x) \leqslant 3$.下面证明:不存在 $x \in T$,使得 $n(x) \leqslant 2$.

用反证法.如果存在某个 $x \in T$,使得 $n(x) \leqslant 2$,那么至少有 $11 - 2 = 9$ 个集合不含 x.不妨设 $M_3, M_4, \cdots, M_{11}$ 都不含 x,M_1 含 x.由于 $M_3, M_4, \cdots, M_{11}$ 中的每一个与 M_1 至少有一个公共元素,而这个公共元素又不是 x,因此,一定是 M_1 的其他4个元素之一,这4个元素属于 $M_3, M_4, \cdots, M_{11}$ 这9个集合,那么必有一个元素 y 属于 $M_3, M_4, \cdots, M_{11}$ 这9个集合中的三个集合,加上 $y \in M_1$,有 $n(y) \geqslant 4$.这与 $n = 3$ 矛盾.

因此,当 $n = 3$ 时,对任意的 $x \in T$,都有 $n(x) = 3$.于是,我们有 $3 \cdot |T| = 11 \cdot 5$,有 $|T| = \frac{55}{3}$,矛盾.

由此,可得 $n \geqslant 4$.

当 $n = 4$ 时,我们可以给出符合题目条件的一个例子如下:

$M_1 = M_2 = \{1,2,3,4,5\}, M_3 = \{1,6,7,8,9\}$,

$M_4 = \{1,10,11,12,13\}, M_5 = \{2,6,9,10,14\}$,

$M_6 = \{3,7,11,14,15\}, M_7 = \{4,8,9,12,15\}$,

$M_8 = \{5,9,13,14,15\}, M_9 = \{4,5,6,11,14\}$,

$M_{10}=\{2,7,11,12,13\}, M_{11}=\{3,6,8,10,13\}$.

2. 特殊情形来探索,综合推证获结论

例 9 设 $S=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 依任意次序的排列. $f(S)$ 为 S 中每两个相邻元素的差的绝对值的最小值. 求 $f(S)$ 的最大值.

(IMO - 30 预选题)

解 分两种情况讨论.

(i) 若 $n=2k$ 为偶数,则 $f(S)\leqslant k$ 与其相邻数之差的绝对值不大于 k.

另一方面,在 $S=(k+1,1,k+2,2,\cdots,2k,k)$ 中,有 $f(S)=k=[\frac{n}{2}]$.

(ii) 若 $n=2k+1$ 为奇数,则 $f(S)\leqslant k+1$ 与其相邻数之差的绝对值不大于 k.
另一方面,在 $S=(k+1,1,k+2,2,\cdots,2k,k,2k+1)$ 中,有

$f(S)=k=[\frac{n}{2}]$.

综上所述, $\max f(S)=[\frac{n}{2}]$.

例 10 设 $S=\{1,2,\cdots,2005\}$. 若 S 中任意 n 个两两互质的数组成的集合中都至少有一个质数,试求 n 的最小值 . (2005 年中国西部奥林匹克题)

解 首先,取 S 的一个子集 $A_0=\{1,2^2,3^2,5^2,\cdots,41^2,43^2\}$,则 $|A_0|=15$, A_0 中任意两数互质,但其中无质数 . 这表明 $n\geqslant16$.

其次,可以证明:对任意 $A\subseteq S$, $n=|A|=16$, A 中任两数互质,则 A 中必存在一个质数 .

反证法:

假设 A 中无质数 . 记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{16}\}$.

分两种情况讨论 .

(1) 若 $1\notin A$,则 $a1,a_2,\cdots,a_{16}$ 均为合数 ., 又 $(a_i,a_j)=1(1\leqslant i\leqslant j\leqslant16)$,故 a_i 与 a_j 的质因数均不相同 .

设 a_i 的最小质因数为 p_i,不妨设 $p_1<p_2<\cdots<p_{16}$,则

$a_1\geqslant p_1^2\geqslant2^2, a_2\geqslant p_2^2\geqslant3^2,\cdots,a_{15}\geqslant p_{15}^2\geqslant47^2>2005$,

矛盾 .

(2) 若 $1\in A$,不妨设 $a_{16}=1$, $a_1,a_2,\cdots,a_{15}$ 均为合数 .

同(1) 所设,同理,有 $a_1\geqslant p_1^2\geqslant2^2, a_2\geqslant p_2^2\geqslant3^2,\cdots,a_{15}\geqslant p_{15}^2\geqslant47^2>2005$,

矛盾 .

从而, A 中必有质数,即 $n=|A|=16$ 时结论成立 .

综上,所求 n 的最小值为 16.

例 11 (1) 求所有自然数 $n(n\geqslant 2)$,使得存在实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,满足 $\{|a_i-a_j| \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}=\{1,2,\cdots,\frac{n(n-1)}{2}\}$.

(2) 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{7,8,9,\cdots,n\}$. 在 A 中取三个数、B 中取两个数组成五个元素的集合 A_i, $i=1,2,\cdots,20$, $|A_i\cap A_j|\leqslant 2$, $1\leqslant i<j\leqslant 20$. 求 n 的最小值.

(2002 年中国国家队集训选拔赛题)

解 (1) $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有如下性质:

(i) $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不等;

(ii) 它们的差的绝对值两两不等.

于是, $n=2$, $a_1=0$, $a_2=1$;

$n=3$, $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=3$;

$n=4$, $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=5$, $a_4=6$.

下证:当 $n\geqslant 5$ 时,不存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 适合题设条件.

令 $0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n$, $b_i=a_{i+1}-a_i$, $i=1,2,\cdots,n-1$, 则当 $i<j$ 时, $|a_i-a_j|=a_j-a_i=b_i+b_{i+1}+\cdots+b_{j-1}(1\leqslant i<j\leqslant n)$.

显然, $\max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|=|a_1-a_n|=a_n$,

所以, $a_n=\frac{1}{2}n(n-1)$, 即 $a_n=a_n-a_1=b_1+\cdots+b_{n-1}=\frac{1}{2}n(n-1)$.

注意到, $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 两两不等,总和为 $1+2+\cdots+(n-1)$, 且 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都不等于零,所以, $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 为 $1,2,\cdots,n-1$ 的一个排列.

注意到 $b_i+\cdots+b_{j-1}$, $1\leqslant i<j\leqslant n$ 为 $1,2,\cdots,\frac{n(n-1)}{2}$ 的一个排列,

所以, $b_i+b_{i+1}\geqslant n$, $i=1,2,\cdots,n-1$.

设 $b_i=1$, $2\leqslant i\leqslant n-2$, 则 $b_{i-1}+b_i\geqslant n$, $b_{i+1}+b_i\geqslant n$. 这就证明了 $b_{i-1},b_{i+1}\geqslant n-1$. 所以 $b_{i-1}=b_{i+1}=n-1$. 这导出矛盾. 因此,只有 $b_1=1$ 或 $b_{n-1}=1$, 且 $b_2=n-1$ 或 $b_{n-2}=n-1$.

设 $b_1=1$, $b_2=n-1$, 则 $b_1+b_2=n$. 所以, $b_i+b_{i+1}>n$, $i>1$. 已知存在指标 i, $b_{i+1}=2$, 于是 $b_i>n-2$. 所以, $b_i=n-1$. 这推出 $b_3=2$, $b_4=n-2$, 这时, $b_1+b_2=b_3+b_4$, 导出矛盾. 所以,当 $n-1\geqslant 4$ 时,即 $n\geqslant 5$ 时,不存在 $a_1,\cdots,a_n$ 适合题设条件.

设 $b_{n-1}=1$, $b_{n-2}=n-1$. 同上法讨论仍得 $n\geqslant 5$ 时,不存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 适合题

设条件.

(2) n 的最小值是 16.

设 B 中每个数在所有 A_i 中最多重复出现 k 次,必有 $k \leqslant 4$.若不然,数 m 出现 k 次,$k > 4, 3k > 12$,在 m 出现的所有 A_i 中,至少有一个 A 的数出现 3 次,不妨设它是 1,就有集合 $\{1, a_1, a_2, m, b\}, \{1, a_3, a_4, m, b_2\}, \{1, a_5, a_6, m, b_3\}$,其中 $a_i \in A, 1 \leqslant i \leqslant 6$.为了满足题意,$a_i$ 必须各不相同,但只能是 2,3,4,5,6 五个数.这是不可能的.

$k \leqslant 4$,20 个 A_i,B 中数有 40 个,因此至少是 10 个不同的,$6 + 10 = 16$,有 $n \geqslant 16$.

当 $n = 16$ 时,可作出如下 20 个集合:

$\{1,2,3,7,8\}, \{1,2,4,12,14\}, \{1,2,5,15,16\}, \{1,2,6,9,10\}, \{1,3,4,10,11\}$,
$\{1,3,5,13,14\}, \{1,3,6,12,15\}, \{1,4,5,7,9\}, \{1,4,6,13,16\}, \{1,5,6,8,11\}$,
$\{2,3,4,13,15\}, \{2,3,5,9,11\}, \{2,3,6,14,16\}, \{2,4,5,8,10\}, \{2,4,6,7,11\}$,
$\{2,5,6,12,13\}, \{3,4,5,12,16\}, \{3,4,6,8,9\}, \{3,5,6,7,10\}, \{4,5,6,14,15\}$.

例 12 设 $X = \{1,2,\cdots,2001\}$.求最小正整数 m,适合要求:对 X 的任何一个 m 元子集 W,都存在 $u、v \in W$(u 和 v 可以相同),使得 $u + v$ 是 2 的方幂.

(2001 年中国奥林匹克题)

解 当 $u、v$ 分别为 $2^r + a, 2^r - a$ 时,$u + v = 2 \times 2^r = 2^{r+1}$ 是 2 的方幂,由此将 X 划分成以下 5 个子集:

$2001 = 2^{10} + 977 \geqslant x \geqslant 2^{10} - 977 = 47$,
$46 = 2^5 + 14 \geqslant x \geqslant 2^5 - 14 = 18$,
$17 = 2^4 + 1 \geqslant x \geqslant 2^4 - 1 = 15$,
$14 = 2^3 + 6 \geqslant x \geqslant 2^3 - 6 = 2$,
$x = 1$.

令 $Y = \{2001, 2000, \cdots, 1025\} \cup \{46, 45, \cdots, 33\} \cup \{17\} \cup \{14, 13, \cdots, 9\}$.

于是,$|Y| = 998$,且对任何 $u、v \in Y$,$u + v$ 都不是 2 的方幂.

证明如下:

当 $u、v \in Y$ 时,不妨设 $u \geqslant v$ 且有 $2^r < u \leqslant 2^r + a < 2^{r+1}$,其中,当 r 分别取值 10,5,4,3 时,相应的 a 值依次为

977,14,1,6.

(1) 若 $2^r < v \leqslant u$,,则 $2^{r+1} < u + v < 2^{r+2}$,$u + v$ 不能是 2 的方幂.

(2) 若 $1 \leqslant v < 2^r$,则当 $2^r < u \leqslant 2^r + a (1 \leqslant a < 2^r)$ 时,$1 \leqslant v < 2^r - a$.于是 $2^r < u + v < 2^{r+1}$,$u + v$ 不能是 2 的方幂.

所以,子集 Y 中任何两数之和都不是 2 的方幂.

故所求的最小正整数 $m \geqslant 999$.

将 X 划分成999个互不相交的子集：

$A_i = \{1024 - i, 1024 + i\}(i = 1,2,\cdots,977)$,

$B_j = \{32 - j, 32 + j\}(j = 1,2,\cdots,14)$,

$C = \{15,17\}$,

$D_k = \{8 - k, 8 + k\}(k = 1,2,\cdots,6)$,

$E = \{1,8,16,32,1024\}$.

对于 X 的任何一个999元子集 W,若 $W \cap E \neq \varnothing$,则从其中任取一个元素的2倍都是2的方幂;若 $W \cap E = \varnothing$,则 W 中的999个元素分属于前面的998个2元子集．由抽屉原理知,W 中必有不同的 u、v,属于其中同一个子集．显然,$u + v$ 为2的方幂．

综上,所求的最小正整数 $m = 999$.

【模拟实战】

习题 A

1. 证明:存在一个2003的整数倍,它不超过11位,且各位数字不含2,3,4,5,6,7.
2. 已知自然数 $n \geqslant 5$,试求:
   (1) n 元集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中,$a_i + a_j(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 至少产生了多少个不同的数?
   (2) 确定达到上述最小值的所有 n 元集合.
3. 某运动队的队员编号无重复地取自正整数1到100.如果其中任一队员的编号都不是另两队员编号之和,也不是另外某一队员的2倍,问这个运动队最多有几个人?
4. 令 S 是 n 个不同实数的集合,A_S 是由 S 中所有互不相同的两元素的平均值所组成的集合.对给定 $n \geqslant 2$,A_S 最少可能有多少个元素?　　(1993年普特南竞赛题)
5. 集合 $\{00,01,\cdots,98,99\}$ 的子集 X 满足:在任一无穷的数字序列中均有两相邻数字构成 X 的元素,X 最少应含多少个元素?　　(第52届莫斯科奥林匹克题)
6. 求最小的正整数 n,使得 $S = \{1,2,\cdots,150\}$ 的每个 n 元子集都含有4个两两互素的数(已知 S 中共有35个素数).

习题 B

1. 一个数集的和是指它的所有元素的和,令 S 是一些不超过15的正整数组成的集合,S 的任意两个不相交的子集合的和不相等,并且在所有具有上述性质的集合中,S 的和最大,求集合 S 的和.　　(第4届美国邀请赛题)

2. 用 $\Gamma(S)$ 表示非空整数集 S 中所有元素的和.设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是正整数集,且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,若对每个正整数 $n\leqslant 1500$,存在 A 的子集 S,使得 $\Gamma(S)=n$.试求满足上述要求的 a_{10} 的最小值. (第 21 届美国奥林匹克题)

3. n 是一个正整数,A 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集的一个集合,使得 A 内无元素包含 A 的其他元素.求 A 的全部元素的个数的最大值. (1994 年保加利亚奥林匹克题)

4. 集合 $A=\{1,2,3,\cdots,1997\}$,对 A 的任意一个 999 元子集 X,若存在 $x,y\in X$,使得 $x<y$ 且 $x\mid y$,则称 X 集为好集.求最大的自然数 $a(a\in A)$,使任一含有 a 的 999 元子集都为好集. (《中等数学》1999 年 1 期奥林匹克问题)

第二篇 函数问题

第三章 函数值、值域的求解

【基础知识】

求某些抽象函数的值或值域，是需要综合考查函数的构成特点(有的函数是以某一简单函数为模特或特殊函数为背景构作而来)及性质后，根据所给条件来推导计算结果的一类问题，所需要的基础知识是熟悉掌握函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等基本性质和这些性质的综合应用．

【典型例题与基本方法】

例1 设函数 $f:\{x \mid x \neq 0,1, x \in \mathbf{R}\} \to \mathbf{R}$，且满足 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=1+x$，求 $f(2)$．

解 令 $\frac{x-1}{x}=y$，有 $x=\frac{1}{1-y}$，代入题设条件式，有 $f(\frac{1}{1-y})+f(y)=\frac{y-2}{y-1}$，即有 $f(\frac{1}{1-x})+f(x)=\frac{x-2}{x-1}$． ①

又令 $x=\frac{u-1}{u}$，代入题设条件式，有

$f(\frac{u-1}{u})+f(\frac{1}{1-u})=\frac{2u-1}{u}$，即 $f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=\frac{2x-1}{x}$． ②

由题设条件式及①,②,得 $f(x)=\dfrac{x^2-x^2-1}{x(x-1)}$.

故 $f(2)=\dfrac{3}{2}$.

例 2 设函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(i) 若 $x>y$,且 $f(x)+x\geqslant w\geqslant f(y)+y$,则存在实数 $z\in[y,x]$,使得 $f(z)=w-z$;

(ii) 方程 $f(x)=0$ 至少有一个解,并在该方程的解中存在一个解不大于所有其他的解;

(iii) $f(0)=1$;

(iv) $f(-2003)\leqslant 2004$;

(v) $f(x)\cdot f(y)=f[x\cdot f(y)+y\cdot f(x)+xy]$.

求 $f(-2003)$ 的值.

解 令 $F(x)=f(x)+x$,则 $F(0)=1$.

设 u 是 $f(x)=0$ 的最小根,则 $F(u)=u$.

若 $u<0$,则对于 $w=0$,由条件(i)及 $F(0)\geqslant w\geqslant F(u)$ 得出:存在 $z\in[u,0]$,使得 $F(z)=w=0$.

由条件(v)知
$$0=f(z)\cdot f(u)=f[z\cdot f(u)+u\cdot f(z)+zu]$$
$$=f[u(f(z)+z)]=f[u\cdot F(z)]=f(0)=1.$$
矛盾,所以,$u>0$.

对于任意实数 x,由条件(v),有

$0=f(x)\cdot f(u)=f[x\cdot f(u)+u\cdot f(x)+xu]=f[u\cdot f(x)+xu]$.

从而,$uf(x)+xu$ 是方程 $f(x)=0$ 的根.

因 u 是 $f(x)=0$ 的最小根,则 $u\cdot f(x)+x\cdot u\geqslant u$,

从而,$f(x)+x\geqslant 1$,即 $f(x)\geqslant 1-x$.

于是 $f(-2003)\geqslant 2004$.

又由条件(iv),有 $f(-2003)\leqslant 2004$.

故 $f(-2003)=2004$.

例 3 已知函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义,$f(\frac{1}{2})=-1$,且满足 $x,y\in(-1,1)$,有 $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$.证明:

(1) 若有序列 $x_1=\dfrac{1}{2}$,$x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{1+x_n^2}$,则 $f(x_n)=-2^{n-1}$;

(2) $1+f(\frac{1}{5})+\cdots+f(\frac{1}{n^2+3n+1})+f(\frac{1}{n+2})=f(0)$.

证明 由题设,有 $f(0)+f(0)=f(\frac{0+0}{1+0})=f(0)$,故 $f(0)=0$.

又 $x\in(-1,1)$,有 $f(x)+f(-x)=f(\frac{x-x}{1-x^2})=f(0)=0$,

得 $f(-x)=-f(x)$.故知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为奇函数.

(1) 取 $x=y$,有 $2f(x)=f(\frac{2x}{1+x^2})$,从而 $f(x_{k+1})=f(\frac{2x_k}{1+x_k^2})=2f(x_k)$.

这表明,序列 $\{f(x_n)\}$ 是首项为 $f(x_1)=-1$,公比为 $q=2$ 的等比数列,有 $f(x_n)=-2^{n-1}$.

(2) 由
$$\frac{1}{k^2+3k+1}=\frac{1}{(k+1)(k+2)-1}=\frac{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{1-\frac{1}{(k+1)(k+2)}}=\frac{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}}{1-\frac{1}{(k+1)(k+2)}},$$

得 $f(\frac{1}{k^2+3k+1})=f(\frac{1}{k+1})+f(-\frac{1}{k+2})=f(\frac{1}{k+1})-f(\frac{1}{k+2})$,

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac{1}{k^2+3k+1})=f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{n+2})=-1-f(\frac{1}{n+2})$.

故 $1+f(\frac{1}{5})+f(\frac{1}{11})+\cdots+f(\frac{1}{n^2+3n+1})+f(\frac{1}{n+2})=0$.

例4 设 $x>0$,求函数

$$f(x)=\frac{x+\frac{1}{x}}{[x]\cdot[\frac{1}{x}]+[x]+[\frac{1}{x}]+1}$$

的值域.其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解 由于 $f(x)$ 的表达式中,x 与 $\frac{1}{x}$ 对称,且 $x>0$,不妨设 $x\geqslant 1$.

(i) 当 $x=1$ 时,$\frac{1}{x}=1$,有 $f(1)=\frac{1}{2}$;

(ii) 当 $x>1$ 时,设 $x=n+\alpha$,$0\leqslant\alpha<1$,$n\in\mathbf{N}+$,有 $[x]=n$,$[\frac{1}{x}]=0$.故 $f(x)=\frac{n+\alpha+\frac{1}{n+\alpha}}{n+1}$.

又易证函数 $g(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上递增，有 $n+\frac{1}{n}\leqslant n+\alpha+\frac{1}{n+\alpha}<n+1+\frac{1}{n+1}$，则 $f(x)\in[\frac{n+\frac{1}{n}}{n+1},\frac{n+1+\frac{1}{n+1}}{n+1})=I_n(n=1,2,\cdots)$.

故 $f(x)$ 的值域为 $I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n\cup\cdots$

设 $a_n=\frac{n+\frac{1}{n+1}}{n+1}=\frac{n^2+1}{n^2+n}$，$b_n=\frac{n+1+\frac{1}{n+1}}{n+1}=1+\frac{1}{(n+1)^2}$，

则 $I_n=[a_n,b_n]$.

又 $a_{n+1}-a_n=\frac{n-2}{n(n+1)(n+2)}$，

从而，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_2=a_3<a_4<a_5<\cdots<\cdots<a_n<\cdots$

易知 b_n 单调递减，即 $b_2>b_3>b_4>\cdots>b_n>\cdots$

故 $[a_2,b_2)=I_2\supsetneqq I_3\supsetneqq I_4\supsetneqq\cdots\supsetneqq I_n\supsetneqq\cdots$

因 $I_1=[a_1,b_1)=[1,\frac{5}{4})$，$I_2=[a_2,b_2)=[\frac{5}{6},\frac{10}{9})$，

所以 $I_1\cup I_2\cup I_3\cup\cdots\cup I_n\cup\cdots=I_1\cup I_2=[1,\frac{5}{4})\cup[\frac{5}{6},\frac{10}{9})=[\frac{5}{6},\frac{5}{4}]$.

综上所述，$f(x)$ 的值域为 $\{\frac{1}{2}\}\cup[\frac{5}{6},\frac{5}{4})$.

例5 已知函数 $f(n)$ 是定义域为正整数集且取值为正整数严格单调递增函数，且满足 $f[f(n)]=3n$，求 $f(2004)$ 的值.

解法1 由题设知 $f(n)\in\mathbf{N}^+$，且 $f(3n)=f[f[f(n)]]=3f(n)$，$n\in\mathbf{N}^+$. ①

首先求 $f(1)$ 与 $f(2)$.

若 $f(1)=1$，则有 $f(1)=f(f(1))=3$，与 $f(n)$ 单调矛盾.

由题设，有 $f[f(1)]=3$，若 $f(1)\geqslant 3$，则由严格单调性，知 $f(3)>f(2)>f(1)\geqslant 3$，从而 $f(3)>5$，即 $f(f(1))\geqslant f(3)>5$ 与 $f(f(1))=3$ 矛盾.

因此，$f(1)=2$.

在条件式 $f[f(n)]=3n(n\in\mathbf{N}^+)$ 中，令 $n=1$ 有 $f[f(1)]=f(2)=3$.

同样，由条件式 $f[f(n)]=3n$，可求得

$f(3)=6,f(6)=9,f(9)=18,\cdots$

由此猜测 $f(n+1)\leqslant f(n)+3(n\in\mathbf{N}^+)$. ②

因此，其次证明上述不等式成立.

假设②式不真，即存在 $n_0\in\mathbf{N}^+$，使得 $f(n_0+1)>f(n_0)+3$，则由题设

$3(n_0+1)=f[f(n_0+1)]>f[f(x_0)+3]\geqslant f[f(n_0)]+3=3n_0+3$,矛盾.

因此②式成立.

最后,求 $f(2004)$.

由①,②两式即 $f(1)=2,f(2)=3$,一方面有

$$\begin{aligned}f(2004)&=3\cdot f(668)\geqslant 3[f(669)-3]=3^2\cdot f(223)-9\\&\geqslant 3^2[f(225)-6]=3^3\cdot f(75)-63=3^4\cdot f(25)-63\\&\geqslant 3^4[f(27)-6]-63=3^4\cdot f(3^3)-549\\&=3^4\cdot 3^3\cdot f(1)-549=3^7\cdot 2-558=3825.\end{aligned}$$

另一方面,有

$$\begin{aligned}f(2004)&=3f(668)\leqslant 3[f(666)+6]\\&=3\cdot f(3^2\cdot 74)+18=3^2\cdot f(74)+18\\&\leqslant 3^3\cdot[f(72)+6]+18=3^3\cdot f(3^3\cdot 8)+180\\&=3^5\cdot f(8)+180\leqslant 3^5\cdot[f(6)+6]+180\\&=3^6\cdot f(2)+6\cdot 3^5+180=3^6\cdot 3+6\cdot 3^5+180=3825.\end{aligned}$$

故 $f(2004)=3825$.

解法2 同解法1求得 $f(1)=2$.由 $f(3n)=f[f(f(n))]=3f(n)(n\in\mathbf{N}^+)$,知当 $k\in\mathbf{N}^+$ 时,有 $f(3^k)=3^k\cdot f(1)=2\cdot 3^k$.

由上式,又有 $f(2\cdot 3^k)=f[f(3^k)]=3\cdot 3^k=3^{k+1}$,

因此,对任意 $n\in\mathbf{N}^+$,有 $f(3^n)=2\cdot 3^n,f(2\cdot 3^n)=3^{n+1}$.

又因 $f(2\cdot 3^n)-f(3^n)=3^{n+1}-2\cdot 3^n=3^n=2\cdot 3^n-3^n$.

则知自变量由 3^n 增加到 $2\cdot 3^n$ 时,函数值从 $2\cdot 3^n$ 增加到 3^{n+1},注意到 $f(n)\in\mathbf{N}^+$ 且严格单调递增,知 $f(3^n+m)=2\cdot 3^n+m(0\leqslant m\leqslant 3^n,m\in\mathbf{N}^+)$.

于是 $f(2\cdot 3^n+m)=f[f(3^n+m)]=3\cdot(3^n+m)$.

故 $f(n)=\begin{cases}2\cdot 3^n+m,\text{当 } n=3^k+m,0\leqslant m\leqslant 3^k\text{ 时},\\3(3^n+m),\text{当 } n=2\cdot 3^k+m,0\leqslant m\leqslant 3^k\text{ 时}.\end{cases}$

而 $2004=2\cdot 3^6+546$,则 $f(2004)=f(2\cdot 3^6+546)=3(3^6+546)=3825$.

【解题思维策略分析】

1. 通过观察、联想,赋以某些特殊值,注意归纳、类比,从而确定未知函数的性质来求得其值或值域

例6 已知函数是定义域为R的函数,且 $f(x+2)[1-f(x)]=1+f(x)$,$f(1)=2+\sqrt{2}$.求 $f(1989)$.

(1989年北京市竞赛题)

解 由 $f(x+2)[1-f(x)]=1+f(x)$,有 $f(x+2)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

从而，$f(x+4)=\dfrac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)}=\dfrac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\dfrac{1}{f(x)}$.

又 $f(x)=\dfrac{f(x+2)-1}{f(x+2)+1}$，则

$$f(x-4)=\frac{f(x-2)-1}{f(x-2)+1}=\frac{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}=-\frac{1}{f(x)}.$$

故 $f(x+4)=f(x-4)$，

即 $f(x+8)=f(x)$.

于是 $f(1989)=f(248\cdot 8+5)=f(5)=-\dfrac{1}{f(1)}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$.

例 7 设 $f(n)$ 是定义在所有正整数上且取正整数值的函数.对所有正整数 m,n，有 $f[f(m)+f(n)]=m+n$.求 $f(1988)$ 的所有可能值.（1988 年墨西哥奥林匹克题）

解 设 $f(1)=t$，如果 $f(m)=n$，则

$f(2n)=f[f(m)+f(m)]=2m$. ①

特别地，当 $m=1,n=t$ 时，$f(2t)=2$. ②

我们证明 $t=1$，不然的话，则设 $t=b+1,b\in\mathbf{N}$. ③

又设 $f(b)=c,c\in\mathbf{N}$，则 $f(2c)=2b$，并且

$2c+2t=f[f(2c)+f(2t)]=f(2b+2)=f(2t)=2$，

即 $t+c=1$.矛盾，于是 $f(1)=1$.

如果 $f(n)=n$，则 $f(n+1)=f[f(n)+f(1)]=n+1$.

所以，对一切自然数 n，有 $f(n)=n$.

特别地，$f(1988)=1988$.

例 8 设 $\mathbf{N}$ 为自然数集合，$k\in\mathbf{N}$，如果有一个函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 是严格递增的，且对每个 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f[f(n)]=kn$.求证：对每一个 $n\in\mathbf{N}$，都有 $\dfrac{2k}{k+1}\leqslant f(n)\leqslant\dfrac{k+1}{2}n$.

（第 5 届中国奥林匹克选拔试题）

证明 由于 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 是严格递增的，因此，有

$f(n)\geqslant n$，① $f(n+m)\geqslant f(n)+m$.②

由 ①，可设 $f(n)=n+m$（m 为非负整数），于是由已知，得

$kn=f[f(n)]=f(n+m)\geqslant f(n)+m=f(n)+f(n)-n$，

即 $kn\geqslant 2f(n)-n$，故 $f(n)\leqslant\dfrac{k+1}{2}n$. ③

由 ③ 可得，$kn = f[f(n)] \leqslant \frac{k+1}{2}f(n)$.

即 $f(n) \geqslant \frac{2k}{k+1}n$.

所以，有 $\frac{2k}{k+1}n \leqslant f(n) \leqslant \frac{k+1}{2}n$.

2. 注意各种方法的综合运用

例 9 N_0 是所有非负整数的集合，$f(n)$ 是一个函数，使得 $f: N_0 \to N_0$，且对于每个 $n \in N_0$，$f[f(n)] + f(n) = 2n + 3$. 求 $f(1993)$. （1994 年保加利亚奥林匹克题）

解 首先证明：如果 $m, n \in N_0$，$m \neq n$，必有 $f(m) \neq f(n)$，即 f 是一一映射确定的函数.

用反证法. 如果 $f(m) = f(n)$，则 $f[f(m)] = f[f(n)]$.

于是，我们由题设条件可得

$2m + 3 = f[f(m)] + f(m) = f[f(n)] + f(n) = 2n + 3$，

从而，有 $m = n$. 矛盾.

再求 $f(0)$. 设 $f(0) = x$，$x \geqslant 0$.

在题目给定的关系式中，令 $n = 0$，则得 $f(x) + x = 3$，即 $f(x) = 3 - x$. ①

由于 $f(x) \geqslant 0$，因此，$x \leqslant 3$.

由题目给定的关系式中，令 $n = x$，则得

$f[f(x)] + f(x) = 2x + 3$.

将 ① 代入上式，得 $f(3 - x) = 3x$. ②

在题目给定的关系式中，令 $n = 3 - x$，则得 $f[f(3 - x)] + f(3 - x) = 2(3 - x) + 3$，

将 ② 代入上式，得 $f(3x) = 9 - 5x$.

由于 $f(3x) \geqslant 0$，因此 $9 - 5x \geqslant 0$，即 $x \leqslant \frac{9}{5}$.

从而，有 $x = 0$ 或 $x = 1$.

如果 $x = 0$，即 $f(0) = 0$. 此时，在题目给定的关系式中，令 $n = 0$，则得 $f[f(0)] + f(0) = 3$，从而，有 $0 = 3$，矛盾.

故必有 $x = 1$，则必有 $f(0) = 1$.

又用数学归纳法可以证明：对任何非负整数 n，$f(n) = n + 1$.

事实上，当 $n = 0$ 时，由 $f(0) = 1$ 可知，结论成立.

设当 $n = k$ 时，结论成立，即 $f(k) = k + 1$.

于是，在题目给定的关系式中，令 $n = k$，有 $f[f(k)] + f(k) = 2k + 3$.

由归纳假设，得 $f(k + 1) + k + 1 = 2k + 3$，

即 $f(k+1)=k+2$.

根据数学归纳法原理,对任何非负整数 n,有 $f(n)=n+1$.

从而 $f(1993)=1993+1=1994$.

例 10 设 $f(x)$ 是周期函数,T 和 1 是 $f(x)$ 的周期且 $0<T<1$. 证明:

(Ⅰ) 若 T 为有理数,则存在素数 p,使 $\frac{1}{p}$ 是 $f(x)$ 的周期;

(Ⅱ) 若 T 为无理数,则存在各项均为无理数的数列 $\{a_n\}$,满足 $1>a_n>a_{n+1}>0(n=1,2,\cdots)$,且每个 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的周期.

证明 (Ⅰ)若 T 为有理数,则存在正整数 m,n,使得 $T=\frac{n}{m}$ 且 $(m,n)=1$,从而存在整数 a,b,使得 $ma+nb=1$.于是,

$\frac{1}{m}=\frac{ma+nb}{m}=a+bT=a\cdot 1+b\cdot T$ 是周期函数.

又因 $0<T<1$,从而 $m\geqslant 2$.

设 p 是 m 的素因子,则 $m=pm'$,$m'\in\mathbf{N}^+$,从而 $\frac{1}{p}=m'\cdot\frac{1}{m}$ 是 $f(x)$ 的周期.

(Ⅱ)若 T 为无理数,令 $a_1=1-[\frac{1}{T}]T$,则 $0<a_1<1$,且 a_1 是无理数,令 $a_2=1-[\frac{1}{a_1}]a_1,\cdots,a_{n+1}=1-[\frac{1}{a_n}]a_n,\cdots$.

由数学归纳法易知 a_n 均为无理数,且 $0<a_n<1$.

又 $\frac{1}{a_n}-[\frac{1}{a_n}]<1$,故 $1<a_n+[\frac{1}{a_n}]a_n$,即 $a_{n+1}=1-[\frac{1}{a_n}]a_n<a_n$,因此 $\{a_n\}$ 是递减数列.

最后证明:每个 a_n 是 $f(x)$ 的周期.

事实上,因 1 和 T 是 $f(x)$ 的周期,故 $a_1=1-[\frac{1}{T}]T$ 亦是 $f(x)$ 的周期.

假设 a_k 是 $f(x)$ 的周期,则 $a_{k+1}=1-[\frac{1}{a_k}]a_k$ 也是 $f(x)$ 的周期.

由数学归纳法,证得 a_n 均是 $f(x)$ 的周期.

例 11 全体正整数的集合可以分成两个互不相交的正整数子集 $\{f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots\}$, $\{g(1),g(2),\cdots,g(n),\cdots\}$, 式中 $f(1)<f(2)<\cdots<f(n)<\cdots g(1)<g(2)<\cdots<g(n)<\cdots$ 且有 $g(n)=f[f(n)]+1(n\geqslant 1)$.求 $f(240)$.

(IMO - 20 试题)

解 我们先来证明以下三个等式:

$g(n)=f(n)+n,$ ①

$f[f(n)]=f(n)+n-1,$ ②

$f[f(n)+1]=f(n)+n+1,$ ③

事实上,假设 $f(n)=k$,则 $g(n)=f(k)+1$,于是,两个互不相交的集合 $\{f(1),f(2),\cdots,f(k)\}$ 和 $\{g(1),g(2),g(3),\cdots,g(n)\}$ 中包含所有从 1 到 $g(n)$ 的自然数.计算这两个集合中元素的个数,就可以得到

$g(n)=k+n$,即 $g(n)=f(n)+n$.故 ① 式成立.

又由 $k+n=g(n)=f(k)+1$,得 $f(k)=k+n-1$,即 $f[f(n)]=f(n)+n-1$.故 ② 式成立.

令 $F=\{f(n)\},G=\{g(n)\},n=1,2,3,\cdots$

由等式 $g(n)-1=f[f(n)]$ 可知,$g(n)-1$ 是 F 的元素.

因此,不可能有两个连续的整数都是 G 的元素.

又因为 $k+n$ 是 G 的元素,所以 $k+n-1$ 和 $k+n+1$ 都是 F 的元素,并且是 F 的两个相邻的元素.由 ② 可知,$f[f(n)+1]=k+n+1$,即

$f[f(n)+1]=f(n)+n+1$.故 ③ 式成立.

下面,我们利用 ①,②,③ 三个式子来逐步求出 $f(240)$.

事实上,由 $g(1)=f[f(1)]+1>1$,得 $f(1)=1$,从而 $g(1)=2$.由 ③ 得 $f(2)=f[f(1)+1]=f(1)+1+1=3$,

由 ② 得 $f(3)=f(f(2))=f(2)+2-1=4$,

$f(4)=f(f(3))=f(3)+3-1=6$,

$f(6)=f(f(4))=f(4)+4-1=9$,

$f(9)=f(f(6))=f(6)+6-1=14$,

$f(14)=f[f(9)]=f(9)+9-1=22$,

$f(22)=f[f(14)]=f(14)+14-1=35$,

$f(35)=f[f(22)]=f(22)+22-1=56$,

$f(56)=f[f(35)]=f(35)+35-1=90$,

由 ③ 得 $f(91)=f[f(56)+1]=f(56)+56+1=147$,

$f(148)=f[f(91)+1]=f(91)+91+1=239$,

$f(240)=f[f(148)+1]=f(148)+148+1=388$.

【模拟实战】

习题 A

1. 设 $n\in\mathbf{Z}$,函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ 满足 $f(n)=\begin{cases}n-10, & \text{当 } n>100 \text{ 时}\\ f[f(n+11)], & \text{当 } n\leqslant 100 \text{ 时}\end{cases}$,证明:对任意 $n\leqslant 100$,都有 $f(n)=91$. （1983 年前南斯拉夫奥林匹克题）
2. $f(n)$ 定义在正整数集上,并且:(1) 对任一正整数 n,$f[f(n)]=4n+9$;(2) 对任一非负整数 k,$f(2^k)=2^{k+1}+3$.试确定 $f(1789)$. （1989 年澳大利亚奥林匹克题）
3. 函数 $f,g,h:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 满足下述三个条件:(1) 对不同的 $n\in\mathbf{N}$,$h(n)$ 取不同的值;(2) 函数 $g(n)$ 的值域是 $\mathbf{N}$;(3) $f(n)\equiv g(n)-h(n)+1$,$n\in\mathbf{N}$.证明:$f(n)\equiv 1$,$n\in\mathbf{N}$. （1979 年罗马尼亚奥林匹克题）

习题 B

1. 设 $f(0)=f(1)=0$,及 $f(v+2)=4^{v+2}f(v+1)-16^{v+1}f(v)+v\cdot 2^{v^2}$ $(v=1,2,\cdots)$.求证:$f(1989)$,$f(1990)$,$f(1991)$ 均被 13 整除. （IMO－31 预选题）
2. n 是不小于 3 的自然数,$f(n)$ 表示不是 n 的因数的最小自然数(例如 $f(12)=5$).如果 $f(n)\geqslant 3$,又可作 $f(f(n))$,类似地,如果 $f(f(n))\geqslant 3$,又可作 $f[f(f(n))]$ 等等.如果 $\underbrace{f(f(\cdots f}_{k}(n)\cdots))=2$,就把 k 叫做 n 的“长度”.如果用 l_n 表示 n 的长度,试对任意自然数 $n(n\geqslant 3)$,求 l_n,并证明你的结论. （1988 年中国冬令营试题）
3. 对于给定的正常数 k,定义 $f_1(k)$ 为 k 的数字和的平方,并令 $f_{n+1}(k)=f_1(f_n(k))$,求 $f_{1991}(2^{1990})$ 的值. （IMO－31 预选题）
4. 函数 $f(x,y)$ 对所有的非负整数 x,y,满足:
   (1) $f(0,y)=y+1$;
   (2) $f(x+1,0)=f(x,1)$;
   (3) $f(x+1,y+1)=f[x,f(x+1,y)]$.
   试确定 $f(4,1981)$. （IMO－22 试题）

第四章　多元函数的条件最(极)值求解

【基础知识】

求函数最值问题是数学中一类重要问题,其中又以求多元函数的条件最(极)值为各类竞赛的热点.解答此类问题,常常要应用到二次函数、三次函数的性质以及一般函数的各种基本性质,特别是凹凸性,以及几个重要不等式,如平均值不等式、柯西不等式等.除此之外,还要具有灵活变更问题的能力和较强的解题技巧.例如,对于某些多元函数的极值,常常要将某些变量固定而考虑少数几个变量的变化规律.因此,求解多元函数的条件最(极)值问题常采用函数法、不等式法、不变量法、冻结变量(先固定某些变量)法等.

【典型例题与基本方法】

1. 函数法

例1　设 $x,y\in\mathbf{R}$,求函数 $f(x,y)=x^2+6y^2-2xy-14x-6y+72$ 的最小值,并求出取得最小值时的 x、y 的值.

解　由 $f(x,y)=(x-y-7)^2+5(y-2)^2+3$,知 $f(x,y)\geqslant 3$.

此时由 $x-y-7=0$ 且 $y-2=0$ 得

$x=9,y=2$ 时,$f(x,y)$ 取得最小值3.

例2　设 $x\in\mathbf{R}$,试求函数 $f(x)=(x^2+4x+5)(x^2+4x+2)+2x^2+8x+1$ 的最小值.

解　令 $u=x^2+4x$,于是

$f(x)=g(u)=(u+5)(u+2)+2u+1=u^2+9u+11$.

由二次函数性质知,当 $u=-\dfrac{9}{2}$ 时,$g(u)$ 取得最小值,且当 $u>-\dfrac{9}{2}$ 时,$g(u)$ 是 u 的严格增函数.由 $u=x^2+4x=(x+2)^2-4$ 知 $u\geqslant -4$,且当 $x=-2$ 时,$u=-4$,故知 $x=-2$ 时,$f(x)$ 取得最小值,其值为 -9.

例3　设 $x_1,x_2,\cdots,x_{2000}$ 是2000个实数,满足 $x_i\in[0,1]$ $(i=1,2,\cdots,2000)$,定义 $F_i=\dfrac{x_i^{2000}}{\sum\limits_{j=1}^{2000}x_j^{3999}-ix_i^{3999}+2000}$,求 $\sum\limits_{i=1}^{2000}F_i$ 的最大值,并证明你的结论.

解　$\sum_{i=1}^{2000} F_i$ 的最大值是$\frac{2000}{3999}$.

实际上,由于 $x_i \in [0,1]$,首先$\sum_{i=1}^{2000} F_i \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{2000} x_i^{2000}}{\sum_{i=1}^{2000} x_i^{3999} + 1999}$,记不等式右边为 S,只需证 $S \leqslant \frac{2000}{3999}$,即

$$\sum_{i=1}^{2000} x_i^{2000} \leqslant \frac{2000}{3999}\left(\sum_{i=1}^{2000} x_i^{3999} + 1999\right). \qquad (*)$$

设 $f(x_i) = \frac{2000}{3999}x_i^{3999} - x_i^{2000} + \frac{1999}{3999}$,只需证对任给 $i = 1,2,\cdots,n$,$f(x_i) \geqslant 0$ 即可.

而

$$\begin{aligned} 3999f(x) &= 2000x^{3999} - 3999x^{2000} + 1999 \\ &= 2000x^{2000}(x^{1999} - 1) - 1999(x^{2000} - 1) \\ &= (x-1)[2000x^{2000}(x^{1998} + x^{1997} + \cdots + 1) - 1999(x^{1999} + x^{1998} + \cdots + 1)] \\ &= (x-1)\left[\sum_{i=2000}^{3998}(x^i - 1) + 1999\sum_{i=1}^{1999}(x^{i+1999} - x^i)\right] \\ &= (x-1)^2\left[\sum_{i=2000}^{3998}(x^{i-1} + x^{i-2} + \cdots + 1) + 1999\sum_{i=0}^{1998}x^i\sum_{i=1}^{1999}x^i\right] \geqslant 0. \end{aligned}$$

所以(*)式成立,等号成立的条件为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2000} = 1$.

2. 不等式法

例 4　试求函数 $f(x,y) = 6(x^2 + y^2)(x + y) - 4(x^2 + xy + y^2) - 3(x + y) + 5$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$ 上的最小值.

解　注意到 $x > 0, y > 0$,不妨设 $x + y = k(k > 0)$,显然有

$$x \cdot y \leqslant \frac{1}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}k^2, \quad x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{1}{2}k^2.$$

考虑取 $k = 1$,即当 $x + y \leqslant 1$ 时,有 $xy \leqslant \frac{1}{4}(x+y)^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 6(x^3 + y^3) + 6xy(x+y) - 4xy - 4(x^2 + y^2) - 3(x+y) + 5 \\ &= 6\left(xy - \frac{1}{4}\right)(x+y-1) + 6x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6y\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \\ &\quad \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (x+y-1)^2 + 2 \\ &= 6\left(xy - \frac{1}{4}\right)(x+y-1) + (6x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (6y+1)\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \\ &\quad (x+y-1)^2 + 2 \\ &\geqslant 2, \end{aligned}$$

其中等号当且仅当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时取到.

又当 $x+y>1$ 时,有 $x^2+y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x+y)^2 > \frac{1}{2}$.

$f(x,y) = 6(x^2+y^2-\frac{1}{2})(x+y-1)+2(x-y)^2+2 > 2$.

综上,对任意给定 $(x,y) \in D$,均有 $f(x,y) \geqslant 2$,而当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)_{\min}=2$.

例 5 设 x,y,z,w 是四个不全为零的实数.求:

$S=\dfrac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}$ 的最大值. (1985 年奥地利 - 波兰联赛题)

解 注意到,所给函数表达式中将 x 与 w 互换,同时将 y 与 z 互换,表达式不变.于是,由含参数 λ 的平均值不等式,有

$2xy \leqslant \lambda x^2+\frac{1}{\lambda}y^2, 2zw \leqslant \lambda w^2+\frac{1}{\lambda}z^2, 2yz \leqslant y^2+z^2$,

其中等号成立分别当且仅当 $y=\lambda x, z=\lambda w, y=z$.

于是,$xy+2yz+zw \leqslant \frac{\lambda}{2}x^2+(\frac{1}{2\lambda}+1)y^2+(\frac{1}{2\lambda}+1)z^2+\frac{\lambda}{2}w^2$.

为使上式右端对称以便与 S 的分母消去,取 λ,使得 $\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{2\lambda}+1$,由此解得 $\lambda=1+\sqrt{2}$.将 $\lambda=1+\sqrt{2}$ 代入,便得 $S \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}$,其中等号当且仅当 $x=w=1, y=z=1+\sqrt{2}$ 时成立,即所求最大值为 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$.

例 6 设 $x_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,n)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{1 \leqslant k<j \leqslant n}\sqrt{\frac{k}{j}}x_kx_j=1$,求 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 的最大值与最小值. (2001 年全国高中联赛题)

解 先求最小值.

由平均值不等式,有 $(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{1 \leqslant k<j \leqslant n}x_kx_j \geqslant 1$,

得 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i \geqslant 1$,其中等号当且仅当存在 i,使得 $x_i=1, x_j=0, j \neq i$.

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 的最小值为 1.

再求最大值.令 $x_k=\sqrt{k}y_k$,有 $\sum\limits_{k=1}^{n}ky_k^2+2\sum\limits_{1 \leqslant k<j \leqslant n}ky_ky_j=1$. (*)

设 $M=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}y_k$,

$$\text{令}\begin{cases} y_1+y_2+\cdots+y_n=a_1, \\ \quad y_2+\cdots+y_n=a_2, \\ \quad\quad \cdots \\ \quad\quad\quad y_n=a_n. \end{cases}$$

则(*)式等价于 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$.

令 $a_{n+1}=0$,则 $M=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}(a_k-a_{k+1})=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}a_{k+1}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}a_k-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k-1}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})a_k.$$

由柯西不等式,得

$$M\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

等号成立 $\Leftrightarrow \dfrac{a_1^2}{1}=\cdots=\dfrac{a_k^2}{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2}=\cdots=\dfrac{a_n^2}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{1+(\sqrt{2}-1)^2+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2}=\frac{a_k^2}{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2}$$

$$\Leftrightarrow a_k=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}}(k=1,2,\cdots,n).$$

由于 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,从而

$$y_k=a_k-a_{k+1}=\frac{2\sqrt{k}-(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}}\geqslant 0,\text{即 } x_k\geqslant 0.$$

故所求最大值为 $\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

3. 冻结变量法

例 7 求三位数(十进制表示)与其各位数字之和的比的最小值.

解 设三位数为 $100x+10y+z$,其中 x,y,z 都是整数,且 $1\leqslant x\leqslant 9, 0\leqslant y,z\leqslant 9$,于是,它与它的各位数字之和的比为

$$f(x,y,z)=\frac{100x+10y+z}{x+y+z}=1+\frac{99x+9y}{x+y+z}. \qquad ①$$

由于①式右端的表达式中,只有分母中含有 z,故当 x,y 固定时,$f(x,y,z)$ 当且仅当 $z=9$ 时取得最小值.类似地,可得

$$f(x,y,z) \geqslant 1+\frac{99x+9y}{x+y+z}=10+\frac{90x-81}{9+x+y} \geqslant 10+\frac{90x-81}{18+x}=100-\frac{1701}{18+x}, \quad ②$$

其中第二个不等式中等号成立当且仅当 $y=9$. 最后，由 ② 式可见，当且仅当 $x=1, y=9, z=9$ 时，$f(x,y,z)$ 取得最小值 $f(1,9,9)=\frac{199}{19}$，即所求的最小值为 $\frac{199}{19}$.

注 此例中的求法又称为累次求极值法.

例 8 已知非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足不等式 $x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant \frac{1}{2}$，求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$ 的最小值.

解 当 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}+x_n$ 都为定值时，由于

$(1-x_{n-1})(1-x_n)=1-(x_{n-1}+x_n)+x_{n-1}x_n$,

可见，$|x_{n-1}-x_n|$ 越大，上式的值越小. 为此，

令 $x'_i=x_i(i=1,2,\cdots,n-2), x'_{n-1}=x_{n-1}+x_n, x'_n=0$，则 $\quad (*)$

$x'_{n-1}+x'_n=x_{n-1}+x_n, x'_{n-1}\cdot x'_n=0<x_{n-1}\cdot x_n$.

所以，有 $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \geqslant (1-x'_1)(1-x'_2)\cdots(1-x'_{n-1})$，其中

$x'_1+x'_2+\cdots+x'_n=x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant \frac{1}{2}$.

再进行形如 $(*)$ 的变换 $n-2$ 次，即可得

$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)>1-(x_1+x_2+\cdots+x_n) \geqslant \frac{1}{2}$，其中等号当 $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=x_3=\cdots=x_n=0$ 时取得.

所以，所求的最小值为 $\frac{1}{2}$.

注 此题中的求法又称为磨光法.

4. 调整法

例 9 已知若干个正整数之和为 1976，求其积的最大值. (IMO－17 试题)

解 和为 1976 的不同的正整数组只有有限多个，所以这个最大值是存在的.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正整数，$x_1+x_2+\cdots+x_n=1976$ 且使其积 $P=x_1x_2\cdots x_n$ 取得最大值.

(i) 对所有 i 均有 $x_i \leqslant 4$，若不然，设 $x_j>4$，则 $x_j=2+(x_j-2)$，而 $2(x_j-2)=2x_j-4>x_j$，故当用 2 和 x_j-2 代替 x_j 时，将使乘积变大，此不可能.

(ii) 对所有 i，都有 $x_i \geqslant 2$. 若有某 $x_j=1$，则 $x_ix_j=x_i<x_i+x_j$，故当用 x_i+x_j 代

替 x_i, x_j 时，将使乘积 P 变大，矛盾.

(iii) 因为 $4 = 2 + 2 = 2 \cdot 2$，故 $x_i = 4$ 不必要，它可以用两个 2 来代替而保持和与积都不变.

(iv) 由以上论证知，$P = 2^r \cdot 3^s$，其中 r 和 s 都是非负整数. 因 $2 + 2 + 2 = 3 + 3$，而 $2^3 < 3^2$，故必有 $r < 3$. 又因 $1976 = 658 \cdot 3 + 2$，故得 $r = 1, s = 658$.

所以，所求的 P 的最大值为 $2 \cdot 3^{658}$.

例 10 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是一个以不减的正整数为项的数列. 对于 $m \geqslant 1$，定义 $b_m = \min\{n; a_n \geqslant m\}$，即 b_m 是使 $a_n \geqslant 3$ 的 n 的最小值. 若已知 $a_{19} = 85$，试求

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{85} \qquad (*)$$

的最大值.

(1985 年美国奥林匹克题)

解 若有 $i(1 \leqslant i \leqslant 18)$，使得 $a_i < a_{i+1}$，则进行如下调整：$a'_i = a_i + 1, a'_j = a_j$ $(j \neq i)$，并将调整后的 b_j 记为 $b'_j, j = 1, 2, \cdots, 85$. 于是，可知

$$b_{a_{i+1}} = i + 1, b'_{a_{i+1}} = i = b_{a_{i+1}} - 1, b'_j = b_j, j \neq a_i + 1.$$

这就是说，上述调整使得 $b_{a_{i+1}}$ 减少 1 而其余的 b_j 不动，因此，所作的调整保持 $(*)$ 式的值不变.

这样，我们就可以进行一系列的调整，使得 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{19} = 85$ 并保持 $(*)$ 式的值不变，但这时 $b_1 = b_2 = \cdots = b_{85} = 1$. 所以，所求 $(*)$ 式的最大值为

$$19 \cdot 85 + 1 \cdot 85 = 20 \cdot 85 = 1700.$$

【解题思维策略分析】

1. 注意问题的变更与转化

例 11 求二元函数 $f(x,y) = (x - y)^2 + (x + \frac{1}{y} + 1)^2$ 的最小值.

(1998 年"希望杯"邀请赛题)

解 由于
$$(x - y)^2 + (x + \frac{1}{y} + 1)^2 = (x - y)^2 + [(-x - 1) - \frac{1}{y}]^2,$$

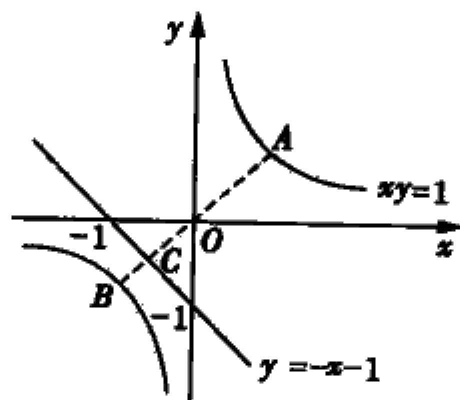


图 4－1

上式可看成直线 $y = -x - 1$ 上的点 $(x, -x-1)$ 和双曲线 $xy = 1$ 上的点 $(y, \frac{1}{y})$ 间距离的平方，如图 4－1.

因此，所求的最小值即为该直线和双曲线最近距离的平方. 由函数的图象，可知 A, B, C 三点的坐标分别是 $(1,1)$，

$(-1,1),(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. 于是,所求最小值是 $|BC|$. 又 $|BC|=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,且 $|BC|^2=\frac{1}{2}$,故 $f(x,y)_{最小}=\frac{1}{2}$ 为所求.

注 由 $(x-y)^2+(x+\frac{1}{y}+1)^2=(x-y)^2+[(x+1)-(-\frac{1}{y})]^2$,则考虑直线 $y=x+1$ 与双曲线 $xy=-1$ 上的点 $(y,-\frac{1}{y})$ 间距离的平方.

例 12 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$,试求

$$f(a,b,c,d)=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}$$ 的最小值.

解法 1 由于直接去分母较繁,考虑对问题进行变更.

设 $b+c+d=A,c+d+a=B,d+a+b=C,a+b+c=D$.

此四式相加,得 $a+b+c+d=\frac{1}{3}(A+B+C+D)$.

于是,可求得,$a=\frac{1}{3}(B+C+D-2A),b=\frac{1}{3}(C+D+A-2B)$,

$$c=\frac{1}{3}(D+A+B-2C),d=\frac{1}{3}(A+B+C-2D).$$

从而,原式 $=\frac{B+C+D-2A}{3A}+\frac{C+D+A-2B}{3B}+\frac{D+A+B-2C}{3C}+\frac{A+B+C-2D}{3D}$,

即

$$\begin{aligned}&3\cdot f(a,b,c,d)+12\\&=\frac{A+B+C+D}{A}+\frac{A+B+C+D}{B}+\frac{A+B+C+D}{C}+\frac{A+B+C+D}{D}\\&=(A+B+C+D)\cdot(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D})\geqslant 16,\end{aligned}$$

亦即 $3\cdot f(a,b,c,d)+12\geqslant 16$,故 $f(a,b,c,d)\geqslant\frac{4}{3}$,其中等号当且仅当 $A=B=C=D$,亦即 $a=b=c=d$ 时取到.

故 $f(a,b,c,d)$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

解法 2 注意到权方和不等式,有

$$\begin{aligned}f(a,b,c,d)&=\frac{a^2}{a(b+c+d)}+\frac{b^2}{b(a+c+d)}+\frac{c^2}{c(a+b+d)}+\frac{d^2}{d(a+b+c)}\\&\geqslant\frac{(a+b+c+d)^2}{2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}\end{aligned}$$

$$= \frac{(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)}$$

及 $a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1}+\frac{c^2}{1}+\frac{d^2}{1}\geqslant\frac{(a+b+c+d)^2}{4}$,于是

$$f(a,b,c,d)\geqslant\frac{(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2-\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2}=\frac{4}{3}.$$

其中等号当且仅当 $a=b=c=d$ 时取到,故 $f(a,b,c,d)$ 的最小值为$\frac{4}{3}$.

解法 3　注意到柯西不等式或权方和不等式,有

$$f(a,b,c,d)=\frac{a+b+c+d}{b+c+d}+\frac{a+b+c+d}{a+c+d}+\frac{a+b+c+d}{a+b+d}+\frac{a+b+c+d}{a+b+c}-4$$

$$\geqslant(a+b+c+d)\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+b+c}\right)-4$$

$$\geqslant(a+b+c+d)\cdot\frac{4^2}{3(a+b+c+d)}-4=\frac{4}{3}.$$

其中等号当且仅当 $a=b=c=d$ 时取到,故 $f(a,b,c,d)$ 的最小值为$\frac{4}{3}$.

例 13　$x_1,x_2,\cdots,x_{1993}$ 满足 $|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{1992}-x_{1993}|=1993$,

$y_k=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}(k=1,2,\cdots,1993)$,则

$|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1992}-y_{1993}|$ 的最大可能值是多少?

(1993 年中国澳门奥林匹克题)

解

$$|y_k-y_{k+1}|=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right|$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}|(x_1-x_{k+1})+(x_2-x_{k+1})+\cdots+(x_k-x_{k+1})|$$

$$\leqslant\frac{1}{k(k+1)}(|x_1-x_2|+2|x_2-x_3|+\cdots+k|x_k-x_{k+1}|)$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}i|x_i-x_{i+1}|,$$

于是,$|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1992}-y_{1993}|=\sum_{k=1}^{1992}|y_k-y_{k+1}|$

$$= \sum_{k=1}^{1992}\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k(k+1)} | x_i - x_{i+1} |$$

$$= \sum_{i=1}^{1992}\sum_{k=1}^{1992} \frac{i}{k(k+1)} | x_i - x_{i+1} |$$

$$= \sum_{i=1}^{1992} i \cdot \left[\frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} + \cdots + \frac{1}{1992 \cdot 1993}\right] \cdot | x_i - x_{i+1} |$$

$$= \sum_{i=1}^{1992} i \cdot \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{1993}\right) \cdot | x_i - x_{i+1} | \leqslant \sum_{i=1}^{1992}\left(1 - \frac{1}{1993}\right) \cdot | x_i - x_{i+1} |$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1993}\right) \cdot \sum_{i=1}^{1992} | x_i - x_{i+1} | = \left(1 - \frac{1}{1993}\right) \cdot 1993 = 1992.$$

另一方面,若 $x_1 = t + 1993, x_2 = x_3 = \cdots = x_{1993} = t$,则

$$| y_k - y_{k+1} | = \frac{i}{k(k+1)} \cdot | x_1 - x_2 | = \frac{1993}{k(k+1)},$$

$$\sum_{k=1}^{1992} | y_k - y_{k+1} | = 1993 \cdot \sum_{k=1}^{1992} \frac{1}{k(k+1)} = 1992.$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{1992} | y_k - y_{k+1} |$ 的最大值为 1992.

2. 注意各种方法的综合运用

例 14 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{1997}$ 满足如下两个条件:

(1) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x_i \leqslant \sqrt{3} (i = 1,2,\cdots,1997)$;

(2) $x_1 + x_2 + \cdots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$.

试求:$x_1^{12} + x_2^{12} + \cdots + x_{1997}^{12}$ 的最大值,并说明理由. (CMO - 12 试题)

解 满足题设条件的任何一组 $x_1, x_2, \cdots, x_{1997}$ 之中,若有这样的 x_i 和 x_j:$\sqrt{3} > x_i \geqslant x_j > -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

记 $x_i + x_j = 2m, x_i - x_j = 2h$,则

$x_i = m + h, x_j = m - h$.

$$x_i^{12} + x_j^{12} = (m+h)^{12} + (m-h)^{12} = 2\sum_{0 \leqslant k = 2l \leqslant 12} C_{12}^k \cdot m^{12-k} \cdot h^k.$$

在和值 $x_i + x_j = 2m$ 不变的情况下,$x_i^{12} + x_j^{12}$ 随 $h > 0$ 的增大而增大.约定取

$$h = \min\left\{\sqrt{3} - m, m - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\},$$

则 $x_i^{12} + x_j^{12}$ 达到最大值.

因此,所求的 12 次方幂和的最大值只能在以下情形达到:至多只有一个变元取值

于$(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3})$，其余变元取值都是$\sqrt{3}$或$-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

设有u个变元取值为$-\frac{1}{\sqrt{3}}$，v个变元取值为$\sqrt{3}$，w个变元值取值于$(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3})$. 显然$w=0$或1.

当$w=1$时，设这个变元的取值为t. 于是，有

$$\begin{cases} u+v+w=1997, & ① \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot u+\sqrt{3}v+tw=-318\sqrt{3}. & ② \end{cases}$$

由②$\cdot\sqrt{3}$+①得$4v+(\sqrt{3}t+1)w=1043$.

因为$(\sqrt{3}t+1)w=1043-4v$是整数，并且$0\leqslant(\sqrt{3}t+1)w<4$，

所以，$(\sqrt{3}t+1)w$是1043除以4所得的余数.

由此，得$w=1,t=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

代入①和②，解得$u=1736,v=260$.

因此，$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$的最大值为

$$(-\frac{1}{\sqrt{3}})^{12}\cdot u+(\sqrt{3})^{12}\cdot v+t^{12}=\frac{1736+4096}{729}+729\cdot 260=189548.$$

例15 m个互不相同的正偶数与n个互不相同的正奇数的总和为1987. 对于所有这样的m和n，$3m+4n$的最大值是多少?请证明你的结论. （CMO－2试题）

证明 设$a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+b_2+\cdots+b_n=1987$，其中$a_i(1\leqslant i\leqslant m)$是互不相同的正偶数，$b_j(1\leqslant j\leqslant n)$是互不相同的正奇数.

显然，n一定是奇数，且

$a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant 2+4+\cdots+2m=m(m+1)$,

$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

所以，$m^2+m+n^2\leqslant 1987$，其中n为奇数.

此式等价于$(m+\frac{1}{2})^2+n^2\leqslant 1987+\frac{1}{4}$.

由柯西不等式，有

$$3(m+\frac{1}{2})+4n\leqslant\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{(m+\frac{1}{2})^2+n^2}\leqslant 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}},$$

即 $3m+4n\leqslant 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}$.

因 $3m+4n$ 是整数,所以

$3m+4n \leqslant [5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}]$,即 $3m+4n \leqslant 221$.

易证,方程 $3m+4n=221$ 的整数解的一般形式是

$$\begin{cases} m=71-4k, \\ n=2+3k(k\text{ 是整数}). \end{cases} \quad ①$$

因为 n 是奇数,所以①式中的 k 必须是奇数,设 $k=2t+1$,t 是整数,则

$$\begin{cases} m=67-8t, \\ n=5+6t(t\text{ 是整数}). \end{cases} \quad ②$$

因为 $m^2,n^2 \leqslant 1987$,所以 $m,n \leqslant [\sqrt{1987}]=44$.

代入②中,得出 $3 \leqslant t \leqslant 6$.

用 $t=3,4,5,6$ 分别代入②式可知,(m,n) 只能是(43,23),(35,29),(27,35) 及(19,41) 四组值.

不难验证(43,23),(35,29),(19,41) 三组值不满足关系 $m(m+1)+n^2 \leqslant 1987$.

对于(27,35),由于 $27(27+1)+35^2=1981<1987$,

所以适当选取 27 个正偶数和 35 个正奇数的值,就可使这些数的和恰为 1987.

例如,由 $2+4+\cdots+54+1+3+\cdots+67+69=1981$,

则 $2+4+\cdots+54+1+3+\cdots+67+75=1987$.

综上讨论,$3m+4n$ 的最大值是221,而且只能在 $m=27,n=35$时,才能达到最大值.

3. 注意运用阿贝尔变换及其证明方法

阿贝尔变换 对数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$,记 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$,$k=1,2,\cdots,n$,并记 $S_0=0$,则有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=S_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})$.

事实上,由 $a_k=S_k-S_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$ 知

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k &= \sum_{k=1}^{n}(S_k-S_{k-1})b_k=\sum_{k=1}^{n}S_kb_k-\sum_{k=1}^{n}S_{k-1}b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}S_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_kb_{k+1}=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1}).\end{aligned}$$

例 16 见例 6.

解 易得 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 的最小值为 1(诸 x_i 中一个为 1,而其余全为 0 时达到).为求最大值,注意到

$$1=\sum_{i=1}^{n}i\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)^2+2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}k\left(\frac{x_k}{\sqrt{k}}\cdot\frac{x_j}{\sqrt{j}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{x_k}{\sqrt{k}}\left(\frac{x_k}{\sqrt{k}}+2\sum_{i=k+1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{x_k}{\sqrt{k}}\left(\sum_{i=k}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\left(\sum_{i=k}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}-\sum_{i=k+1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)\cdot\left(\sum_{i=k}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right),$$

若令 $y_i=\sum_{j=i}^{n}\frac{x_j}{\sqrt{j}},i=1,2,\cdots,n$,则诸 $y_i\geqslant 0$.

逆用阿贝尔变换的证明方法可将条件化为$\sum_{i=1}^{n}y_i^2=1$.

再由 $y_i=\sum_{j=i}^{n}\frac{x_j}{\sqrt{j}},i=1,2,\cdots,n$,有

$x_n=\sqrt{n}y_n,x_i=\sqrt{i}(y_i-y_{i+1}),i=1,2,\cdots,n-1.$

记 $y_{n+1}=0$,故有$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}(y_i-y_{i+1})=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})y_i$.

利用柯西不等式可得$\sum_{i=1}^{n}x_i$ 的最大值为

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})^2}\left(\text{当 } x_i=\frac{2i-\sqrt{i^2+i}-\sqrt{i^2-i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}-\sqrt{i-1})^2}},i=1,2,\cdots,n\text{ 时达到}\right).$$

例 17 实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2001}$ 满足$\sum_{k=1}^{2000}|x_k-x_{k+1}|=2001$,令 $y_k=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k),k=1,2,\cdots,2001$.求$\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|$的最大可能值. (2001 年上海市竞赛题)

解 由于不知 x_k 和 x_{k+1} 的大小关系,可将差 x_k-x_{k+1} 视为整体,将条件$\sum_{k=1}^{2000}|x_k-x_{k+1}|=2001$ 视为关于 x_k-x_{k+1} 的一个约束关系.作代换 $a_0=x_1,a_k=x_{k+1}-x_k,k=1,2,\cdots,2000$,则 $x_1=a_0,x_k=\sum_{i=0}^{k-1}a_i,k=2,3,\cdots,2001$,条件即为$\sum_{k=1}^{2000}|a_k|=2001$.此时

$$y_k=\frac{1}{k}\left[a_0+(a_0+a_1)+\cdots+\sum_{i=0}^{k-1}a_i\right]=\frac{1}{k}[ka_0+(k-1)a_1+\cdots+a_{k-1}],$$

$$y_{k+1}=\frac{1}{k+1}[(k+1)a_0+ka_1+\cdots+2a_{k-1}+a_k],\text{则}$$

$$|y_k-y_{k+1}|=\frac{1}{k(k+1)}|-a_1-2a_2-\cdots-ka_k|$$

$$\leqslant \frac{1}{k(k+1)}(|a_1|+2|a_2|+\cdots+k|a_k|).$$

记 $A_k=|a_1|+2|a_2|+\cdots+k|a_k|,k=1,2,\cdots,2000,A_0=0$,则

$$\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|\leqslant\sum_{k=1}^{2000}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)A_k$$

$$=\sum_{k=1}^{2000}\frac{1}{k}(A_k-A_{k-1})-\frac{1}{2001}\cdot A_{2000}$$

$$=\sum_{k=1}^{2000}|a_k|-\frac{1}{2001}\cdot A_{2000}.$$

又 $A_{2000}=|a_1|+2|a_2|+\cdots+2000\cdot|a_{2000}|\geqslant\sum_{k=1}^{2000}|a_k|$,故

$$\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|\leqslant\sum_{k=1}^{2000}|a_k|-\frac{1}{2001}\cdot\sum_{k=1}^{2000}|a_k|=\frac{2000}{2001}\cdot\sum_{k=1}^{2000}|a_k|=2000.$$

由上述过程知,当且仅当 $|a_1|=2001,a_2=a_3=\cdots=a_{2000}=0$ 时等号成立.故所求最大值为2000.

4. 引入参量运用著名不等式求解

例18 设 x,y,z 是不全为0的实数,求 $f(x,y,z)=\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

解法1 注意到平均值不等式,并引入两个参变量 $\lambda_1,\lambda_2>0$,有

$$xy+2yz\leqslant\frac{1}{2}\left(\lambda_1x^2+\frac{1}{\lambda_1}y^2\right)+\left(\lambda_2y^2+\frac{1}{\lambda_2}z^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lambda_1x^2+\left(\frac{1}{2\lambda_1}+\lambda_2\right)y^2+\frac{1}{\lambda_2}z^2.$$

令 $\frac{1}{2}\lambda_1=\frac{1}{2\lambda_1}+\lambda_2=\frac{1}{\lambda_2}$,求得 $\lambda_1=\sqrt{5},\lambda_2=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故 $f(x,y,z)=\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 为所求.

解法2 注意到引入参量 $\lambda>0$ 并运用平均值不等式,有

$$x^2+y^2+z^2=x^2+\lambda y^2+(1-\lambda)y^2+z^2\geqslant2\sqrt{\lambda}xy+2\sqrt{1-\lambda}yz.$$

令 $\dfrac{2\sqrt{1-\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}=2$,求得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$.

故 $f(x,y,z)=\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\dfrac{xy+2yz}{2\sqrt{\frac{1}{5}}xy+4\sqrt{\frac{1}{5}}yz}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 为所求.

【模拟实战】

习题 A

1. 若 $2x^2+3xy+2y^2=1$，求 $f(x,y)=x+y+xy$ 的最小值.
2. 已知 $-1\leqslant 2x+y-z\leqslant 8, 2\leqslant x-y+z\leqslant 9, -3\leqslant x+2y-z\leqslant 7$. 求函数 $f(x,y,z)=7x+5y-2z$ 的最大值和最小值.
3. 设 $P(x,y)$ 为 $|5x+y|+|5x-y|=20$ 上的一点，求 x^2-xy+y^2 的最大、最小值.
(1993 年澳门竞赛题)
4. 设 x,y,z 为正数，且 $x^2+y^2+z^2=1$，试求下列表达式的最小值：
$$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$$
(第 22 届全苏奥林匹克题)
5. 设 a 与 d 是非负数，b 与 c 是正数，并且 $b+c\geqslant a+d$，试求下式的最小值：
$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}.$$
(第 22 届全苏奥林匹克题)

习题 B

1. 给定 $k\in\mathbf{N}$ 及实数 $a>0$，设 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 满足下列条件 $k_1+k_2+\cdots+k_r=k$，$k_i\in\mathbf{N}, 1\leqslant r\leqslant k$，求 $a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的最大值. (CMO－8 试题)
2. 设 x,y 是正数，S 是 $x, y+\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ 中最小的数，求 S 的最大可能值. x,y 取何值时能达到最大值？
(第 6 届全苏奥林匹克题)
3. n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之和等于 1，设 S 是下列各数中最大的数：$\frac{x_1}{1+x_1},\frac{x_2}{1+x_1+x_2},\cdots,\frac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}$. 求 S 的最小可能值，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取何值时能达到最小值？
(第 6 届全苏奥林匹克题)
4. k 是一个实数，对于任意实数 x，令 $f(x)=\frac{x^4+kx^2+1}{x^4+x^2+1}$.
(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.
(2) 求所有实数 k，使得对每三个实数 a,b 和 c，存在一个三角形，具有边长 $f(a)$，$f(b)$ 和 $f(c)$.
(1994 年保加利亚奥林匹克题)

第五章　无理函数最(极)值的求解

【基础知识】

无理函数一般是多层次复合函数,由幂函数与其他各类函数或复合函数再复合而成.因而,它联系着幂函数,而幂函数是一类特殊的上凸函数;它联系着解析几何中的两点间距离公式,而距离公式是解析几何的重要内容之一;它联系着柯西不等式的根式形式,而柯西不等式是求解不等式的重要工具;它联系着平方公式,而平方公式中有重要的三角公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,… 它还联系着数学各学科的知识.因此,求解无理函数最(极)值问题,也需要有较强的灵活变更问题的能力和较高的解题技巧.

【典型例题与基本方法】

1. 凸函数方法

例 1　已知 $x_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=m$, $p,q\in\mathbf{R}^+$, $2\leqslant k\in\mathbf{N}^+$.求函数

$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[k]{px_i+q}$ 的最大值.

解　由于函数 $y=\sqrt[k]{x}$ $(k\geqslant 2)$ 为上凸函数,则有

$$\frac{\sqrt[k]{x_1}+\sqrt[k]{x_2}+\cdots+\sqrt[k]{x_n}}{n}\leqslant\sqrt[k]{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}},\qquad(5-1)$$

其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

于是　$\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[k]{px_i+q}\leqslant n\sqrt[k]{\frac{1}{n}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(px_i+q)\right]}=\sqrt[k]{pmn^{k-1}+qn^{k}}$,

其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{m}{n}$ 时成立.

故　当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{m}{n}$ 时,$f(x)_{最大}=\sqrt[k]{pmn^{k-1}+qn^{k}}$.

例 2　若 $w=\sqrt{2p-q}+\sqrt{3q-2p}+\sqrt{6-2q}$,其中 p、q 是使 w 有意义的实数,试确定 w 的最大值.

解　考虑函数 $y=\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$上为上凸函数.而 $2p-q\geqslant 0,3q-2p\geqslant 0$,

$6-2q\geqslant 0$,且 $2p-q$,$3q-2p$,$6-2q$ 在 $[0,+\infty)$ 内,其和为定值 6,则当

$2p-q=3q-2p=6-2q=\frac{6}{3}=2$ 时,

亦即 $p=q=2$ 时,w 取到最大值,即

$$w_{最大}=3\sqrt{\frac{1}{3}[(2p-q)+(3q-2p)+(6-2q)}=3\sqrt{2}.$$

2. 解析几何方法

例 3 求以实数 x,y 为自变量的函数 $u(x,y)=x^2+\frac{81}{x^2}-2xy+\frac{18}{x}\sqrt{2-y^2}$ 的最小值.

(1991 年"希望杯"邀请赛题)

解 $u(x,y)=x^2+\frac{81}{x^2}-2xy+\frac{18}{x}\sqrt{2-y^2}=(x-y)^2+(\frac{9}{x}+\sqrt{2-y^2})^2-2$,

从上式,可考虑平面上点 $P_1(x,\frac{q}{x})$,$P_2(y,-\sqrt{2-y^2})$.当 $x\in\mathbf{R}$,$x\neq 0$ 时,P_1 的轨迹是以两条坐标轴为渐近线的双曲线;当 $y\in\mathbf{R}$,$|y|\leqslant\sqrt{2}$ 时,P_2 的轨迹是以原点为圆心,以$\sqrt{2}$ 为半径的圆的下半圆.由图象(图略)显见,$|P_1P_2|$ 的最小值为 $3\sqrt{2}-\sqrt{2}$.由此可得 $u(x,y)_{\min}=(3\sqrt{2}-\sqrt{2})^2-2=6$ 为所求.

注 此例稍作变化即为 1983 年美国普特南竞赛题:求 $f(u,v)=(u-v)^2+(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v})^2$ 的最小值.

例 4 求函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值.

(1992 年全国高中联赛题)

解 由于 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$

$$=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-2)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2},$$

若令 $A(3,2)$,$B(0,1)$,$P(x,x^2)$,则 $f(x)=|PA|-|PB|$.

于是,问题转化为在抛物线 $y=x^2$ 上求一点 P,使 $|PA|-|PB|$ 最大.

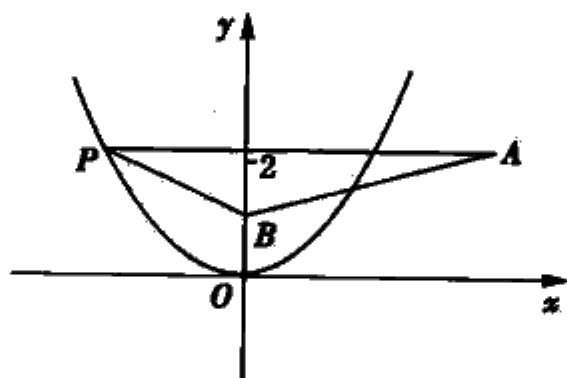


图 5-1

因点 A 在抛物线下方(处),点 B 在抛物线上方(内),故直线 AB 和抛物线必相交,交点由方程组 $\begin{cases}y=x^2\\ \frac{y-1}{x-0}=\frac{2-1}{3-0}\end{cases}$ 确定,消去 y 得 $3x^2-x-3=0$.

由于关于 x 的二次方程的常数项为负,则方程必有

负根.又三角形两边之差小于第三边,所以,当 P 点位于负根所对应的交点位置时,$f(x)$ 有最大值 $|AB|=\sqrt{10}$.

注 不必求出交点的坐标.从图中也可看到:

$g(x)=|PA|+|PB|$ 的最小值也为$\sqrt{10}$.

例5 当 x 为何实数时,函数 $f(x)=x^2-x+1+\sqrt{2x^4-18x^2+12x+68}$ 有最小值?最小值是多少?

解 由于

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-x+1+\sqrt{2x^4-18x^2+12x+68}\\&=x^2-x+1+\sqrt{2(x+3)^2+2(x^2-5)^2}\\&=x^2-x+1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+3)^2+(x^2-5)^2}\\&=\sqrt{2}\left[\frac{x^2-x+1}{\sqrt{2}}+\sqrt{(x+3)^2+(x^2-5)^2}\right].\end{aligned}$$

于是,上式可看成如下两个距离的和式:

抛物线 $y=x^2$ 上的动点 $P(x,x^2)$ 到直线 $y=x-1$ 的距离

$$|PQ|=\frac{|x-x^2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x^2-x+1|}{\sqrt{2}},$$

动点 $P(x,x^2)$ 到定点 $(-3,5)$ 的距离

$$|PM|=\sqrt{[x-(-3)]^2+(x^2-5)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(x^2-5)^2}.$$

如图5-2,当 $|PQ|+|PM|$ 的值最小时,M,P,Q 三点共线,此直线就是过 M 点且垂直于直线 $y=x-1$ 的直线 $l:y=-x+2$.

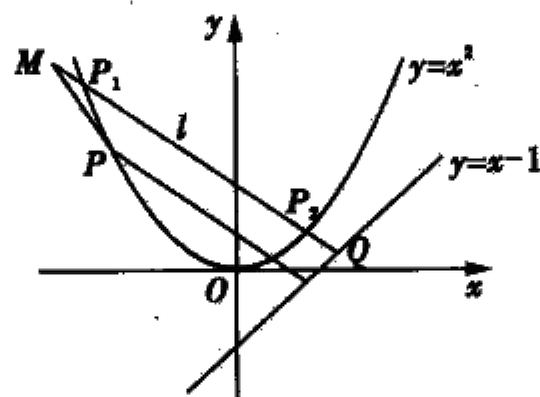


图5-2

从而,$|PQ|+|PM|$ 的最小值就是点 M 到直线 $y=x-1$ 的距离 $\left|\frac{-3-5-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|=\frac{9}{2}\sqrt{2}$.

此时,直线 $y=-x+2$ 与抛物线的交点 $P_1(-2,4)$,$P_2(1,1)$,故当 $x=-2$ 或 $x=1$ 时,函数 $f(x)$ 的最小值为

$$f(x)_{\min}=\sqrt{2}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{2}=9.$$

3. 换元法

例6 求函数 $f(x)=2x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域.

解法1 由于 $x^2-3x+2=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$,则可作代换

$$\sqrt{x^2-3x+2}=|x-\frac{3}{2}|-t\left(0<t\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

其中 t 的值确定. 由 $x^2-3x+2\geqslant 0$, 解得 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 1$, 而求得 $0<t\leqslant\frac{1}{2}$.

由 $\sqrt{|x-\frac{3}{2}|^2-\frac{1}{4}}=|x-\frac{3}{2}|-t$, 两边平方, 整理, 有

$$|x-\frac{3}{2}|=\frac{1+4t^2}{8t}(0<t\leqslant\frac{1}{2}).$$

于是, $f(x)=2x+\sqrt{x^2-3x+2}=2(x-\frac{3}{2})+3+(|x-\frac{3}{2}|-t)$.

当 $x\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}f(x)=g_1(t)&=2(x-\frac{3}{2})+3+(x-\frac{3}{2})-t\\&=3(x-\frac{3}{2})-t+3=3\cdot\frac{1+4t^2}{8t}-t+3\\&=\frac{1}{2}(t+\frac{\frac{3}{4}}{t})+3\geqslant\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot 2)+3\\&=4.\end{aligned}$$

其中等号当且仅当 $t=\frac{1}{2}$ 时取到.

当 $x\leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}f(x)=g_2(t)&=(x-\frac{3}{2})-t+3\\&=-\frac{1+4t^2}{8t}-t+3=-(\frac{1}{8t}+\frac{3}{2}t)+3\\&\leqslant-2\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}}+3=3-\frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

其中等号当且仅当 $t=\frac{1}{2\sqrt{3}}(t\in(0,\frac{1}{2}])$ 时取到.

故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,3-\frac{\sqrt{3}}{2}]\cup[4,+\infty)$.

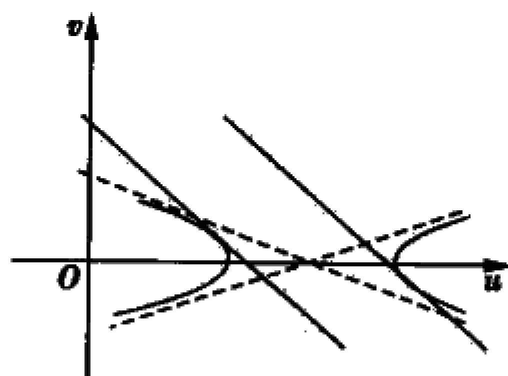


图 5-3

解法 2 令 $2x=u$, $\sqrt{x^2-3x+2}=v(v\geqslant 0)$,

则由 $\sqrt{x^2-3x+2}=v$ 两边平方, 并将 $x=\frac{u}{2}$ (由 $x^2-3x+2\geqslant 0$, 解得 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 1$, 有 $u\geqslant 4$ 或 $u\leqslant 2$) 代入, 整理得 $\frac{(u-3)^2}{4}-v^2=\frac{1}{\frac{1}{4}}$, 即

$$(u-3)^2-\frac{v^2}{\frac{1}{4}}=1(u\geqslant 4\text{ 或 }u\leqslant 2).\qquad (*)$$

于是,原问题变为在条件(*)下,求 $f(x)=g(u,v)=u+v$ 的值域,即求直线 $v=-u+g(u,v)$ 在条件(*)下的截距 $g(u,v)$ 的取值范围,如图5-3.当 $v=0$ 时,由(*)式可求得 $u=4$,此时 $g(u,v)=4$,由图知,$g(u,v)_{极小}=4$.

当 $v>0$ 且 $u\leqslant 2$ 时,将 $v=-u+g(u,v)=-u+k$ 代入①式,有 $3u^2+(6-8k)u+4k^2-8=0$,由其判别式

$\Delta=(6-8k)^2-4\cdot 3(4k^2-8)\geqslant 0$,求得 $k=g(u,v)\leqslant 3-\frac{\sqrt{3}}{2}$(舍去 $k\geqslant 3+\frac{\sqrt{3}}{2}$,因由图知不合题意).此时,$g(u,v)_{极大}=3-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup[4,+\infty)$

例7 设 $A>0,B>0,a<b$,求函数 $f(x)=A\sqrt{x-a}+B\sqrt{b-x}$ 的最值.

解 由 $x-a\geqslant 0$ 且 $b-x\geqslant 0$,求得其定义域为 $[a,b]$.

又由
$$f(x)=A\sqrt{x-a}+B\sqrt{b-x}=\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{b-a}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\sqrt{\frac{b-x}{b-a}}\right),$$

则可令 $\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\cos\beta=\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$,且 $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$,

即有 $\sin\alpha=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\sin\beta=\sqrt{\frac{b-x}{b-a}}$.

于是 $f(x)=g(\alpha,\beta)=\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{b-a}\cdot\cos(\beta-\alpha)$.

当 $\beta=\alpha$ 时,即 $\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$,求得 $x_1=\frac{A^2b+B^2a}{A^2+B^2}$.

由于 $x_1-a=\frac{A^2(b-a)}{A^2+B^2}>0,b-x_1=\frac{B^2(b-a)}{A^2+B^2}>0$,则 $x_1\in[a,b]$,

从而 $f(x)_{\max}=f(x_1)=\sqrt{(A^2+B^2)(b-a)}$.

又由 $-\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$,注意到余弦函数的取值范围,知

$f(x)_{\min}=\min\{f(a),f(b)\}$.

故所求 $f(x)_{\max}=\sqrt{(A^2+B^2)(b-a)},f(x)_{\min}=\min\{f(a),f(b)\}$. (5-2)

注 特别地,当 $a=0,b=1$ 时,有函数

$$f(x)=A\sqrt{x}+B\sqrt{1-x}(0\leqslant x\leqslant 1,A>0,B>0)$$

的 $f(x)_{\max}=\sqrt{A^2+B^2},f(x)_{\min}=\min\{A,B\}$. (5-3)

如上的(5-2)式,(5-3)式是非常有用的两个结论,利用它们可方便地解决有关问题(可参见习题A中第4、5题).

例8 求函数 $f(x)=2x+\sqrt{1+x-x^2}$ 的值域.

解 由于 $f(x)=2x+\sqrt{1+x-x^2}=2x+\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}$,

可令 $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\theta,\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,则 $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\theta$. 于是

$f(x)=g(\theta)=1+\sqrt{5}\sin\theta+\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\theta=1+\frac{5}{2}\sin(\theta+\varphi)$,其中 $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

因 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,知 $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$,

从而 $-\frac{2}{\sqrt{5}}\leqslant\sin(\theta+\varphi)\leqslant 1$,即 $1-\sqrt{5}\leqslant g(\theta)\leqslant\frac{7}{2}$.

故 $f(x)=2x+\sqrt{1+x-x^2}$ 的值域为 $[1-\sqrt{5},\frac{7}{2}]$.

注 对于圆锥型无理函数 $f(x)=mx+n+\sqrt{ax^2+bx+c}\quad(a^2+b^2\neq 0)$ 的值域,均可以运用换元或三角代换来求解.

(Ⅰ) 当 $a=0$ 时(为抛物线型),$f(x)=mx+n+\sqrt{bx+c}$,

令 $\sqrt{bx+c}=t$,则 $f(x)=g(t)=\frac{m}{b}t^2+t+(n-\frac{mc}{b})$.

然后由一次函数($m=0$ 时)或二次函数($m\neq 0$ 时)的知识来求得结果.

(Ⅱ) 当 $a<0$ 时(为椭圆型,如例8),当 $b^2-4ac>0$ 时,

令 $x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2b}\sin\theta,\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,则

$$f(x)=g(\theta)=-\frac{m\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sin\theta-\frac{\sqrt{-a}\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cos\theta+(n-\frac{mb}{2a}),$$

然后由 $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\theta+\varphi)$ 来求得结果.

(Ⅲ) 当 $a>0$ 时(为双曲线型,如例7),

(i) 当 $b^2-4ac<0$ 时,令 $x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\tan\theta,\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,

则 $f(x)=g(\theta)=\dfrac{m\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cdot\tan\theta+\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cdot\sec\theta+\left(n-\dfrac{bm}{2a}\right)$,

然后再利用三角知识求解.

(ii) 当 $b^2-4ac>0$,则令 $x=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sec\theta,\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,有

$f(x)=g(\theta)=\dfrac{m\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sec\theta+\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\tan\theta+\left(n-\dfrac{bm}{2a}\right)$,

然后再运用三角知识求解.

4. 其他方法

例 9 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,求函数

$f(x)=(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}+2)\cdot(\sqrt{1-x^2}+1)$ 的取值范围.

(2) 证明:当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,存在正数 β,使得不等式 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\leqslant 2-\dfrac{x^\alpha}{\beta}$,成立的最小正数 $\alpha=2$,并求此时的最小正数 β.

解 (1) 由 $1+x\geqslant 0$ 且 $1-x\geqslant 0$,有 $-1\leqslant x\leqslant 1$,也满足 $1-x^2\geqslant 0$,利用放缩法,有 $0<\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\leqslant\sqrt{1+x+\dfrac{x^2}{4}}+\sqrt{1-x+\dfrac{x^2}{4}}+2=4$,及 $1\leqslant\sqrt{1-x^2}+1\leqslant 2$,知 $0<f(x)\leqslant 8$,其中等号当且仅当 $x=0$ 时取得,故 $f(x)$ 的取值范围为 $(0,8]$.

(2) 对任何 $x\in[0,1]$,有恒等式

$(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)\cdot f(x)=-2x^2$.

于是,$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\dfrac{2x^2}{f(x)}\leqslant-\dfrac{x^2}{4}$.

以下证明,对 $0<\alpha<2$ 的数 α 及数 $\beta>0$,不等式

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\leqslant-\dfrac{x^\alpha}{\beta}(x\in[0,1])$ 不成立.

反之,即 $-\dfrac{2x^2}{f(x)}\leqslant-\dfrac{x^\alpha}{\beta}$, ①

亦即 $x^{2-\alpha}\geqslant\dfrac{f(x)}{2\beta}$ 成立.

因为 $2-\alpha>0$,令 $x\to 0$,得 $0\geqslant\dfrac{f(0)}{2\beta}$,

但 $f(0)=8$,这是不可能的.

这说明 $\alpha=2$ 是满足条件的最小正数.

求使不等式$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\leqslant-\frac{x^2}{\beta}(x\in[0,1])$，即$-\frac{2x^2}{f(x)}\leqslant-\frac{x^2}{\beta}$ ②

成立的最小的$\beta>0$，等价于求$\beta=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}\frac{1}{2}f(x)$.

因为，由柯西不等式，对于非负实数u,v有$\sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant\sqrt{2(u+v)}$.

令$u=1+x,v=1-x$，得$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\leqslant2$.

于是，当$x\in[0,1]$时，$\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)\leqslant 2(\sqrt{1-x^2}+1)\leqslant4$，而$\frac{1}{2}f(0)=4$. 因此，函数$\frac{1}{2}f(x)$在$[0,1]$上的最大值为4，即满足条件②的最小正数$\beta$等于4.

例 10 设$x,y\in\mathbf{R}^+$，求函数

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{y^2-3y+3}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}xy+y^2}$$的最小值.

解 由于题设的特殊结构形式，启引作特殊联想. 如图5－4(1)，考虑三面角$O-ABC$，使其侧棱OA,OB,OC两两夹角均为30°，在OA上取一点P，使$OP=\sqrt{3}$，过点P作一平面，分别交OB,OC于Q和R，设$OQ=x,OR=y$，则$\triangle PQR$的周长为$\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{y^2-3y+3}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}xy+y^2}$.

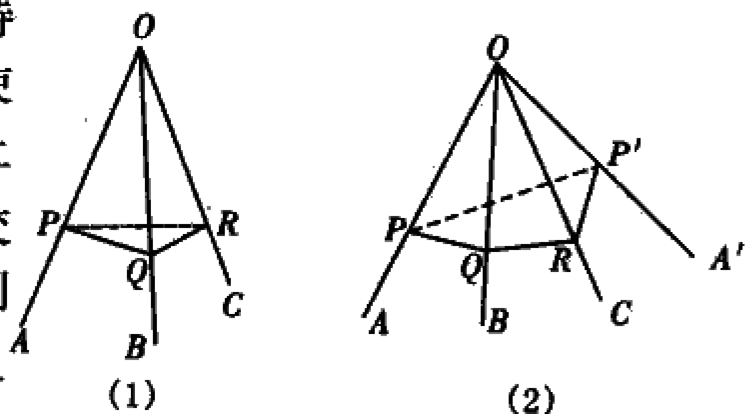


图5－4

于是，问题转化为求过点P的截口三角形的最小周长.

将此三面角沿棱OA展开，如图5－4(2)，则$\triangle PQR$的周长等于折线$PQRP'$的长. 显然，$PQ+QR+RP'\geqslant PP'$，再由$\angle AOA'=90°$及$OP=\sqrt{3}$知$PP'=\sqrt{6}$. 故所求代数式的最小值为$\sqrt{6}$.

【解题思维策略分析】

1. 关注函数表达式的等价变形

例 11 求函数$f(x)=\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}$的值域.

解 由$2x-1\geqslant0$且$x+3\geqslant0$得其定义域为$x\geqslant\frac{1}{2}$.

令$\sqrt{x+3}=t$，则$t\geqslant\frac{\sqrt{14}}{2}$，且$x=t^2-3$，于是

$$f(x)+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}\xrightarrow{\text{令}f(x)=y}\begin{cases}t\geqslant -y\\ t\geqslant \dfrac{\sqrt{14}}{2}\\ t^2-2yt-y^2-7=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(\text{Ⅰ})\begin{cases}t\geqslant \dfrac{\sqrt{14}}{2}\\ y\geqslant -\dfrac{\sqrt{14}}{2}\\ t^2-2yt-y^2-7=0\end{cases}\quad \text{或}(\text{Ⅱ})\begin{cases}t\geqslant -y,\\ y\leqslant -\dfrac{\sqrt{14}}{2},\\ t^2-2yt-y^2-7=0.\end{cases}$$

设 $g(t)=t^2-2yt-y^2-7$.

$$\text{解(Ⅰ)得}\quad \begin{cases}g(\dfrac{\sqrt{14}}{2})\leqslant 0\\ y\geqslant -\dfrac{\sqrt{14}}{2}\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ -\dfrac{b}{2a}=y\geqslant \dfrac{\sqrt{14}}{2},\\ y\geqslant -\dfrac{\sqrt{14}}{2}.\end{cases}$$

故 $y\geqslant -\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. 而解(Ⅱ)无解.

因此函数值域为 $[-\dfrac{\sqrt{14}}{2},+\infty)$.

2. 运用解析几何或平面几何知识求解

例 12 若 $x^2+y^2=25$，求函数 $f(x,y)=\sqrt{8y-6x+50}+\sqrt{8y+6x+50}$ 的最大值.

解 进行等价变形，有

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\sqrt{8y-6x+50}+\sqrt{8y+6x+50}\\&=\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}+\\&\quad\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}.\end{aligned}$$

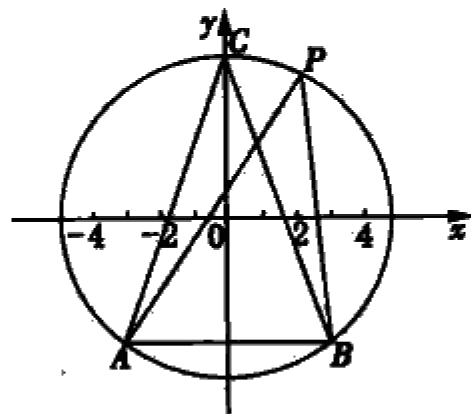


图 5－5

于是，$f(x,y)$ 就可看作圆 $x^2+y^2=25$ 上的点 $P(x,y)$ 到圆上两定点 $A(-3,-4)$，$B(3,-4)$ 的距离之和，或者看作定圆 $x^2+y^2=25$ 内以定弦 AB 为一边的内接三角形的周长减去定长 AB，如图 5－5. 欲求 $f(x,y)$ 的最大值，只须求内接三角形周长之最大值. 易知，当内接三角形为等腰三角形 ABC 时周长最大，这时 C 点坐标为 $(0,5)$ 故知

$$f(x,y)_{\text{最大}}=\sqrt{8\cdot 5+6\cdot 0+50}+\sqrt{8\cdot 5-6\cdot 0+50}$$

$= 6\sqrt{10}$.

3. 注意各种方法的灵活运用

例 13 求函数 $f(x) = \sqrt{10x - 9 - x^2} + \sqrt{68x - 256 - x^2}$ 的最大值.

解法 1 由 $10x - 9 - x^2 \geqslant 0$ 且 $68x - 256 - x^2 \geqslant 0$,求得其定义域为 $4 \leqslant x \leqslant 9$.

由于 $f(x) = \sqrt{10x - 9 - x^2} + \sqrt{68x - 256 - x^2}$

$= \sqrt{(x-1)(9-x)} + \sqrt{(64-x)(x-4)}$,

且 $(\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{64-x})^2 = 63$, $(\sqrt{9-x})^2 + (\sqrt{x-4})^2 = 5$.

则可令 $\sqrt{x-1} = \sqrt{63}\cos\alpha, \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$\sqrt{9-x} = \sqrt{5}\cos\beta, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

于是,$f(x) = g(\alpha,\beta) = \sqrt{63}\cdot\sqrt{5}(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta) = \sqrt{35}\cos(\alpha - \beta)$.

当 $\alpha = \beta$ 时,即 $\dfrac{x-1}{63} = \dfrac{9-x}{5}$,即 $x = \dfrac{143}{17} \in [4,9]$,

$f(x)$ 取得最大值 $3\sqrt{35}$.

解法 2 构造直角梯形 $ABCD$,使 $AB = \sqrt{x-1}$, $CD = \sqrt{x-4}$, $BC = BE + EC = \sqrt{64-x} + \sqrt{9-x}$,如图 5-6.

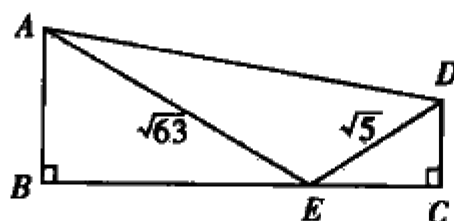


图 5-6

由 $S_{梯形ABCD} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDE} + S_{\triangle AED}$,知

$\frac{1}{2}(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4}).(\sqrt{64-x} + \sqrt{9-x})$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{64-x} + \frac{1}{2}\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-4} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\sqrt{63}\cdot\sin\angle AED$.

故 $f(x) = \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{9-x} + \sqrt{64-x}\cdot\sqrt{x-4} \leqslant \sqrt{63}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{35}$ 为所求.

解法 3 由柯西不等式,有

$f(x) = \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{9-x} + \sqrt{64-x}\cdot\sqrt{x-4}$

$\leqslant \sqrt{(x-1+64-x)\cdot(9-x+x-4)} = \sqrt{63\cdot 5} = 3\sqrt{35}$,

其中等号当且仅当 $\dfrac{x-1}{9-x} = \dfrac{64-x}{x-4}$,即 $x = \dfrac{143}{17} \in [4,9]$ 时成立.

故 $f(x)$ 的最大值为 $3\sqrt{35}$.

运用柯西不等式法,也可以看作为向量方法:$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|$.

例 14 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+2x+10}$ 的最小值.

解法 1 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,且由题设,知 $\sqrt{x^2+4}$,$\frac{1}{2}f(x)$,$\sqrt{x^2+2x+10}$ 成等差数列,故可令 $\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{2}f(x)-d$, ①

$$\sqrt{x^2+2x+10}=\frac{1}{2}f(x)+d, \quad ②$$

因为 $\sqrt{x^2+4}\geqslant 2$,$\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{(x+1)^2+9}\geqslant 3$,所以 $y\geqslant 5$,由 $②^2-①^2$,得 $x=d\cdot f(x)-3$. ③

又将③代入①,得 $4[f^2(x)-1]d^2+20\cdot f(x)\cdot d+52-f^2(x)=0$.

由 $\Delta=[20\cdot f(x)]^2-4\cdot 4[f^2(x)-1]\cdot[52-f^2(x)]\geqslant 0$,

得 $f^2(x)\geqslant 26$ 或 $f^2(x)\leqslant 2$(舍去).

所以 $f(x)\geqslant\sqrt{26}$. 当 $f(x)=26$ 时,$d=\frac{\sqrt{26}}{10}$,$x=-\frac{2}{5}\in\mathbf{R}$,符合条件,故 $f(x)_{\min}=\sqrt{26}$.

解法 2 欲求 $\sqrt{x^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}$ 的最小值,因 $x\in(-\infty,+\infty)$,则知 $-1<x<0$,从而知 $x+1=1-|x|$. 构作 Rt△ABC,使 $\angle B=90°$,$AB=2$,$BC=|x|$,构作 Rt△CDE,使 $\angle D=90°$,$CD=1-|x|$,$DE=3$,如图 5-7.

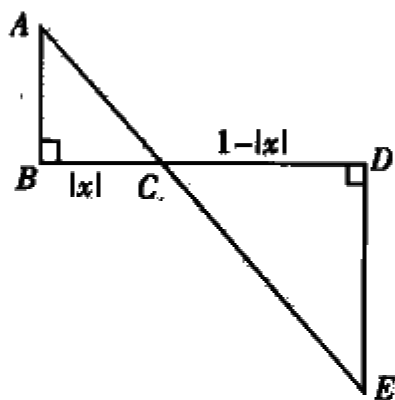


图 5-7

故 $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+2x+10}=AC+CE\geqslant AE$.

而 $AE=\sqrt{BD^2+(AB+DE)^2}=\sqrt{1+5^2}=\sqrt{26}$.

其中等号成立由 Rt△ABC ∽ Rt△EDC,求得 $|x|=\frac{2}{5}$,即 $x=-\frac{2}{5}$.

【模拟实战】

习题 A

1. 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-10x+34}$ 的最小值.

2. 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+10}+\sqrt{x^2-2x+10}$ 的最小值.

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+6x+10}+\sqrt{x^2-6x+10}$ 的最小值.

4. 求函数 $f(x)=\sqrt{4x^2-12x+8}+\sqrt{4+3x-x^2}$ 的最小值.

5. 求函数 $f(x)=\sqrt{mx-p}+\sqrt{q-nx}\left(m,n>0,\frac{p}{m}<\frac{q}{n}\right)$ 的最大值和最小值.

6. 求函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-2x}$ 的值域.

习题 B

1. 求函数 $f(x)=2x+3+\sqrt{-2x^2+12x-14}$ 的值域.

2. 若 $x\neq 0$,求 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2+x^4}-\sqrt{1+x^4}}{x}$ 的最大值.

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}x^4-2x^2-4x+13}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 的最小值.

4. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$ 为非负实数,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$,求函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sqrt{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\sqrt{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+\cdots+\sqrt{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}$$

的最值.

5. 求函数

$$f(x)=\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}+\sqrt{10-4\sqrt{3}\sin x-6\cos x}$$

的最小值.

6. 求函数 $f(x,y)=\sqrt{x+\frac{1}{2}}+\sqrt{y+\frac{1}{2}}$ 的值域,其中 $x+y=1$.

7. 求函数 $f(x)=x^2-x+1+\sqrt{2x^4-18x^2+12x+68}$ 的最小值.

8. 求函数 $f(x,y)=2x^2+y^2+2x(1-y)+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}(2x+2)+1$ 的最小值.

第六章　函数不动点及应用

【基础知识】

设 $f(x)$ 是一个关于 x 的代数函数,我们称方程 $f(x)=x$ 的根为函数 $f(x)$ 的不动点.讨论求解函数不动点及利用函数不动点求解问题是数学竞赛中的一类典型问题.

【典型例题与基本方法】

例 1　G 是形如 $f(x)=ax+b$(a 和 b 都是实数)的实变数 x 的非常数函数集,且 G 具有下列性质:

(1) 若 $f,g\in G$,则 $gof\in G$,其中定义 $(gof)(x)=g[f(x)]$.

(2) 若 $f\in G$ 且 $f(x)=ax+b$,则反函数 $f^{-1}(x)$ 也属于 G,这里 $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$.

(3) 对 G 中每个 f,存在一实数 x_f,使得 $f(x_f)=x_f$.

证明:总存在一个实数 k,对所有 $f\in G$ 有 $f(k)=k$.　　(IMO－15 试题)

分析　条件(3)表明,对每一个 $f\in G$,都有一个不动点 x_f 使 $f(x_f)=x_f$,最后我们要证明,集 G 中所有函数 f,必有一公共不动点 k.设 $f(x)=ax+b$ 的不动点为 x_f,即 $ax_f+b=x_f$.若 $a\neq 1$,则 $x_f=\dfrac{-b}{a-1}$ 是 f 的唯一不动点;若 $a=1$ 且 $b=0$,则任何实数都是 $f(x)$ 的不动点;若 $a=1$ 且 $b\neq 0$,则 f 的不动点不存在,这时 $f\notin G$.所以,只须证明,当 $f(x)=ax+b\,(a\neq 1)\in G$ 时,必有 $\dfrac{-b}{a-1}$ 为常数,这时取 $k=\dfrac{-b}{a-1}$,则对任何 $f\in G$,有 $f(k)=k$.

证明　首先证明,若 $g_1(x)=ax+b_1\in G$,$g_2(x)=ax+b_2\in G$,则 $b_1=b_2$.事实上,由性质(1),(2)有 $g_2^{-1}[g_1(x)]=\dfrac{(ax+b_1)-b_2}{a}=x+\dfrac{b_1-b_2}{a}\in G$,由(3)知 $g_2^{-1}[g_1(x)]$ 存在不动点,故 $b_1=b_2$.

其次,对形如 $h(x)=x+b$ 的函数,当 $b\neq 0$ 时,$h(x)\notin G$;当 $b=0$ 时,对任何实数 k,有 $h(k)=k$.故只须考虑 G 中形如 $f(x)=ax+b\,(a\neq 1)$ 的函数.

设 $f_1(x)=a_1x+b_1\,(a_1\neq 1)\in G$,$f_2(x)=a_2x+b_2\,(a_2\neq 1)\in G$,由性质(1)

得 $f_1[f_2(x)] = a_1(a_2x + b_2) + b_1 = a_1a_2x + a_1b_2 + b_1 \in G$,

$f_2[f_1(x)] = a_2(a_1x + b_1) + b_2 = a_1a_2x + a_2b_1 + b_2 \in G$.

由前面证明便有 $a_1b_2 + b_1 = a_2b_1 + b_2$，即$\frac{-b_1}{a_1-1} = \frac{-b_2}{a_2-1}$，这表明对任何$f(x) = ax + b(a \neq 1) \in G$，$\frac{-b}{a-1}$是常数，取 $k = \frac{-b}{a-1}$，则$f(k) = f\left(\frac{-b}{a-1}\right) = a\left(\frac{-b}{a-1}\right) + b = \frac{-b}{a-1} = k$，即知题中结论成立.

例 2 设$\{f(n)\}$是取正整数值的严格递增序列.已知 $f(2) = 2$，当 m, n 互质时，$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$，求证：$f(n) = n$. （第 24 届普特南 A－2）

分析 此例是在题设条件下证 $f(n)$ 取自然数 $n(\geqslant 2)$ 时均为不动点.

证明 由 $f(3) \cdot f(7) = f(21) < f(22) = f(2) \cdot f(11) = 2 \cdot f(11) < 2 \cdot f(14) = 2 \cdot f(2) \cdot f(7) = 4 \cdot f(7)$，从而有 $f(3) < 4$.

但 $f(3) > f(2) = 2$，于是 $f(3) = 3$.

若原命题不真，假设 $f(n) \neq n$ 的最小正整数 n 为 $n_0 \geqslant 4$，即 $f(2) = 2, f(3) = 3, \cdots, f(n_0 - 1) = n_0 - 1, f(n_0) \neq n_0$. ①

因为 $f(n_0) > f(n_0 - 1) = n_0 - 1$，故只能 $f(n_0) > n_0$.又$\{f(n)\}$是严格增加的，故当 $n \geqslant n_0$ 时，$f(n) > n$. ②

下面分两种情况讨论：

(i) 当 n_0 是奇数时，则 2 和 $n_0 - 2$ 互素，故 $f[2(n_0 - 2)] = f(2) \cdot f(n_0 - 2)$，由①式有 $f(2) = 2, f(n_0 - 2) = n_0 - 2$，故 $f[2(n_0 - 2)] = 2(n_0 - 2)$. ③

又因 $n_0 \geqslant 4$，故 $2(n_0 - 2) \geqslant n_0$，从而③式与②式矛盾.

(ii) 当 n_0 是偶数时，则 2 和 $n_0 - 1$ 互素，故同理有

$f[2(n_0 - 1)] = f(2) \cdot f(n_0 - 1) = 2(n_0 - 1)$. ④

又因 $n_0 \geqslant 4$，故 $2(n_0 - 1) \geqslant n_0$，从而④式与②式矛盾.

综上所述，无论如何，②不能成立，证毕.

例 3 设$f(x)$是对任何一个实系数多项式 $g(x)$ 都成立等式$f[g(x)] = g[f(x)]$的实系数多项式.试确定并证明 $f(x)$ 所应具有的性质. （第 21 届普特南 A－5）

略解 设 g 为一常数函数，例如 $g(x) \equiv a$，则$f[g(x)] = g[f(x)]$化为$f(a) = a$.由于 a 可取任意实数，则有 $f(x) = x$，故 $f(x)$ 为恒等多项式函数，定义域为其不动点集.

【解题思维策略分析】

1. 利用 $f(x)$ 的不动点解方程

若 a,b 是二次函数 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 的两个不动点，则 a,b 也是四次函数 $f[f(x)]=A(Ax^2+Bx+C)^2+B(Ax^2+Bx+C)+C$ 的两个不动点.

事实上，根据题设，可由 $Aa^2+Ba+C=a,Ab^2+Bb+C=b$ 消去 B,C 可得

$f(x)=x+A(x-a)(x-b)$，于是

$$\begin{aligned}f[f(x)]-x&=f(x)+A[f(x)-a][f(x)-b]-x\\&=A(x-a)(x-b)+A[x+A(x-a)(x-b)-a]\cdot\\&\quad[x+A(x-a)(x-b)-b]\\&=A(x-a)(x-b)\cdot\{1+[1+A(x-a)]\cdot[1+A(x-a)]\}.\end{aligned}$$

故 a,b 是 $f[f(x)]$ 的两个不动点.

从上面的证明中也可以看出：$f[f(x)]$ 的另两个不动点由方程 $1+[1+A(x-b)][1+A(x-a)]=0$ 给出.

例 4 解方程 $y^4-6y^3+10y^2-4y=0$.

解 原方程可变形为 $(y^2-3y+2)^2-3(y^2-3y+2)+2-y=0$. 令 $f(y)=y^2-3y+2$，则 $f(y)$ 的两个不动点分别是 $2+\sqrt{2}$ 和 $2-\sqrt{2}$. 于是 $2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}$ 也是 $f[f(y)]$ 的两个不动点，又 $f[f(y)]$ 的另两个不动点由 $1+[1+(y-2+\sqrt{2})][1+(y-2-\sqrt{2})]=0$，即 $y^2-2y=0$，求得为 0 和 2，故所求方程的四个根分别为 $2+\sqrt{2}$，$2-\sqrt{2}$，0，2.

以此例可以看出：对于一元代数方程 $g(x)=0$，可转化为同解方程 $f(x)-x=g(x)=0$，求得 $f(x)$ 的不动点，即求得 $g(x)=0$ 的根.

运用牛顿切线法来求解高于四次的一元代数方程、无理方程、超越方程等的近似根就是基于上述道理.

运用牛顿切线法求 $g(x)=0$ 的近似根时，是先适当选取一个数 x_0，作出 $x_1=x_0-\dfrac{g(x_0)}{g'(x_0)}$，$x_2=x_1-\dfrac{g(x_1)}{g'(x_1)}$，$x_3=x_2-\dfrac{g(x_2)}{g'(x_2)}$，…得到一串逼近方程根的数列 $\{x_i\}$，$i=1,2,\cdots$（其中，$g'(x)$ 为 $g(x)$ 的导函数）. 再根据实际需要，可求得某一个 x_i 就够了. 例如，解方程 $e^{-\frac{x}{4}}(2-x)-1=0$，作图知 $g(x)=e^{-\frac{x}{4}}(2-x)-1$ 在 $(0,1)$ 上有一个零点，用牛顿切线法求这零点的近似值时，可取 $x_0=3$，有

$$x_1=x_0-\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}=-1.155999,x_2=x_1-\frac{g(x_1)}{g'(x_1)}=0.189433,x_3=x_2-\frac{g(x_2)}{g'(x_2)}=$$

0.714043.

还可根据实际需要求得更精确的值 x_i，满足 $f(x_i)-x_i=g(x_i)\approx 0$.因而，利用 $f(x)$ 的不动点来求方程 $g(x)=0$ 的近似根的牛顿切线法给计算机运算（解方程）带来了极大的方便.

2. 利用 $f(x)$ 的不动点求函数（或多项式）解析式

例 5 试确定符合下列条件的所有多项式 $p(x)$：

$p(x^2+1)=[p(x)]^2+1, p(0)=0.$ （第 32 届普特南 A－2）

解 由题设有 $p(0)=0, p(1)=[p(0)]^2+1=1, p(2)=[p(1)]^2+1=1$, $p(5)=[p(2)]^2+1=5, p(5^2+1)=[p(5)]^2+1=26,\cdots$

即 $p(x)$ 有无限多个不动点 $0,1,2,5,26,\cdots$ 又 $p(x)$ 是多项式，故方程 $p(x)-x=0$ 是代数方程.而一元 n 次代数方程只有 n 个根，故

$p(x)-x\equiv 0$，即 $p(x)=x$.

另一方面，$p(x)=0$ 满足 $p(0)=0$ 及 $p(x^2+1)=[p(x)]^2+1$，故 $p(x)=x$ 为所求的唯一多项式.

例 6 求出所有的函数 f，它的定义域为一切正实数，并且函数值为正实数，满足下述条件：(1) $f[xf(y)]=yf(x)$，对任意 $x,y\in\mathbf{R}^+$；(2) 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$.

（IMO－24 试题）

分析 当 $x=y>0$ 时，有 $f[xf(x)]=xf(x)$，知 $xf(x)$ 为其不动点.

解 首先证 $x=1$ 是 $f(x)$ 的不动点，即 $f(1)=1$.在条件(1)中取 $x=1, y=\frac{1}{f(1)}$, $f[1\cdot f(\frac{1}{f(1)})]=\frac{1}{f(1)}f(1)=1$. ①

再在条件(1)中取 $y=1, x=\frac{1}{f(1)}$ 得 $f[\frac{1}{f(1)}\cdot f(1)]=1\cdot f(\frac{1}{f(1)})$，即 $f(1)=f\left(\frac{1}{f(1)}\right)$. ②

比较①、②两式得 $f[f(1)]=1$.

又在条件(1)中，令 $x=1, y=1$，得

$f[1\cdot f(1)]=1\cdot f(1)$，故 $f(1)=1$.

再证 $x=1$ 是唯一的不动点.

设 $x=a$ 是不动点，即有 $f(a)=a$.

(i) 当 $a>1$ 时，则 $f(a^n)=f(a^{n-1}\cdot a)=f[a^{n-1}\cdot f(a)]=af(a^{n-1})$
$=a\cdot f(a^{n-2}\cdot a)=a\cdot f[a^{n-2}\cdot f(a)]=\cdots=a^n$,

即 $x=a^n$ 也是不动点.而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a^n)=\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty$，这与条件(2)矛盾，知 $a>1$ 不可能.

(ii) 当 $0<a<1$ 时,因 $f(1)=f(\frac{1}{a}\cdot a)=f[\frac{1}{a}f(a)]=a\cdot f(\frac{1}{a})=1$,则 $f(\frac{1}{a})=\frac{1}{a}$,即 $x=\frac{1}{a}$ 也是不动点.而$\frac{1}{a}>1$,这又回到了(i)的情形.

综合(i),(ii)可得,$a=1$ 即 $x=1$ 是唯一的不动点.

最后令 $x=y$,由已知条件(1)得 $f[xf(x)]=xf(x)$,即对任意 $x>0$,$xf(x)$ 是不动点,而 $x=1$ 是唯一不动点,所以 $xf(x)\equiv 1$,即 $f(x)=\frac{1}{x}$.

在求解 n 次迭代函数的解析式时,利用不动点可带来很大的方便.

设 $f(x)$ 是定义在集合 M 上并取值于 M 的函数,记 $f^{(0)}(x)=x$,$f^{(1)}(x)=f(x)$,$f^{(n)}(x)=f(f^{(n-1)}(x))$,则称 $f^{(n)}(x)$ 是函数 $f(x)$ 的 n 次迭代(或复合).显然,若 $f(x)=x+a$,则 $f^{(n)}(x)=x+na$;若 $f(x)=ax$,则 $f^{(n)}(x)=a^nx$;若 $f(x)=ax^2$,则 $f^{(n)}(x)=a^{2^n-1}\cdot x^{2^n}$;若 $f(x)=ax^3$,则 $f^{(n)}(x)=a^{\frac{1}{2}(3^n-1)}x^{3^n}$ 等等.但是,大多数函数的 n 次迭代是不能轻而易举地写出的,下面我们给出的几个定理是有助于克服这一困难的.

定理 1 一次函数 $f(x)=ax+b(a\neq 1)$ 的不动点是$\frac{b}{1-a}$,则 $f(x)$ 的 n 次迭代函数的解析式可用 $f(x)$ 的不动点表示,即 $f^{(n)}(x)=a^n(x-\frac{b}{1-a})+\frac{b}{1-a}$.

此定理可用数学归纳法证明(证略).

例 7 已知 $f(f(f(x)))=8x+7$,求一次实系数函数 $f(x)$.(1979 年安徽竞赛题)

解 设一次实系数函数 $f(x)=ax+b(a\neq 1,a,b\in\mathbf{R})$,则

$$a^3(x-\frac{b}{1-a})+\frac{b}{1-a}=8x+7,$$

即有
$$\begin{cases}a^3=8\\ \frac{(a^3-1)b}{1-a}=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$$

故所求一次实数系函数为 $f(x)=2x+1$.

在定理 1 中,令 $x_0=\frac{b}{1-a}$,则有 $f^{(n)}(x)=a^n(x-x_0)+x_0=\varphi^{-1}\circ g^{(n)}\circ\varphi(x)$.(其中 $\varphi(x)=x-x_0$,$g(x)=ax$,$g^{(n)}(x)=a^nx$,且"$\circ$"表示函数复合运算.)

由此,对于给定的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$,若存在一个可逆函数 $\varphi(x)$ 使得 $f(x)=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi(x)$,则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 关于桥函数 $\varphi(x)$ 相似,记为 $f\overset{\varphi}{\sim}g$.

此时,由 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$ 有 $\varphi(f(x))=g(\varphi(x))$,那么 $\varphi(x_0)=\varphi(f(x_0)=$

$g(\varphi(x_0))$，即 $\varphi(x_0)$ 是 $g(x)$ 的不动点，这说明桥函数 φ 具有性质：它将 f 的不动点 x_0 映射成为 g 的不动点 $\varphi(x_0)$.

通常为了便于计算 $g^{(n)}(x)$，$g(x)$ 常取为 $ax, x+a, ax^2, ax^3$ 等等，这时 $g(x)$ 的不动点为 0 或 ∞. 因此，在桥函数 φ 的映射下，最好将 f 的不动点变为 0 或 ∞. 因此，若 $f(x)$ 只有唯一不动点 x_0 时，则可考虑取 $\varphi(x)=x-x_0$（或 $\frac{1}{x-x_0}$），这时，$\varphi(x_0)=0$（或 ∞）；若 $f(x)$ 有两个不同不动点 x_1, x_2，则可考虑取 $\varphi(x)=\frac{x-x_1}{x-x_2}$，这时 $\varphi(x_1)=0, \varphi(x_2)=\infty$，于是，定理 1 则可加强且叙述为

定理 2　一次函数 $f(x)=ax+b(a\neq 1)$，若取 $\varphi(x)=x-x_0, g(x)=ax$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的不动点，且 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$.

类似地我们可得如下一系列定理和推论：

定理 3　二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，若取 $g(x)=ax^2, \varphi(x)=x-x_0$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow x_0=-\frac{b}{2a}$ 且 x_0 是 $f(x)$ 的一个不动点，及 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$.

定理 4　一次分式函数 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$.

(1) 若取 $\varphi(x)=\frac{x-x_1}{x-x_2}(x_1\neq x_2), g(x)=kx$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow x_1, x_2$ 是 $f(x)$ 的两个不等的不动点，且 $k=\frac{a-cx_1}{a-cx_2}$，及 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$.

(2) 若取 $\varphi(x)=\frac{1}{x-x_0}, g(x)=x+k$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的唯一不动点且 $k=\frac{2c}{a+d}$，及 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$.

定理 5　二次分式函数 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$（$d$ 和 ae 不同时为零），若取 $\varphi(x)=\frac{x-x_1}{x-x_2}(x_1\neq x_2), g(x)=kx^2$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow k=\frac{a-dx_1}{a-dx_2}, be=4dc, e(e-2a)=2d\cdot(2f-b)$，$x_1, x_2$ 是 $f(x)$ 的两个不等的不动点，且当 $d\neq 0$ 时，$f(x)$ 的第三个不动点为 $-\frac{e}{2d}$ 及 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$.

推论 1　设 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{ex+f}(ae\neq 0)$，若取 $\varphi(x)=\frac{x-x_1}{x-x_2}(x_1\neq x_2)$，

$g(x)=x^2$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow b=0,e=2a$ 且 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个不等的不动点.

推论 2 设 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{dx^2+ex+f}(bd\neq0)$，若取 $\varphi(x)=\dfrac{x-x_1}{x-x_2}(x_1\neq x_2)$，$g(x)=kx^2$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow k=\dfrac{a-dx_1}{a-dx_2},e=0,b=2f$ 且 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个不等的非零不动点.

推论 3 设 $f(x)=\dfrac{ax^2}{dx^2+ex+f}(adf\neq0)$，若取 $\varphi(x)=\dfrac{x-x_0}{x}(x_0\neq0)$，$g(x)=kx^2$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow k=\dfrac{a-dx_0}{a},e(e-2a)=4df$，且 $x_0,\dfrac{-e}{2d}$ 是 $f(x)$ 的两个非零不动点.

定理 6 设 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}(ae\neq0)$，若取 $\varphi(x)=\dfrac{x-x_1}{x-x_2}(x_1\neq x_2)$，$g(x)=x^3$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow b=0,e=3a,cf=9ad,f^2=3a(3g-c)$，且 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ 和 $-\dfrac{f}{6a}$ 是 $f(x)$ 的三个不动点，及 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$.

推论 4 设 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx}{ex^2+fx+g}(aec\neq0)$，若取 $\varphi(x)=\dfrac{x-x_1}{x-x_2}(x_1\neq x_2)$，$g(x)=x^3$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow b=f=0,e=3a;c=3g$ 且 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个不等的非零不动点.

显然定理 4 ~ 6 均为如下定理 7 的特殊情形.

定理 7 设 $f(x)=\dfrac{a(x-b)^k-bp(x-a)^k}{(x-b)^k-p(x-a)^k}(a\neq b,k\in\mathbf{N})$，若取 $\varphi(x)=\dfrac{x-a}{x-b}$，$g(x)=px^k$，则 $f\overset{\varphi}{\sim}g\Leftrightarrow a,b$ 是 $f(x)$ 的两个不等不动点且 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$.

例 8 已知 $f(x)=3x+2$，证明存在正整数 m 使 $f^{(100)}(m)$ 被 1988 整除.

(1988 年中国 IMO 集训选拔题)

证明 $f(x)=3x+2$ 的不动点为 $x_0=-1$，由定理 1 或 2 易求出 $f^{(100)}(x)=3^{100}\cdot(1+x)-1$，则 $f^{(100)}(m)=3^{100}(m+1)-1$. 因 $1988=4\cdot7\cdot71$ 与 100 互质，故存在非零整数 u,v 使 $3^{100}u-1988v=1$，$3^{100}u-1=1988v$. 若 u 为大于 1 的整数，则取 $m=u-1$ 即可；若 $u=1$，则 $1988\mid(3^{100}+1)(3^{100}u-1)=3^{100}\cdot3^{100}-1=f^{(100)}(3^{100}-1)$，取 $m=3^{100}-1$ 即可；若 u 为整数，令 $u'=-u,v'=-v$，则 $3^{100}u'+1=1988v'$，

$1988 \mid (3^{100}-1)(3^{100}u'+1) = 3^{100}[(3^{100}-1)u'+1]-1 = f^{(100)}[(3^{100}-1)u']$，取 $m = (3^{100}-1)u'$ 即可.

例 9 设 $f(x) = \dfrac{x^2+6x-15}{-x^2+10x-17}$，求 $f^{(n)}(x)$.

解 $f(x) = \dfrac{x^2+6x-15}{-x^2+10x-17}$ 有三个不动点 1、3、5，显然满足定理 5 的条件，则取 $x_1=3, x_2=1$，有 $\varphi(x)=\dfrac{x-3}{x-1}, g(x)=2x^2(k=2)$；或者由 $\dfrac{x^2+6x-15}{-x^2+10x-17} = \dfrac{3(x-1)^2-2(x-3)^2}{(x-1)^2-2(x-3)^2}$，也满足定理 7 的条件，有 $\varphi(x)=\dfrac{x-3}{x-1}, g(x)=2x^2(p=2)$，此时 $\varphi^{-1}(x)=\dfrac{x-3}{x-1}, g^{(n)}(x)=2^{2^n-1}\cdot x^{2^n}$，故

$$f^{(n)}(x) = \varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x))) = \frac{2^{2^n-1}(x-3)^{2^n}-3(x-1)^{2^n}}{2^{2^n-1}(x-3)^{2^n}-(x-1)^{2^n}}$$ 为所求.

3. 利用 $f(x)$ 的不动点讨论 n - 周期点问题

例 10 设 S 是复平面上的单位圆周（即模等于 1 的复数的集合），f 是从 S 到 S 的映射，对于任何 $z\in S$，定义 $f^{(1)}(z)=f(z), f^{(2)}(z)=f(f(z)),\cdots,f^{(k)}(z)=\underbrace{f(f(\cdots f}_{k\text{个}f}(z))\cdots))$.

（第 4 届中国奥林匹克题）

如果 $c\in S$ 及自然数 n 使得 $f^{(1)}(c)\neq c, f^{(2)}(c)\neq c,\cdots,f^{(n-1)}(c)\neq c, f^{(n)}(c)=c$，就称 c 是 f 的 n - 周期点.

设 m 是大于 1 的自然数，f 的定义如下：$f(z)=z^m(z\in S)$.

试计算 f 的 1989 - 周期点的个数.

解 当 $f^{(n)}(c)=c$ 时，即知 c 为 f 的 n - 不动点. 显然，n - 周期点必为 n - 不动点. 反之，若 c 为 n - 不动点，必有最小正整数 m 使 c 为 m - 周期点. 此时一定有 $m\mid n$，否则令 $n=km+r(0<r<m)$，则 $c=f^{(n)}(c)=f^{(r)}(c)$，与 m 的最小性矛盾.

由此得到：若记 f 的 n - 不动点、n - 周期点的个数分别为 F_n、P_n，则

$$P_n = F_n - \sum_{\substack{d\mid n\\ d\neq n}} P_d.$$

对本题的 f 容易归纳证明 $f^{(k)}(z)=z^{m^k}$，故由 $f^{(k)}(z)=z$ 知 $F_n=m^k-1$.

由于 $1989=3^2\cdot 13\cdot 17$，它的（小于 1989）因子共有 11 个：1,3,9,13,17,39,51,117,153,221,663，故可逆推算出（也可用容斥原理算出）：

$P_1=F_1=m-1, P_3=F_3-P_1=m^3-m,$

$P_9=F_9-P_1-P_2=m^9-m^3, P_{13}=m^{13}-m,$

$P_{17}=m^{17}-m, P_{39}=m^{39}-m^{13}-m^{3}+m,$

$P_{51}=m^{51}-m^{17}-m^{3}+m, P_{117}=m^{117}-m^{39}-m^{9}+m^{3},$

$P_{153}=m^{153}-m^{51}-m^{9}+m^{3}; P_{221}=m^{221}-m^{17}-m^{13}+m,$

$P_{663}=m^{663}-m^{221}-m^{51}-m^{39}+m^{17}+m^{13}+m^{3}.$

最后 $P_{1989}=F_{1989}-\sum\limits_{\substack{d\mid 1989\\ d\neq 1989}} P_d$

$$=m^{1989}-m^{663}-m^{153}-m^{117}+m^{51}+m^{39}+m^{9}-m^{3}.$$

由上述解答,我们有

定理 8 设 $f(x)$ 是定义在数集 M 上且取值于 M 的函数,$k,n\in\mathbf{N}, c\in M$.

(1) 若 $k\mid n$,且 c 是 $f^{(k)}(x)$ 的不动点,则 c 是 $f^{(n)}(x)$ 的不动点.

(2) 若 c 是 $f^{(k)}(x)$ 和 $f^{(n)}(x)$ 的公共不动点,则 c 是 $f^{((k,n))}(x)$ 的不动点.

(3) c 是 $f^{(n)}(x)$ 的不动点而非 f 的 n - 周期点的充要条件是存在正整数 $k<n$,使 $k\mid n$,且 c 是 $f^{(k)}(x)$ 的不动点.

4. 利用 $f(x)$ 的不动点求解数列问题

(1) 求解一阶递归数列的通项(或某一项)

利用前面介绍的求函数 n 次迭代的不动点方法来求某些一阶递归数列的通项是很方便的.

定理 9 设 $f(x)=ax+b(a\neq 1, a\neq 0)$,数列 $\{a_n\}$ 由初始条件 $a_1\neq f(a_1)$ 及 $a_n=f(a_{n-1})$ 确定,那么当且仅当 x_0 是 $f(x)$ 的不动点时,数列 $\{a_n-x_0\}$ 是公比为 a 的等比数列.

例 11 今有一数列 $a_1,a_2,\cdots$,其中 a_1 是自然数,而 $a_{n+1}=[1.5a_n]+1$(这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数),是否可以选择 a_1 的值,使此数列前 100000 项为偶数,而 100001 项为奇数? (1981 年联邦德国竞赛题)

解 若 $1\leqslant n\leqslant 100000$ 时 a_n 为偶数,则 $[1.5a_n]=1.5a_n$,于是

$a_{n+1}=1.5a_n+1(1\leqslant n\leqslant 100000)$.

由定理 9,知 $a_n=(\frac{3}{2})^{n-1}(a_1+2)-2(1\leqslant n\leqslant 100000, f(x)=1.5x+1$ 的不动点为 $x_0=-2)$,故只要取 $a_1=2^{100000}\cdot N-2$(N 为任意奇数),有

$a_n=3^{n-1}\cdot 2^{100000-n}\cdot N-2(1\leqslant n\leqslant 100000)$,

这时 $a_1,\cdots,a_{100000}$ 为偶数,而 $a_{10001}=3^{100000}\cdot N-2$ 为奇数.

例 12 运动会开了 n 天 $(n>1)$,共发出 m 个奖牌,第一天发出 1 个又余下的 $m-1$ 个奖牌的 $\frac{1}{7}$,第二天发了 2 个又余下的奖牌的 $\frac{1}{7}$,等等,直至第 n 天正好发了 n 个,全

部发完.问这个运动会共开了几天?共发了多少个奖牌? (IMO - 9 试题)

解 设第 k 天发出 a_k 个奖牌,则

$$a_1 = 1 + \frac{1}{7}(m-1) = \frac{1}{7}(m+6), a_k = k + \frac{1}{7}(m - a_1 - a_2 - \cdots - a_{k-1} - k),$$

于是 $a_k - a_{k-1} = 1 + \frac{1}{7}(-a_{k-1} - 1)$,即 $a_k = \frac{6}{7}a_{k-1} + \frac{6}{7}$.

因为 $f(x) = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$ 的不动点为6,所以

$$a_k = (\frac{6}{7})^{k-1}(a_1 - 6) + 6 = \frac{1}{7}(\frac{6}{7})^{k-1}(m-36) + 6,$$

$$m = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (m-36)[1 - (\frac{6}{7})^n] + 6n,$$

解出得 $m = \frac{7^n}{6^{n-1}}(n-6) + 36$.

因为 m,n 是正整数且 7^n 与 6^{n-1} 互质,所以 $6^{n-1} \mid (n-6)$.又因为 $n > 1$ 时显然有 $|n-6| < 6^{n-1}$,故只能 $n = 6$,从而 $m = 36$,即运动会开了6天,共发了36个奖牌.

例 13 已知 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n})(n \geq 1)$,求 a_n.

(1986 年联邦德国竞赛题)

解 令 $b_n = \sqrt{1 + 24a_n}$,即 $a_n = \frac{1}{24}(b_n^2 - 1)$,原逆推关系变为

$$(2b_{n+1} + 1)^2 = (b_n + 3)^2.$$

因 $b_n > 0$,故有 $2b_{n+1} = b_n + 3$,即 $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}$,且 $b_1 = \sqrt{1 + 24a_1} = 5$.而 $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 的不动点为3,所以 $b_n = (\frac{1}{2})^{n-1}(b_1 - 3) + 3 = 2^{2-n} + 3$,故

$$a_n = \frac{1}{24}(b_n^2 - 1) = (2^{2n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} + 1)/(3 \cdot 2^{2n-1}), n \geq 1.$$

类似于定理9,我们还有如下一系列定理:

定理 10 设 $f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$,数列 $\{a_n\}$ 由初始条件 $a_1 \neq f(a_1)$ 及递推关系 $a_n = f(a_{n-1})(n \geq 2)$ 确定,那么当且仅当 $x_0 = -\frac{b}{2a}$ 是 $f(x)$ 的不动点时,有

$$a_n - x_0 = a(a_{n-1} - x_0)^2 (n \geq 2) \text{ 或 } \ln|a_n - x_0| = 2\ln|a_{n-1} - x_0| + \ln|a|.$$

定理 11 设 $f(x) = \frac{\alpha(x-\beta)^k - \beta r(x-\alpha)^k}{(x-\beta)^k - r(x-\alpha)^k}(\alpha \neq \beta, k \in \mathbf{N})$,数列 $\{a_n\}$ 由初始条件 $a_1 \neq f(a_1)$ 及递推关系 $a_n = f(a_{n-1})(n \geq 2)$ 确定,那么

$$a_n=\frac{\beta A-\alpha}{A-1}\text{,其中 }A=r^{1+k+\cdots+k^{n-1}}\cdot\left(\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\right)^{k^n}.$$

特别地,我们有

(1) 若 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0,ad-bc\neq 0)$,数列 $\{a_n\}$ 由初始条件 $a_1\neq f(a_1)$ 及递推关系 $a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant 2)$ 确定,那么:(i) 当且仅当 α,β 是 $f(x)$ 的两个不等的不动点时,数列 $\left\{\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right\}$ 是以 $r=\frac{a-c\alpha}{a-c\beta}$ 为公比的等比数列;(ii) 当且仅当 $\alpha=\beta$ 时,数列 $\left\{\frac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ 是以 $\frac{2c}{a+d}$ 为公差的等差数列.

(2) 若 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$($d$ 和 e 不同为零),数列 $\{a_n\}$ 由初始条件 $a_1=f(a_1)$ 及递推关系 $a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant 2)$ 确定,那么当且仅当 $be=4dc$,$e(e-2a)=2d(2f-b)$,α 和 β 是 $f(x)$ 的两个不相同的不动点且当 $d\neq 0$ 时,$f(x)$ 的第三个不动点为 $-\frac{e}{2d}$ 时,有 $\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\frac{a-d\alpha}{a-d\beta}\cdot\left(\frac{a_{n-1}-\alpha}{a_{n-1}-\beta}\right)^2(n\geqslant 2)$.

特别地,(i) 若 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{ex+f}(ae\neq 0)$,数列 $\{a_n\}$ 由初始条件 $a_1\neq f(a_1)$ 及递推关系 $a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant 2)$ 确定,那么当且仅当 $b=0$,$e=2a$,α 和 β 是 $f(x)$ 的两个不相同的不动点时,数列 $\left\{\ln\left(\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right)\right\}$ 是公比为 2 的等比数列,或有

$$\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\left(\frac{a_{n-1}-\alpha}{a_{n-1}-\beta}\right)^2.$$

(ii) 若 $f(x)=\frac{ax^2+bx}{dx^2+ex+f}(bd\neq 0)$,数列 $\{a_n\}$ 由初始条件 $a_1\neq f(a_1)$ 和递推关系 $a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant 2)$ 确定,那么当且仅当 $e=0$,$b=2f$,α 和 β 是 $f(x)$ 的两个不相同的非零不动点时,有

$$\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\frac{a-d\alpha}{a-d\beta}\cdot\left(\frac{a_{n-1}-\alpha}{a_{n-1}-\beta}\right)^2\quad(n\geqslant 2,\alpha\neq\beta,\alpha\neq 0,\beta\neq 0).$$

(iii) 若 $f(x)=\frac{ax^2}{dx^2+ex+f}(adf\neq 0)$,数列 $\{a_n\}$ 由初始条件 $a_1\neq f(a_1)$ 及递推关系 $a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant 2)$ 确定,那么当且仅当 $e(e-2a)=4df$,α 和 $-\frac{e}{2d}$ 是 $f(x)$ 的两个非零不动点时,有

$$\frac{a_n-\alpha}{a_n}=\frac{a-d\alpha}{a}\cdot\left(\frac{a_{n-1}-\alpha}{a_{n-1}}\right)^2\quad(n\geqslant 2,\alpha\neq 0).$$

(3) 若 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}(ae\neq 0)$,数列$\{a_n\}$由初始条件 $a_1\neq f(a_1)$ 及递推关系 $a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant 2)$ 确定,那么当且仅当 $b=0,e=3a,cf=9ad,f^2=3a(3g-c)$,$\alpha$ 和 β 是 $f(x)$ 的两个不相同的不动点且 $f(x)$ 的第3个不动点为 $-\dfrac{f}{6d}$ 时,有 $\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\left(\dfrac{a_{n-1}-\alpha}{a_{n-1}-\beta}\right)^3(n\geqslant 2,\alpha\neq\beta)$,或数列$\left\{\ln\left(\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right)\right\}$是公比为3的等比数列.

特别地,若 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx}{ex^2+fx+g}(ae\neq 0,c\neq 0)$,数列$\{a_n\}$由初始条件 $a_1\neq f(a_1)$ 及递推关系 $a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant 2)$ 确定,那么当且仅当 $b=f=0,e=3a,c=3g$,α 和 β 是 $f(x)$ 的两个不相等的非零不动点时,有 $\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=(\dfrac{a_{n-1}-\alpha}{a_{n-1}-\beta})^3(n\geqslant 2,\alpha\neq\beta,\alpha\neq 0,\beta\neq 0)$,或数列$\left\{\ln\left(\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right)\right\}$是公比为 3 的等比数列.

(4) 若 $f(x)=\dfrac{\alpha(x-\beta)^k-\beta(x-\alpha)^k}{(x-\beta)^k-(x-\alpha)^k}(\alpha\neq\beta,k\in\mathbf{N})$,数列$\{a_n\}$由初始条件 $a_1\neq f(a_1)$ 及递推关系 $a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant 2)$ 确定,那么数列$\left\{\ln\left(\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right)\right\}$是公比为 k 的等比数列(此即为定理 11 中当 $r=1$ 时的情形).

例 14 已知 $x_1>0,x_1\neq 1$,且 $x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}(n=1,2,\cdots)$.试证:数列$\{x_n\}$或者对任意自然数 n 都满足 $x_n<x_{n+1}$,或者对任意自然数都满足 $x_n>x_{n+1}$.

(1986 年全国高考题)

证明 由 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^3+3x_n}{3x_n^2+1}=\dfrac{(x_n+1)^3+(x_n-1)^3}{(x_n+1)^3-(x_n-1)^3}$,于是由定理 11,有

$$x_{n+1}=\frac{(x_1+1)^{3^n}+(x_1-1)^{3^n}}{(x_1+1)^{3^n}-(x_1-1)^{3^n}}.$$

令 $(x_1+1)^{3^{n-1}}=A,(x_1-1)^{3^{n-1}}=B$,则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{A^3+B^3}{A+B}\cdot\frac{A-B}{A^3-B^3}=\frac{A^2-AB+B^2}{A^2+AB+B^2}.$$

又 $n\in\mathbf{N}$,有 3^{n-1} 是奇数.于是当 $0<x_1<1$ 时,$x_1+1>1,x_1-1<0$,故 $A>1$,$B<0,AB<0$,便有 $A^2-AB+B^2>A^2+AB+B^2$,即知 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>1$.

当 $x_1 > 1$ 时,仿上推得 $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$.这样便证明了命题成立.

类似于此例,可讨论1984年全国高考理科第8题,该题题设为:设 $a > 2$,给定数列 $\{x_n\}$,其中 $x_1 = a$,$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)}(n = 1,2,\cdots)$.只要令 $x_n = y_n + 1$,则得 $y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 1}{2y_n} = \frac{(y_n + 1)^2 + (y_n - 1)^2}{(y_n + 1)^2 - (y_n - 1)^2}$,即有 $y_n = \frac{(y_1 + 1)^{2^{n-1}} + (y_1 - 1)^{2^{n-1}}}{(y_1 + 1)^{2^{n-1}} - (y_1 - 1)^{2^{n-1}}}$,故

$$x_n = 2/[1 - (1 - \frac{2}{a})^{2^{n-1}}].$$

对于这道题如果运用定理11中特殊情形(2)中(i)的结论可更简捷地讨论,其通项直接套结论得

$$\ln \frac{x_n - 2}{x_n} = 2^{n-1} \cdot \ln \frac{x_1 - 2}{x_1},\text{故 } x_n = 2/[1 - (1 - \frac{2}{a})^{2^{n-1}}].$$

例 15 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $(2 - a_n)a_{n+1} = 1$,$n \geqslant 1$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(第7届普特南 A-1)

证明 因 $f(x) = \frac{1}{2 - x}$ 有两个相同的不动点 $x_1 = x_2 = 1$(并由定理11中的(1)),于是 $\frac{1}{a_n - 1} = \frac{-2}{2} + \frac{1}{a_{n-1} - 1} = \frac{1}{a_1 - 1} + (n - 1)(-1)$,即

$$a_n = 1 + \frac{a_1 - 1}{a - (n - 1)(a_1 - 1)},\text{故} \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

由此例可看到:数列的极限与不动点相同,这是必然的,还是偶然的?下面我们讨论它.

5. 求解一阶递归数列的极限

一阶递归数列 a_1 及 $a_n = f(a_{n-1})(n \geqslant 2)$ 的极限与 $f(x)$ 的不动点密切相关.下面的定理将说明其间的关系.

定理 12 一阶递归数列:a_1 及 $a_n = f(a_{n-1})(n \geqslant 2$,$f$ 在定义域内连续).以下简记 $\{a_n\}$ 存在极限的必要条件是 $f(x)$ 有实的不动点,且此极限为其中某个实不动点.

此定理的几何意义是显然的.

定理 13 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增,x_0 为 $f(x)$ 的实不动点,且在 (a,x_0) 上有 $f(x) > x$,在 (x_0,b) 上有 $f(x) < x$,则当 $a < a_1 < x_0$ 时,$\{a_n\}$ 为递增数列,当 $x_0 < a_1 < b$ 时,$\{a_n\}$ 为递减数列,且都是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$.

若 $f(x)$ 在定义域上为一一映射,(a,b) 为定义域的子集,x_0 为 $f(x)$ 的实不动点,

且在(a,x_0)上有$f(x)<x$,在(x_0,b)上有$f(x)>x$,则当$a<a_1<b(a_1\neq x_0)$时,数列$\{a_n\}$不以x_0为其极限.

定理 14 若$f(x)$在(a,b)上单调递减,x_0为$f(x)$的实不动点,且在(a,x_0)上有$f[f(x)]>x$,在(x_0,b)上有$f[f(x)]<x$,则当$a<a_1<b$时($a_1\neq x_0$且$a<f(a_1)<b$),数列$\{a_n\}$为摆动数列,并有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$.

若$f(x)$在定义域上为一一映射,在定义域的子集(a,b)上单调递减,x_0为$f(x)$的实不动点,且在(a,x_0)上有$f[f(x)]<x$,在(x_0,b)上有$f[f(x)]>x$,则当$a<a_1<b$($a_n\neq x_0$,并总使a_n存在,$n=1,2,\cdots$),对于数列$\{a_n\}$,总存在自然数$N(N>1)$,使得$a_N\notin(a,b)$,且$\{a_n\}$不以x_0为极限.

用上述定理求解一阶非线性递归数列的极限是方便的,其步骤是:先求不动点,再考察函数$f(x)$在不动点附近的增减性,递增时比较$f(x)$与x的大小并应用定理13,递减时比较$f[f(x)]$与x的大小并应用定理14.

例 16 已知数列$\{x_n\}$:$x_1\in\mathbf{R}$,$x_{n+1}=\dfrac{x_n^3+3x_n}{3x_n^2+1}(n=1,2,\cdots)$.试讨论数列的增减与极限.(参见例14)

略解 $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}$的不动点为$-1,0,1$,而$f(x)$在定义域$x\in\mathbf{R}$上单调递增.当$-\infty<x<-1$时,$f(x)>x$;$-1<x<0$时,$f(x)<x$;$0<x<1$时,$f(x)>x$;$1<x<+\infty$时,$f(x)<x$.故当$-\infty<x_1<-1$时,$\{x_n\}$递增,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$;当$-1<x_1<0$时,$\{x_n\}$递减,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$;当$0<x_1<1$时,$\{x_n\}$递增,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$;当$1<x_1<+\infty$时,$\{x_n\}$递减,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$;当$x_1=-1,0,1$时,$\{x_n\}$分别为常数列$\{-1\},\{0\},\{1\}$.

在求解一阶非线性递归数列的极限时,也可以运用不动点求出其通项再取极限(例15),还可以利用不动点及介值定理来求.

例 17 设由x_1及$x_n=\sqrt{2x_{n-1}+3}$定义无穷数列,试求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 求$f(x)$的不动点得$x_0=3(x_0\geqslant 0)$,

由不动点$x_0=3$暗示,作代换$|x_0-3|$有

$$0<|x_n-3|=\frac{2|x_{n-1}-3|}{\sqrt{2x_{n-1}-3}+3}\leqslant\frac{2}{3}|x_{n-1}-3|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot|x_1-3|,$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}|x_1-3|=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-3|=0$,

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

【模拟实战】

习题 A

1. 已知函数 $f(f(f(f(f(x))))) = 16x + 15$,求一次函数 $f(x)$ 的解析式.
2. 已知二次三项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 使得方程 $f(x) = x$ 没有实根. 证明:方程 $f(f(x)) = x$ 也没有实根. (第 7 届全苏奥林匹克题)
3. 设 f 是具有下列性质的函数:
   (1) $f(n)$ 对每个正整数 n 有定义;
   (2) $f(n)$ 是整数;
   (3) $f(2) = 2$;
   (4) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$,对一切 m,n;
   (5) $f(m) > f(n)$,当 $m > n$ 时.
   证明:$f(n) = n$. (1969 年加拿大奥林匹克题)
4. 求所有使等式 $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ 成立的实数,其中 p 为参数. (IMO - 5 试题)

习题 B

1. 设 $p_1(x) = x^2 - 2, p_j(x) = p_1[p_{j-1}(x)] (j = 1,2,\cdots)$. 试证:对于任意自然数 n,$p_n(x)$ 的所有不动点全是相异的实数. (IMO - 18 试题)
2. 设 $f(n)$ 是一个定义在自然数集上的函数,并在自然数集中取值. 试证:如果对于每个 n 值,不等式 $f(n+1) > f[f(n)]$ 都成立,那么,对于每一个 n 值,都有 $f(n) = n$. (IMO - 19 试题)
3. 证明:不存在任意实数 x 均满足 $f[f(x)] = x^2 - 1996$ 的函数 $f(x)$. (1996 年世界城市际联赛题)
4. 设 S 是所有大于 -1 的实数集合,确定所有的函数 $f: S \to S$,使得满足下面两个条件:
   (1) 对于 S 内所有 x 和 y,有 $f[x + f(y) + x \cdot f(y)] = y + f(x) + y \cdot f(x)$;
   (2) 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0, +\infty)$,$\frac{f(x)}{x}$ 是严格递增的. (IMO - 35 试题)

第七章 广义凸函数及简单应用

【基础知识】

设连续函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上,若对于任意的 $x_1,x_2\in I$ 和 $p_1>0,p_2>0$,有

$$\frac{p_1}{p_1+p_2}\cdot f(x_1)+\frac{p_2}{p_1+p_2}\cdot f(x_2)\geqslant f\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}\cdot x_1+\frac{p_2}{p_1+p_2}\cdot x_2\right),\tag{7-1}$$

则说 $f(x)$ 在区间 I 上是下凸的.如果(7-1)式中等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立,则说 $f(x)$ 在区间 I 上是严格下凸的.

如果(7-1)式中不等号反向,则说 $f(x)$ 在区间 I 上是(严格)上凸的.

特别地,令 $p_1=p_2=\frac{1}{2}$,若(7-1)式成立,则称 $f(x)$ 为“算术下凸”函数;若(7-1)式中不等号反向成立,则称 $f(x)$ 为“算术上凸”函数.

凸函数成立着著名的琴生(Jensen)不等式:

定理 1 设 $f(x)$ 在区间 I 上是下凸函数,则对任意 $x_i\in I$ 及 $p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\cdot f(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\geqslant f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\cdot x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\right).\tag{7-2}$$

若 $f(x)$ 在区间 I 上是严格下凸的,则(7-2)式中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

若 $f(x)$ 在区间 I 上是上凸的,则(7-2)式中不等号反向.

上述凸函数的概念及性质(琴生不等式)均可以推广,为讨论问题的方便,引入一个记号:

设 $x_i>0,p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,规定

$$M_n^r(x_i,p_i)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i^r}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\frac{1}{r}}, & 0<|r|<+\infty,\\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}}, & r=0.\end{cases}$$

下面,我们给出广义凸函数的概念与性质.

设正值连续函数 $f(x)$ 定义在区间 $I \subseteq \mathbf{R}^+$ 上,如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$ 和 $p_1 > 0$, $p_2 > 0$,有 $M_2^r[f(x_i, p_i)] \geqslant f[M_2^r(x_i, p_i)]$, (7 - 3)

或 $$\left[\frac{p_1}{p_1+p_2}\cdot f^r(x_1)+\frac{p_2}{p_1+p_2}\cdot f^r(x_2)\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\geqslant f\left[\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}\cdot x_1^r+\frac{p_2}{p_1+p_2}\cdot x_2^r\right)\right]^{\frac{1}{r}}, \text{当 } r \neq 0 \text{ 时}, \quad (7-3')$$

或 $$[f^{p_1}(x_1)\cdot f^{p_2}(x_2)]^{\frac{1}{p_1+p_2}} \geqslant f[(x_1^{p_1}\cdot x_2^{p_2})^{\frac{1}{p_1+p_2}}], \text{当 } r = 0 \text{ 时}, \quad (7-3'')$$

则说 $f(x)$ 在区间 I 上是广义下凸的.如果(7 - 3)式中等号当且仅当 $x_1 = x_2$ 时成立,则说 $f(x)$ 在 I 上为广义严格下凸的.

如果(7 - 3)式中不等号反向,则说 $f(x)$ 在 I 上为广义(严格)上凸的.

显然,取 $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, r 取特殊值时,有

$r = 1$,(7 - 3)式变为 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$,

此即为前面所说的 $f(x)$ 为"算术下凸"函数.

$r = 0$,(7 - 3)式变为 $\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)} \geqslant f(\sqrt{x_1\cdot x_2})$,

此时,可说成 $f(x)$ 为"几何下凸"函数.

$r = 2$,(7 - 3)式变为 $\sqrt{\frac{f^2(x_1)+f^2(x_2)}{2}} \geqslant f(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}})$,

此时,可说成 $f(x)$ 为"平方下凸"函数

$r = -1$,(7 - 3)式变为 $\frac{2f(x_1)\cdot f(x_2)}{f(x_1)+f(x_2)} \geqslant f\left(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\right)$,

此时,可说成 $f(x)$ 为"调和下凸"函数,等等.

【典型例题与基本方法】

例 1 试证:幂函数 $f(x) = x^\alpha (x > 0, 0 < \alpha < 1)$ 是上凸函数.

证明 这可由此函数图形的特点或求导或由下述推导得出:

对于任意的 $x_1, x_2 > 0$,及 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$,且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

若令 $A = (\lambda_1 x_1^\alpha + \lambda_2 x_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$,则 $\lambda_1\left(\frac{x_1}{A}\right)^\alpha + \lambda_2\left(\frac{x_2}{A}\right)^\alpha = 1$.

当 $0 < \alpha < 1$ 时,$\frac{1}{\alpha} > 1$,由指数不等式或贝努利不等式有

$$\frac{x_1}{A}=[(\frac{x_1}{A})^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x_1}{A}\right)^\alpha+(1-\frac{1}{\alpha}),\qquad ①$$

$$\frac{x_2}{A}=[(\frac{x_2}{A})^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x_2}{A}\right)^\alpha+(1-\frac{1}{\alpha}).\qquad ②$$

①·λ_1 + ②·λ_2 得，$\lambda_1\cdot\frac{x_1}{A}+\lambda_2\cdot\frac{x_2}{A}\geqslant\frac{1}{\alpha}[\lambda_1\left(\frac{x_1}{A}\right)^\alpha+\lambda_2\left(\frac{x_2}{A}\right)^\alpha]+(1-\frac{1}{\alpha})=1$,

$\therefore\quad \lambda_1x_1+\lambda_2x_2\geqslant A.$

因 $\alpha>0$，故 $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)^\alpha\geqslant\lambda_1x_1^\alpha+\lambda_2x_2^\alpha$.

这就证明了幂函数 $f(x)=x^\alpha(x>0,0<\alpha<1)$ 是上凸函数.

注 (1) 若取 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$，则有 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^\alpha\geqslant\frac{1}{2}(x_1^\alpha+x_2^\alpha)$, ③

即此说明函数 $f(x)=x^\alpha(x>0,0<\alpha<1)$ 为算术上凸的.

(2) 若用 x_1^2,x_2^2 分别代入 ③ 式中的 x_1,x_2，则有

$$\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)^\alpha\geqslant\frac{1}{2}(x_1^{2\alpha}+x_2^{2\alpha})\Rightarrow(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}})^\alpha\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}(x_1^{2\alpha}+x_2^{2\alpha})},$$

即说明 $x^\alpha(x>0,0<\alpha<1)$ 为平方上凸的；在 ③ 中又用 $\frac{1}{x_1}$ 代 x_1，$\frac{1}{x_2}$ 代 x_2，有

$$\left(\frac{2x_1\cdot x_2}{x_1+x_2}\right)^\alpha\leqslant\frac{2x_1^\alpha\cdot{}_2^\alpha}{x_1^\alpha+x_2^\alpha},$$

即知 $x^\alpha(x>0,0<\alpha<1)$ 为调和下凸的；又注意到

$$(x_1\cdot x_2)^{\frac{\alpha}{2}}=(x_1\cdot x_2)^{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow(\sqrt{x_1\cdot x_2})^\alpha\geqq\sqrt{x_1^\alpha\cdot x_2^\alpha},$$

即知 $f(x)=x^\alpha(x>0,0<\alpha<1)$ 为几何上凸(下凸)的.

同样地，可推知幂函数 $f(x)=x^\alpha(x>0,\alpha>1)$ 为平方下凸、算术下凸、几何下凸(上凸)、调和上凸的，$f(x)=x^3-1(x>1)$ 是平方下凸、算术下凸、几何上凸、调和上凸的，$f(x)=\sqrt{x}+1$ 是平方上凸、算术上凸、几何下凸、调和下凸的，$f(x)=\log_a x\,(a>1,x>1)$ 是平方上凸、算术上凸、几何上凸、调和下凸的.

上面的例子说明，尽管我们有不等式链：

$$\sqrt{\frac{f^2(x_1)+f^2(x_2)}{2}}\geqslant\sqrt{\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}}\geqslant\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}\geqslant\frac{2f(x_1)\cdot f(x_2)}{f(x_1)+f(x_2)},$$

但这几种凸函数之间没有一致的包含关系.然而对同一函数而言，其凸性也有某些规律.例如，由算术凸性可推出平方凸性和调和凸性，并且平方凸性与调和凸性的“上”与“下”相反；由平方凸性和几何凸性可推出算术凸性.注意到

$$(\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2})^2+(\sqrt{x_1x_2})^2=2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2,有$$

例2 试证:若函数$f(x)$在区间I上是平方下(上)凸,也是几何下(上)凸的,则一定是算术下(上)凸的.

证明 只证下凸情形.由平方下凸、几何下凸的定义,有

$$f\left(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\right) \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}[f^2(x_1)+f^2(x_2)]}, f(\sqrt{x_1\cdot x_2}) \leqslant \sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}.$$

由
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left[\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}\right]=f\left[\sqrt{\frac{\left(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\right)^2+(\sqrt{x_1\cdot x_2})^2}{2}}\right]$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}\left[f^2\left(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\right)+f^2(\sqrt{x_1\cdot x_2})\right]}$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}[f^2(x_1)+f^2(x_2)+2f(x_1)\cdot f(x_2)]}$$
$$=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)],$$

及算术下凸的定义,即证得结论成立.

琴生不等式可以推广为:

定理2 设$f(x)$在区间$I\subseteq \mathbf{R}^+$上是广义下凸函数,则对任意的$x_i\in I$及$p_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,有 $M_n^r[f(x_i),p_i]\geqslant f[M_n^r(x_i,p_i)]$, (7-4)

或
$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n p_i\cdot f^r(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i}\right]^{\frac{1}{r}} \geqslant f\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i\cdot x_i^r}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{r}}\right], \text{当 } r\neq 0 \text{ 时}, \tag{7-4'}$$

或
$$\left[\prod_{i=1}^n f^{p_i}(x_i)\right]^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}} \geqslant f\left[\left(\prod_{i=1}^n x^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}\right], \text{当 } r=0 \text{ 时}. \tag{7-4''}$$

若$f(x)$在I上是广义严格下凸的,则(7-4)式中等号当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时成立.

若$f(x)$在I上是广义上凸的,则(7-4)式中的不等号反向.

下面用数学归纳法证明此定理中$r\neq 0$($r=0$时类似)的情形.

证明 当$n=2$时,由广义下凸函数定义得$M_2^r[f(x_i),p_i]\geqslant f[M_2^r(x_i,p_i)]$.

假设当$n=k$时,(7-4)式成立,即有$M_k^r[f(x_i),p_i]\geqslant f[M_k^r(x_i,p_i)]$.

当$n=k+1$时,令$q_j=\frac{p_j}{\sum_{i=1}^n p_i}(j=1,2,\cdots,n)$,则$\sum_{j=1}^n q_j=1$.又令$q'_k=q_k+q_{k+1}$,$x'^r_k=\frac{q_k}{q'_k}x_k^r+\frac{q_{k+1}}{q'_k}\cdot x_{k+1}^r$,易知$x'_k\in I$,且

$q_k \cdot x_k^r + q_{k+1} \cdot x_{k+1}^r = q'_k \cdot x''^r_k, \sum_{j=1}^{k-1} q_j + q'_k = 1.$

由
$$f[M_{k+1}^r(x_i, p_i)] = f\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{k+1} p_i \cdot x_i^r}{\sum_{i=1}^{k+1} p_i}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$
$$= f[(q_1 x_1^r + q_2 x_2^r + \cdots + q_{k-1} x_{k-1}^r + q'_k \cdot x''^r_k)^{\frac{1}{r}}]$$
$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{k-1} q_i \cdot f(x_i) + q'_k \cdot f(x'_k)\right]^{\frac{1}{r}}$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{k-1} q_i \cdot f(x_i) + (q_k + q_{k+1}) \cdot f\left[\left(\frac{q_k}{q'_k} \cdot x_k^r + \frac{q_{k+1}}{q'_k} \cdot x_{k+1}^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]\right\}^{\frac{1}{r}}$$
$$\leqslant \left\{\sum_{i=1}^{k-1} q_i \cdot f(x_i) + (q_k + q_{k+1}) \cdot \left[\frac{q_k}{q'_k} \cdot f(x_k) + \frac{q_{k+1}}{q'_k} \cdot f(x_{k+1})\right]\right\}^{\frac{1}{r}}$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{k-1} q_i \cdot f(x_i) + q_k \cdot f(x_k) + q_{k+1} \cdot f(x_{k+1})\right]^{\frac{1}{r}}$$
$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{k+1} p_i \cdot f(x_i)}{\sum_{i=1}^{k+1} p_i}\right]^{\frac{1}{r}}$$
$$= M_{k+1}^r[f(x_i), p_i],$$
及归纳法原理,(7 - 4) 式即证.

有了定理 2,许多结论均成为本定理的简单推论.

由定理 2,取 $r = 1$,则有

推论 1 (即为本章中的定理 1,略).

由定理 2,分别取 $r = 0, -1, 2$,则有

推论 2 $\left[\prod_{i=1}^{n} f^{p_i}(x_i)\right]^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \geqslant f\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}\right].$ (7 - 5)

推论 3 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{f(x_i)}} \geqslant f\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}}\right).$ (7 - 6)

推论 4 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot f^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \geqslant f^2\left(\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}\right).$ (7 - 7)

我们再给出 m 类广义凸函数的概念与性质.

设正值连续函数 $f(x)$ 定义在区间 $I\subseteq\mathbf{R}^{+}$ 上,如果对于任意 $x_1,x_2\in I$ 和 $p_1>0$, $p_2>0,m\in\mathbf{R},r\in\mathbf{R}$,有 $M_2^m[f(x_i),p_i]\geqslant f[M_2^r(x_i,p_i)]$, (7 - 8)
则说 $f(x)$ 在 I 上是 m 类广义下凸的.如果(7 - 8)式中等号当且仅当 $x_1=x_2,m=r$ 时成立,则说 $f(x)$ 在 I 上为 m 类广义严格下凸的.

如果(7 - 8)式中不等号反向,则说 $f(x)$ 在 I 上是 m 类广义(严格)上凸的.

显然,当 $m=r$ 时,(7 - 8)式即为(7 - 3)式,此时 $f(x)$ 为一般的广义下凸函数.

若取 $p_1=p_2=\dfrac{1}{2},m=0,r$ 取特殊值时,有

$r=0$ 时,(7 - 8)式变为$\sqrt{f(x)_1\cdot f(x_2)}\geqslant f(\sqrt{x_1\cdot x_2})$,

此即为前面所说的 $f(x)$ 为"几何下凸"函数,此时,也可说 $f(x)$ 为"0类几何下凸"函数.

$r=-1$ 时,(7 - 8)式变为$\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}\geqslant f\left(\dfrac{2x_1\cdot x_2}{x_1+x_2}\right)$,

此时,可说 $f(x)$ 为"0类调和下凸"函数.

$r=1$ 时,(7 - 8)式变为$\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}\geqslant f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$,

此时,可说 $f(x)$ 为"0类算术下凸"函数.

$r=2$ 时,(7 - 8)式变为$\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}\geqslant f\left(\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$,

此时,可说 $f(x)$ 为"0类平方下凸"函数.

…

例 3 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^k}+a(x>0,a,k\in\mathbf{R}^{+})$,试证它是0类算术下凸函数.

证明 由$\left(\dfrac{1}{x_1^k}+a\right)\left(\dfrac{1}{x_2^k}+a\right)\geqslant\left[\dfrac{1}{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^k}+a\right]^2$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{1}{x_1^k}+\frac{1}{x_2^k}\right)+\frac{1}{x_1^k\cdot x_2^k}\geqslant\frac{2a}{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^k}+\frac{1}{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^k},$$

并注意$\dfrac{1}{x_1^k\cdot x_2^k}\geqslant\dfrac{1}{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^{2k}},\dfrac{1}{x_1^k}+\dfrac{1}{x_2^k}\geqslant\dfrac{2}{(\sqrt{x_1\cdot x_2})^k}\geqslant\dfrac{2}{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^k}$,即证.

m 类广义凸函数有如下性质:

定理 3 设 $f(x)$ 在区间 $I\subseteq\mathbf{R}^{+}$ 上是 m 类广义凸函数,则对任意的 $x_i\in I$ 及 $p_i>$

$0(i=1,2,\cdots,n)$，有 $M_n^m[f(x_i),p_i]\geqslant f[M_n^r(x_i,p_i)]$. (7－9)

若 $f(x)$ 在 I 上是 m 类广义严格下凸的，则(7－9)式中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，$m=r$ 时成立.

若 $f(x)$ 在 I 上是 m 类广义(严格)上凸的，则(7－9)式中不等号反向.

证明 当 $m=0$ 时的证明可参见习题B中第1题；当 $m\neq 0$ 时，$r\neq 0$($r=0$ 可类似证)时，类似于定理2的证明而证.

当 $n=2$ 时，由 m 类广义下凸函数的定义即得 $M_2^m[f(x_i),p_i]\geqslant f[M_2^r(x_i,p_i)]$.

假设当 $n=k$ 时，(7－9)式成立，即有 $M_k^m[f(x_i),p_i]\geqslant f[M_k^r(x_i,p_i)]$.

当 $n=k+1$ 时，令 $q_j=\dfrac{p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}(j=1,2,\cdots,n)$，则 $\sum\limits_{j=1}^{n}q_j=1$. 又令 $q'_k=q_k+q_{k+1}$，

$x'^r_k=\dfrac{q_k}{q'_k}\cdot x_k^r+\dfrac{q_{k+1}}{q'_k}\cdot x_{k+1}^r$，易知 $x'_k\in I$，且

$$q_k\cdot x_k^r+q_{k+1}\cdot x_{k+1}^r=q'_k\cdot x'^r_k,\ \sum_{j=1}^{k-1}q_j+q'_k=1.$$

由
$$f[M_{k+1}^r(x_i,p_i)]=f\left[\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}p_i\cdot x_i^r}{\sum\limits_{i=1}^{k+1}p_i}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

$$=f\left[\left(\sum_{i=1}^{k+1}q_i\cdot x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]=f\left[\left(q_1x_1^r+\cdots+q_{k-1}\cdot x_{k-1}^r+q'_k\cdot x'^r_k\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

$$\leqslant\left[\sum_{i=1}^{k-1}q_i\cdot f^m(x_i)+q'_k\cdot f^m(x'_k)\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{k-1}q_i\cdot f^m(x_i)+(q_k+q_{k+1})\cdot f^m\left[\left(\frac{q_k}{q'_k}\cdot x_k^r+\frac{q_{k+1}}{q'_k}\cdot x_{k+1}^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]\right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{k-1}q_i\cdot f^m(x_i)+(q_k+q_{k+1})\cdot\left[\frac{q_k}{q'_k}\cdot f^m(x_k)+\frac{q_{k+1}}{q'_k}\cdot f(x_{k+1})\right]\right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{k-1}q_i\cdot f^m(x_i)\right]^{\frac{1}{m}}=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}p_i\cdot f^m(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{k+1}p_i}\right]^{\frac{1}{m}}=M_{k+1}^m[f(x_i),p_i],$$

及归纳法原理，(7－9)式获证.

有了定理3，许多结论也成为本定理的简单推论. 例如，令 $m=r$，定理3即为定理2，即

推论 1 (即本章定理 2,略).

取 $m=0$,即有

推论 2 $M_n^0[f(x_i),p_i]\geqslant f[M_n^r(x_i,p_i)]$. (7 - 10)

在定理 3 中,令 $m=0,p_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$,取 $r=-1,0,1,2$,则有

推论 3 $$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)}\geqslant f\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\right).\qquad(7-11)$$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)}\geqslant f\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\right).\qquad(7-12)$$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)}\geqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right).\qquad(7-13)$$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)}\geqslant f\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right).\qquad(7-14)$$

诸如上面的推论还可以写出若干,留给读者.

为了应用的方便,我们还有如下的:

定理 4 设 $f(x)$ 在区间 $I\subseteq\mathbf{R}^+$ 上是广义下凸函数,则对任意的 $x_i\in I$ 及 $p_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,$m\in\mathbf{R},r\in\mathbf{R}$,且 $m\geqslant r$,有 $M_n^m[f(x_i),p_i]\geqslant f[M_n^r(x_i,p_i)]$. (7 - 15)

若 $f(x)$ 在 I 上是广义严格下凸的,则(7 - 15)式中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

若 $f(x)$ 在 I 上是广义(严格)上凸的,则(7 - 15)式中不等号反向.

证明 由(7 - 2)式,并考虑幂函数 $g(y)=y^{\mu}(y>0)$,则知 $g(y)=y^{\mu}(0<\mu\leqslant 1)$ 为上凸函数(例 1),从而有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot y_i^{\mu}}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\leqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\mu}.$$

令 $0<\alpha\leqslant\beta$,则 $\mu=\frac{\alpha}{\beta}$.再令 $x_i^{\beta}=y_i$,则

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot x_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot x_i^{\beta}}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\frac{1}{\beta}}.\qquad(7-16)$$

同理,可推得当 $\alpha \leqslant \beta$(其中 $\alpha < 0$ 或 $\alpha \leqslant \beta < 0$)时,均有(7-16)式成立,于是当 $m \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R}$,且 $m \geqslant r$ 时,对于正值连续函数 $f(x)$,有

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot f^m(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{m}} \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{r}} \quad (m \cdot r \neq 0),$$

($m = 0$ 或 $r = 0$ 或 $m = r = 0$ 时情形略.)

即 $\quad M_n^m[f(x_i), p_i] \geqslant M_n^r[f(x_i), p_i]$. (7-17)

再注意到定理2,即(7-4)式,$M_n^r[f(x_i), p_i] \geqslant f[M_n^r(x_i, p_i)]$,故当 $m \geqslant r$ 时,有(7-15)式,即 $M_n^m[f(x_i), p_i] \geqslant f[M_n^r(x_i, p_i)]$.

对于琴生不等式(即(7-2)式),我们已经知道它有极为广泛的应用,由此可知,定理2~4的应用范围和前景将会更加宽广和诱人.这些定理都是将涉及 $n(n > 2)$ 个变元的不等式或函数最(极)值问题转化为讨论两个变元的较简单的不等式或函数最(极)值,这无疑是一种证明某些不等式或求解某些最(极)值问题的简单快捷的统一方法.

例4 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$,且 $a + b + c = 1$,求证:

$$(a + \frac{1}{a})^3 + (b + \frac{1}{b})^3 + (c + \frac{1}{c})^3 \geqslant \frac{1000}{9}.$$

证法1 考虑函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}(x > 0)$,取 $x_1, x_2 > 0$,则由

$(x_1 + x_2)^2 \geqslant 4x_1x_2$,有 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geqslant \frac{4}{x_1 + x_2}$,

$$\therefore \quad \frac{1}{2}[(x_1 + \frac{1}{x_1}) + (x_2 + \frac{1}{x_2})] \geqslant \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{2}{x_1 + x_2},$$

即 $\quad M_2^1[f(x_i), \frac{1}{2}] \geqslant f[M_2^1(x_i, \frac{1}{2})]$.

由(7-15)式,有 $M_3^3[f(x_i), \frac{1}{3}] \geqslant f[M_3^1(x_j, \frac{1}{3})]$,

即
$$\left[\frac{(a + \frac{1}{a})^3 + (b + \frac{1}{b})^3 + (c + \frac{1}{c})^3}{3}\right]^{\frac{1}{3}} \geqslant \frac{a + b + c}{3} + \frac{3}{a + b + c},$$

故
$$(a + \frac{1}{a})^3 + (b + \frac{1}{b})^3 + (c + \frac{1}{c})^3 \geqslant \frac{1000}{9}.$$

证法2 考虑函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}(x > 0)$,取 $x_1, x_2 > 0$,则由

$$(x_1+\frac{1}{x_1})\cdot(x_2+\frac{1}{x_2}) = x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$$

$$\geqslant x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}+2=(\sqrt{x_1x_2}+\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}})^2,$$

知,有 $M_2^0[f(x_i),\frac{1}{2}]\geqslant f[M_2^0(x_i,\frac{1}{2})]$.

由(7-4)式或(7-5)式,有 $M_3^0[f(x_i),\frac{1}{3}]\geqslant f[M_3^0(x_i,\frac{1}{3})]$,

即 $[(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})(c+\frac{1}{c})]^{\frac{1}{3}}\geqslant\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$.

又由 $1=a+b+c\geqslant3\sqrt[3]{abc}$,有 $\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{1}{3}$ 及 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上为减函数,从而有 $[(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})(c+\frac{1}{c})]^{\frac{1}{3}}\geqslant\frac{1}{3}+3$.

故 $(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3+(c+\frac{1}{c})^3\geqslant3(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})(c+\frac{1}{c})\geqslant\frac{1000}{9}$.

例 5 已知 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,$a,m\in\mathbf{R}^+$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=s$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}(a+\frac{1}{x_i^m})^n\geqslant n[(\frac{n}{s})^m+a]^n.$$

证明 考虑函数 $f(x)=\frac{1}{x^k}+a(x>0,a,k\in\mathbf{R}^+)$.由例 3 知,此函数为 0 类算术下凸函数,即有 $M_2^0[f(x_i),\frac{1}{2}]\geqslant f[M_2^1(x_i,\frac{1}{2})]$.

由(7-13)式或(7-9)式,有 $M_n^0[f(x_i),\frac{1}{n}]\geqslant f[M_n^1(x_i,\frac{1}{n})]$.

从而 $$\prod_{i=1}^{n}(a+\frac{1}{x_i^m})\geqslant[a+\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^m}]^n=\left[\left(\frac{n}{s}\right)^m+a\right]^n,$$

故 $$\sum_{i=1}^{n}(a+\frac{1}{x_i^m})^n\geqslant n\prod_{i=1}^{n}(a+\frac{1}{x_i^m})\geqslant n\left[\left(\frac{n}{s}\right)^m+a\right]^n.$$

此例也还有类似于例 4 的证法 1 的证明,留给读者作为练习.

【解题思维策略分析】

1. 注意将某一函数多个变元的取值问题转化为两个变元的取值问题

例 6 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,$a\in\mathbf{R}^+$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=s\leqslant a$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{a+x_i}{a-x_i}\geqslant\left(\frac{na+s}{na-s}\right)^n.$$

证明 考虑函数 $f(x)=\dfrac{a+x}{a-x}$,对于 $x_1,x_2\in(0,s)$,而

$$\left(\frac{a+x_1}{a-x_1}\right)\left(\frac{a+x_2}{a-x_2}\right)\geqslant\left(\frac{a+\frac{x_1+x_2}{2}}{a-\frac{x_1+x_2}{2}}\right)^2 \tag{*}$$

$$\Leftrightarrow[a^2+a(x_1+x_2)+x_1x_2]\cdot[a^2-a(x_1+x_2)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}]$$

$$\geqslant[a^2-a(x_1+x_2)+x_1x_2]\cdot[a^2+a(x_1+x_2)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}]$$

$\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2\geqslant 4x_1x_2$.

于是(*)式成立.从而,由(7-13)式,有

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{a+x_i}{a-x_i}\geqslant\left[\frac{a+\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{a-\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\right]^n,$$

故 $$\prod_{i=1}^{n}\frac{a+x_i}{a-x_i}\geqslant\left(\frac{na+s}{na-s}\right)^n.$$

例7 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, $m\in\mathbf{R}^+$, $a\geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=s\leqslant n$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a\right)\geqslant\left[\left(\frac{s}{n}\right)^m+\left(\frac{n}{s}\right)^m+a\right]^n.$$

证明 考虑函数 $f(x)=x^m+\dfrac{1}{x^m}+a$,对于 $x_1,x_2\in(0,s)$,我们可证明有

$$[f(x_1)\cdot f(x_2)]^{\frac{1}{2}}\geqslant f[(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}]. \tag{*}$$

事实上,$(x_1^m+\dfrac{1}{x_1^m}+a)(x_2^m+\dfrac{1}{x_2^m}+a)\geqslant\left[(\sqrt{x_1x_2})^m+\dfrac{1}{(\sqrt{x_1x_2})^m}+a\right]^2$

$$\Leftrightarrow\frac{x_2^m}{x_1^m}+\frac{x_1^m}{x_2^m}+a(x_1^m+x_2^m+\frac{1}{x_1^m}+\frac{1}{x_2^m})\geqslant 2+2a\left(\sqrt{x_1^m\cdot x_2^m}+\frac{1}{\sqrt{x_1^m\cdot x_2^m}}\right).$$

又 $\dfrac{x_2^m}{x_1^m}+\dfrac{x_1^m}{x_2^m}\geqslant 2$, $x_1^m+x_2^m\geqslant 2\sqrt{x_1^m\cdot x_2^m}$, $\dfrac{1}{x_1^m}+\dfrac{1}{x_2^m}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{x_1^m\cdot x_2^m}}$,

从而,(*)式成立.

于是,由(7-12)式,有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a\right)}\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i^m}+\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i^m}}+a=\frac{\left(1-\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i^m}\right)^2}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i^m}}+2+a.$$

而 $$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i^m}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^m=\left(\frac{s}{n}\right)^m\leqslant 1,$$

则 $$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a\right)}\geqslant\frac{\left[1-\left(\frac{s}{n}\right)^m\right]^2}{\left(\frac{s}{n}\right)^m}+2+a=\left(\frac{s}{n}\right)^m+\left(\frac{n}{s}\right)^m+a.$$

故 $$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a\right)\geqslant\left[\left(\frac{s}{n}\right)^m+\left(\frac{n}{s}\right)^m+a\right]^n.$$

2. 关注这种解题策略的广延性

例 8 已知 $m\geqslant 0$，$f(x)=x^2+\sqrt{m}x+m+1$.求证:对一切 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，均有 $f(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})\leqslant\sqrt[n]{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_n)}$，其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.　　(《中等数学》1998 年 1 期奥林匹克训练题)

证明 显然，当 $m\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)=x^2+\sqrt{m}x+m+1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是下凸函数，从而，由(7－12)式即证.下面，我们还是运用广义凸函数的这种解题思维给出它的一个原始证明.

因 $\Delta=(\sqrt{m})^2-4(m+1)<0$，知恒有 $f(x)>0$.

先用数学归纳法证明:对于 $n=2^k$，命题成立.

事实上，当 $k=1$，即 $n=2$ 时，由于

$$\sqrt{m}x_1x_2(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2+(m+1)(x_1-x_2)^2+\sqrt{m}(m+1)(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geqslant 0,$$

则 $$(x_1x_2+\sqrt{m}x_1x_2+m+1)^2\leqslant(x_1^2+\sqrt{m}x_1+m+1)(x_2^2+\sqrt{m}x_2+m+1),$$

即 $f(\sqrt{x_1x_2})\leqslant\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$，其中等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立.

假设 $n=2^k$ 时命题成立，则当 $n=2^{k+1}$ 时，

$$\begin{aligned}f\left(\sqrt[2^{k+1}]{x_1x_2\cdots x_n}\right)&=f\left(\sqrt{\sqrt[2^k]{x_1x_2\cdots x_{2^k}}\cdot\sqrt[2^k]{x_{2^k+1}\cdot x_{2^k+2}\cdots x_{2^{k+1}}}}\right)\\&\leqslant\sqrt{f\left(\sqrt[2^k]{x_1x_2\cdots x_{2^k}}\right)\cdot f\left(\sqrt[2^k]{x_{2^k+1}x_{2^k+2}\cdots x_{2^{k+1}}}\right)}\\&\leqslant\sqrt{\sqrt[2^k]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{2^k})}\cdot\sqrt[2^k]{f(x_{2^k+1})\cdots f(x_{2^{k+1}})}}\\&=\sqrt[2^{k+1}]{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_{2^{k+1}})},\end{aligned}$$

对于任意自然数 n，必存在 k，使得 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$.

记 $G=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$,则

$$f(G)=\sqrt[2^{k+1}]{x_1\cdot x_2\cdots x_n\cdot G\cdot G\cdots G}$$

$$\leqslant\sqrt[2^{k+1}]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\cdot[f(G)]^{2^{k+1}-n}},$$

即 $[f(G)]^n\leqslant f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_n)$,

$$f(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})\leqslant\sqrt[n]{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_n)},$$

其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

例9 已知 $5n$ 个实数 $a_i,b_i,c_i,d_i,e_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 都大于1,且记 $A=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, $B=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$, $C=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}C_i$, $D=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$, $E=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}e_i$,求证:$\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{a_ib_ic_id_ie_i+1}{a_ib_ic_id_ie_i-1}\geqslant\left(\frac{ABCDE+1}{ABCDE-1}\right)^n$.

(1994年中国国家集训队选拔赛试题)

证明 设 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$,则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内是减函数,对于 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$,可证得 $[f(x_1)\cdot f(x_2)]^{\frac{1}{2}}\geqslant f[(x_1\cdot x_2)^{\frac{1}{2}}]$. $\quad(*)$

事实上,$\frac{(x_1+1)}{(x_1-1)}\cdot\frac{(x_2+1)}{(x_2-1)}\geqslant\left(\frac{\sqrt{x_1x_2}+1}{\sqrt{x_1x_2}-1}\right)^2$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1x_2+x_1+x_2+1}{x_1x_2-x_1-x_2+1}\geqslant\frac{x_1x_2+2\sqrt{x_1x_2}+1}{x_1x_2-2\sqrt{x_1x_2}+1}.$$

由 $x_1+x_2\geqslant2\sqrt{x_1x_2}$ 知上式成立,从而$(*)$式成立.故可由(7-12)式,有

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+1}{x_i-1}\geqslant\left(\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}+1}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}-1}\right)^n.$$

上式中,令 $x_i=a_ib_ic_id_ie_i$,得

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{a_ib_ic_id_ie_i+1}{a_ib_ic_id_ie_i-1}\geqslant\left(\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_ib_ic_id_ie_i}+1}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_ib_ic_id_ie_i}-1}\right)^n.$$

而 $\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{n}a_ib_ic_id_ie_i}\leqslant ABCDE$,则

$$\frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_ib_ic_id_ie_i}+1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_ib_ic_id_ie_i}-1} \geqslant \frac{ABCDE+1}{ABCDE-1}.$$

故 $$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_ib_ic_id_ie_i+1}{a_ib_ic_id_ie_i-1} \geqslant \left(\frac{ABCDE+1}{ABCDE-1}\right)^n.$$

注 本章中的例 6、7、9 的解法属于李康海老师的成果.

【模拟实战】

习题 A

1. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数，$m\in\mathbf{R}^+$.求证：$\prod_{i=1}^{n}(m+x_i)\geqslant\left(m+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\right)^n$.

2. 设 $x_i\in\mathbf{R}(i=1,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，$k,m\in\mathbf{N}^+$.求证：$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^k+\frac{1}{x_i^k}\right)^m\geqslant n\left(n^k+\frac{1}{n^k}\right)^m$.

3. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$.求证：$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-1\right)\geqslant(n-1)^n$.

习题 B

1. 设 $f(x)$ 是区间 I 上恒正的连续函数，$I\subseteq\mathbf{R}^+$，I 可以是开的或闭的、有限或无限的区间.对于 $x_i\in I(i=1,2,\cdots,n)$，若 $M_2^0[f(x_i),p_i]=f^{p_1}(x_1)\cdot f^{p_2}(x_2)\geqslant f[M_2^r(x_i,p_i)](p_1,p_2>0$，且 $p_1+p_2=1)$.求证：$M_n^0[f(x_i),p_i]=\prod_{i=1}^{n}f^{p_i}_{(x_i)}\geqslant f[M_n^r(x_i,p_i)]$，其中 $p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}$ 且 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.

2. 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$m\in\mathbf{R}^+$，$a>0$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=s\leqslant n$.求证：
$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a\right)^n\geqslant n\left[\left(\frac{s}{n}\right)^m+\left(\frac{n}{s}\right)^m+a\right]^n.$$

第八章　函数方程的求解

【基础知识】

含有未知函数的等式叫函数方程.使这个等式成立的未知函数叫做函数方程的解.求函数方程的(一些或全体)解的过程叫做解函数方程.

我们熟悉的偶函数、奇函数、周期函数等,其实都是某些特定函数方程的解.

函数方程也可能无解,或没有具备所要求的条件的解.函数方程与"数的"方程很不一样,它有自己的特点,内容非常丰富.因为解函数方程是寻求另未知函数,所以求解起来也比较复杂.

函数方程变化多,求解技巧性很强,往往涉及不同领域的数学知识.特别是附加了条件的函数,更是五花八门,各有巧妙,我们只能粗略地归纳一下它的各种典型求解方法.

【典型例题与基本方法】

1. 柯西法

这是一种由解柯西(Cauchy)方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 而归纳出来的一种逐步逼近方法.

例1　设 $f(x)$ 为定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的单调函数,试解函数方程

$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$.

解　由 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$,用数学归纳法,得

$f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_n)=f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$ 时,有 $[f(x)]^n=f(nx)$.　(*)

若 $x=1$, $f(n)=[f(1)]^n$.令 $f(1)=a$,得 $f(n)=a^n$.

在(*)式中,令 $x=\frac{1}{n}$,可得 $[f(\frac{1}{n})]^n=f(1)$.

因 $f(x)$ 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上, n 为偶数时,必有 $f(1)\geqslant 0$,这样 $a\geqslant 0$,这时 $f(\frac{1}{n})=a^{\frac{1}{n}}$.

若 m 为正整数,利用上式,得

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=nf\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}.$$

在原方程中,令 $y=0$,有 $f(x)\cdot f(0)=f(x)$,因 $f(x)$ 单调,知 $f(x)$ 不恒为零,从而 $f(0)=1=a^0$.

在原方程中,令 $y=-x=-\frac{m}{n}(n,m\in\mathbf{N})$,则有

$$f\left(-\frac{m}{n}\right)\cdot f\left(\frac{m}{n}\right)=f(0),\text{即}\quad f\left(-\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{m}{n}\right)}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

又因 $f(-\frac{m}{n})$ 有意义,故 $a\neq 0$,则必有 $a>0$.

这样,我们便在有理数集内求得了函数方程的解为 $f(x)=a^x(a>0)$.

又因 $f(x)$ 单调,不能恒为 1,则 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 是指数函数.

当 $x=\alpha$ 是无理数时,设 a_i,b_i 分别是 α 的精确到小数点后第 i 位,不是近似值与过剩近似值.

当 $f(x)$ 为增函数,有 $f(a_i)<f(\alpha)<f(b_i)$;

当 $f(x)$ 为减函数,有 $f(a_i)>f(\alpha)>f(b_i)$.

而 $f(a_i)=a^{a_i}$,$f(b_i)=b^{b_i}$,于是可得 $f(\alpha)=a^\alpha(a>0,a\neq 1)$.从而原函数方程的解为 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,其中 $a=f(1)$.

2. 代换法

例 2 求解函数方程 $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\cos x(x\neq 0,\pm 1)$.

解 设 $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$,则 $g^{(4)}(x)=g[g(g(g(x)))]=x$,并且

$$g^{(2)}(x)=g(g(x))=-\frac{1}{x},\ g^{(3)}(x)=g(g(g(x)))=\frac{1+x}{1-x}.$$

于是,题设方程变为 $f[g(x)]+f[g^{(2)}(x)]+f[g^{(3)}(x)]=\cos x$.

把 x 换成 $g(x)$,得 $\quad f[g^{(2)}(x)]+f[g^{(3)}(x)]+f(x)=\cos g(x)$.

再继续换两次,有 $\quad f[g^{(3)}(x)]+f(x)+f(g(x))=\cos g^{(2)}(x)$,

$$f(x)+f(g(x))+f(g^{(2)}(x))=\cos g^{(3)}(x).$$

由以上几式整理,得

$$3f(x)=\cos g(x)+\cos g^{(2)}(x)+\cos g^{(3)}(x)-2\cos x.$$

故 $\quad f(x)=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{x-1}{x+1}+\cos\frac{1}{x}+\cos\frac{1+x}{1-x}-2\cos x\right).$

3. 特值归纳验证法

例 3 试求所有函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$,使得对一切 $n\in\mathbf{Z}$,有 $f[f(n)]+f(n)=2n+3$,且 $f(0)=1$.

解 $n=0$ 时,$f[f(0)]+f(0)=f(1)+f(0)=f(1)+1=2\cdot 0+3$,有 $f(1)=2$.

再令 $n=1$,则 $f[f(1)]+f(1)=2\cdot 1+3=5$,即

$f(2)+2=5$,有 $f(2)=3$.

由此猜想,$f(n)=n+1$.

需对 n 在整个整数集 $\mathbf{Z}$ 上归纳.

对 $n\geqslant 0$,若 $n\leqslant k$ 时,$f(n)=n+1$,则

$f[f(k)]+f(k)=2k+3$,$f(k+1)+k+1=2k+3$,

即 $f(k+1)=2k+3$.于是,对 $n\geqslant 0$ 且 $n\in\mathbf{Z}$,$f(n)=n+1$.

设对某个 $k\leqslant 0$,当 $n\geqslant k$ 时,有 $f(n)=n+1$.

下面证明:当 $n=k-1$ 时,有 $f(k-1)=k$.

令 $f(k-1)=a\in\mathbf{Z}$,则

$f(a)=f[f(k-1)]=2(k-1)+3-f(k-1)=2k+1-a$,

从而 $f(2k+1-a)=f[f(a)]=2a+3-(2k+1-a)=3a-2k+2$,

$$\begin{aligned}f(3a-2k+2)&=f[f(2k+1)-a]=2(2k+1-a)+3-f(2k+1-a)\\&=6k-5a+3.\end{aligned}$$

若 $2k+1-a\geqslant k$,由归纳假设

$f(2k+1-a)=2k+2-a$,即 $3a-2k+2=2k+2-a$,有 $a=k$.

若 $3a+2-2k\geqslant k$,由归纳假设

$f(3a+2-2k)=3a+3-2k=6k-5a+3$,有 $a=k$.

若 $\begin{cases}2k+1-a<k,\\3a+2-2k<k,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a>k+1,\\a<k-\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 出现矛盾.

于是,$f(k-1)=k$.

综上,对一切 $n\in\mathbf{Z}$,有 $f(n)=n+1$.

4. 特值探索推导法

这种方法就是选出一些适当的特殊值代入给定的函数方程中,以导出有用的关系来进行探索其解.

例 4 设 $a>0$,函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 满足 $f(a)=1$.如果对任意正实数 x,y 有

$$f(x)\cdot f(y)+f\left(\frac{a}{x}\right)\cdot f\left(\frac{a}{y}\right)=2f(xy).\qquad(*)$$

求证:$f(x)$ 为常数. (2006 年中国女子奥林匹克题)

证明 在(*)式中令 $x=y=1$,得 $f^2(1)+f^2(a)=2f(1)$,即 $[f(1)-1]^2=0$,所以 $f(1)=1$.

在(*)式中令 $y=1$,得 $f(x)\cdot f(1)+f(\frac{a}{x})\cdot f(a)=2f(x)$,即 $f(x)=f(\frac{a}{x})$, $x>0$.

在(*)式中取 $y=\frac{a}{x}$,得 $f(x)\cdot f(\frac{a}{x})+f(\frac{a}{x})+f(\frac{a}{x})\cdot f(x)=2f(a)$,

即 $f(x)=f(\frac{a}{x})=1$.

从而 $f^2(x)=1, x>0$.

在(*)式中取 $x=y=\sqrt{t}$,得 $f^2(\sqrt{t})+f^2(\frac{a}{\sqrt{t}})=2f(t)$,

所以 $f(t)>0$,故 $f(x)=1, x>0$.

例5 求一个函数 $f(m,n)$ 满足下述条件:对每对非负整数 m,n,

(1)$2f(m,n)=2+f(m+1,n-1)+f(m-1,n+1)(m\geqslant1,n\geqslant1)$;

(2)$f(m,0)=f(0,n)=0$. (1993年韩国奥林匹克题)

解 由条件(1),有 $f(m,n)-f(m-1,n-1)=f(m+1,n-1)-f(m,n)+2$.

在上式中,用 $m-k,n+k$(非负整数 $k\leqslant m$)分别代替 m,n,得

$$f(m-k,n+k)-f(m-k-1,n+k+1)$$
$$=f(m-k+1,n+k-1)-f(m-k,n+k)+2.$$

又在上式中,依次令 $k=0,1,2,\cdots,m-1$,得 m 个等式,再把这 m 个等式相加,得

$$\sum_{k=0}^{m-1}[f(m-k,n+k)-f(m-k-1,n+k+1)]$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}[f(m-k+1,n+k-1)-f(m-k,n+k)+2].$$

利用条件(2),化简,有

$f(m,n)=f(m+1,n-1)-f(1,n+m-1)+2m$,即

$$f(m+1,n-1)-f(m,n)=f(1,n+m-1)-2m. \quad ①$$

在上式中,我们用 $m+k,n-k$(非负整数 $k\leqslant n$)分别代替 m,n,有

$$f(m+k+1,n-k+1)-f(m+k,n-k)=f(1,n+m-1)-2(m+k).$$

又在上式中,依次令 $k=0,1,2,\cdots,n-1$,得到 n 个等式,再把这 n 个等式相加,得

$$\sum_{k=0}^{n-1}[f(m+k+1,n-k-1)-f(m+k,n-k)]$$
$$=nf(1,n+m-1)-2\sum_{k=1}^{n-1}(m+k).$$

再利用条件(2)化简,有

$-f(m,n)=nf(1,n+m-1)-2mn-n(n-1)$,

即 $\quad f(m,n)=(2m+n-1)n-nf(1,n+m-1)$. ②

在①式中,再用 $m-k,n+k$(非负整数 $k\leqslant n$)分别代替 m,n,有

$f(m-k+1,n+k-1)-f(m-k,n+k)=f(1,n+m-1)-2(m-k)$.

在上式中,依次令 $k=1,2,\cdots,m$,得到 m 个等式,再把这些等式相加,有

$$\sum_{k=1}^{m}[f(m-k+1,n+k-1)-f(m-k,n+k)]$$

$$=mf(1,n+m-1)-2\sum_{k=1}^{m}(m-k).$$

利用条件(2),并化简,得

$f(m,n)=mf(1,n+m-1)-m(m-1)$. ③

由②$\cdot m+$③$\cdot n$,得

$(m+n)\cdot f(m,n)=mn(m+n)$,

因此,当 m,n 不全为零时,我们有 $f(m,n)=mn$.

由条件(2)知,上式对 $m=0$ 且 $n=0$ 也成立.

经检验,函数 $f(m,n)=mn$ 满足题目中的所有条件.因此,所求函数为 $f(m,n)=mn$.

【解题思维策略分析】

1. 紧扣题设条件,综合运用各种方法

例6 (1)设函数 $f(x)$ 对所有 $x>0$ 有定义,且满足下面条件:

(i)函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增;

(ii)对所有 $x>0$,均有 $f(x)>-\dfrac{1}{x}$;

(iii)对所有 $x>0$,均有 $f(x)\cdot f\left[f(x)+\dfrac{1}{x}\right]=1$.

求函数值 $f(1)$.

(2)给出一个满足(1)中三个条件的函数. (1988年全苏奥林匹克题)

解 (1)设 $f(1)=a$,则由题目条件(iii),当 $x=1$ 时,有 $af(a+1)=1$,即 $f(a+1)=\dfrac{1}{a}$.

再令 $x=a+1$,则由条件(iii)得到

$f(a+1)\cdot f\left[f(a+1)+\dfrac{1}{a+1}\right]=1$,

即 $f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=a$，因此 $f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=f(1)$.

由条件(i)得到 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1$，解得 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

如果 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则 $1<a=f(1)<f(1+a)=\frac{1}{a}<1$，矛盾.

因此，$f(1)=a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(2)记 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，并且设 $f(x)=\frac{a}{x}$，则当 $0<x_1<x_2$ 时，$f(x_2)-f(x_1)=\frac{a(x_1-x_2)}{x_1x_2}>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$.

因此，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增，即 $f(x)$ 满足条件(i). 又由于 $f(x)+\frac{1}{x}=\frac{3-\sqrt{5}}{2x}$，则 $f(x)$ 满足条件(ii).

最后，由于 $f(x)\cdot f\left[f(x)+\frac{1}{x}\right]=\frac{9}{x}\cdot\frac{a}{\frac{a}{x}+\frac{1}{a}}=\frac{a^2}{a+1}=1$，

即 $f(x)$ 满足条件(iii)，所以函数 $f(x)=\frac{a}{x}$ 合乎题中三个条件.

例 7 设 $I=[0,1]$，$G=\{(x,y)\mid x\in I,y\in I\}$，求 G 到 I 的所有映射 f，使得对任何 $x,y,z\in I$ 都有

(1) $f[f(x,y),z]=f[x,f(y,z)]$；

(2) $f(x,1)=x$，$f(1,y)=y$；

(3) $f(zx,zy)=z^k\cdot f(x,y)$，其中 k 是与 x,y,z 都无关的正数.（CMO－6 试题）

解 由条件(3)和(2)，有

$$f(x,y)=y^k\cdot f\left(\frac{x}{y},1\right)=y^{k-1}\cdot x\ (0\leqslant x\leqslant y,0<y),\qquad ①$$

$$f(x,y)=x^k\cdot f\left(1,\frac{y}{x}\right)=x^{k-1}\cdot y\ (0\leqslant y\leqslant x,0<x).\qquad ②$$

取 $0<x<y$，且 x 充分小，使得 $y^{k-1}\cdot x<z$，$x<z^{k-1}\cdot y$.

由条件(1)和(2)式，又有

$$\begin{aligned}z^{k-1}y^{k-1}x&=f(y^{k-1}\cdot x,z)=f[f(x,y),z]\\&=f[x,f(y,z)]=f(x,z^{k-1}\cdot y)\\&=(z^{k-1}\cdot y)^{k-1}\cdot x.\end{aligned}$$

由此得到$(k-1)(k-2)=0$,解得 $k_1=1,k_2=2$.

将 k_1 和 k_2 的值分别代入 ① 和 ② 式,得到

$$f_1(x,y)=\begin{cases}x,\text{当 } 0\leqslant x\leqslant y,0<y\text{ 时},\\ y,\text{当 } 0\leqslant y\leqslant x,0<x\text{ 时}.\end{cases}\qquad ③$$

$$f_2(x,y)=xy,\text{当}(x,y)\neq(0,0).\qquad ④$$

当 $x=y=0$ 时,由条件(3),直接可得

$$f(0,0)=f(z\cdot 0,z\cdot 0)=z^k\cdot f(0,0),$$

其中 $z\in I$ 是任意的,故必有 $f(0,0)=0$.

这意味着对由 ③ 和 ④ 式给出的函数 $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$,应补充定义

$f_1(0,0)=0,f_2(0,0)=0$.

容易验证:这两个函数都满足条件(1) ~ (3).

2. 关注不等式与方程条件的配合运用

例 8 f 是定义在$(1,+\infty)$上且在$(1,+\infty)$中取值的函数,满足条件:对任何 x,$y>1$,及 $u,v>0$,都有 $f(x^u\cdot y^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{4u}}\cdot f(y)^{\frac{1}{4v}}$.试确定所有这样的函数 f.

(CMO - 4 试题)

解 设 f 满足题中的条件,则有 $f(x^u\cdot y^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{4u}}\cdot f(y)^{\frac{1}{4v}}$. ①

取 $u=\frac{1}{2}$,得 $f(x^{\frac{1}{2}}\cdot y^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{2}}\cdot f(y)^{\frac{1}{4v}}$. ②

取 v 使 $y^v=v^{\frac{1}{2}}(x>1,y>1)$,即 $v=\dfrac{\ln x}{2\ln y}$.

于是 $f(x)\leqslant f(x)^{\frac{1}{2}}\cdot f(y)^{\frac{\ln y}{2\ln x}}$,

即 $f(x)^{\frac{1}{2}}\leqslant f(y)^{\frac{\ln y}{2\ln x}}$,亦即 $f(x)^{\ln x}\leqslant f(y)^{\ln y}$. ③

由对称性,得 $f(y)^{\ln y}\leqslant f(x)^{\ln x}$. ④

由 ③ 和 ④,得 $f(x)^{\ln x}\leqslant f(y)^{\ln y}$.

这说明,$f(x)^{\ln x}$ 是一个常数 $c(c>0)$,即

$f(x)^{\ln x}=c,f(x)=c^{\frac{1}{\ln x}}(c>1)$. ⑤

反过来,若 $f(x)=c^{\frac{1}{\ln x}}(c>1)$,则对于 $x,y>1,u,v>0$,我们有

$f(x^u\cdot y^v)=c^{\frac{1}{\ln(x^u\cdot y^v)}}=c^{\frac{1}{u\ln x+v\ln y}}$.

由于,$(u\ln x+v\ln y)^2\geqslant 4uv\cdot\ln x\cdot\ln y$,

因此,$\dfrac{1}{u\ln x+v\ln y}\leqslant\dfrac{u\ln x+v\ln y}{4uv\cdot\ln x\cdot\ln y}=\dfrac{1}{4v\ln y}+\dfrac{1}{4u\ln x}$.

于是,$f(x^u,y^v)=c^{\frac{1}{u\ln x+v\ln y}}\leqslant c^{\frac{1}{u\ln x}+\frac{1}{v\ln y}}=c^{\frac{1}{4u\ln x}}\cdot c^{\frac{1}{4v\ln y}}=f(x)^{\frac{1}{4u}}\cdot f(y)^{\frac{1}{4v}}$.

所以,满足题中条件的函数是 $f(x)=c^{\frac{1}{\ln x}}(c>1)$.

例 9 求适合以下条件的所有函数 $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$.

(1) $f(x)\leqslant 2(x+1)$;

(2) $f(x+1)=\frac{1}{x}[(f(x))^2-1]$. (CMO - 9 试题)

解 由条件(1),可试探用 $f(x)=x+1<2(x+1)$ 代入条件(2)满足,从而可知函数 $f(x)=x+1$ 为所求的一个解.而若试探 $f(x)=2(x+1)$ 则不满足条件(2).

下面证明:$f(x)=x+1$ 是其唯一解,即证 $g(x)=f(x)-(x+1)=0$ 恒成立.

事实上,可把 $f(x)$ 的条件 $\begin{cases}1\leqslant f(x)\leqslant 2(x+1)\\ f(x+1)=\dfrac{(f(x))^2-1}{x}\end{cases}$

转变为 $g(x)$ 的条件 $\begin{cases}1\leqslant g(x)+x+1\leqslant 2(x+1),\\ g(x+1)+x+2=\dfrac{[g(x)+(x+1)]^2-1}{x+1},\end{cases}$

即 $\begin{cases}-x\leqslant g(x)\leqslant x+1,\\ g(x+1)=\dfrac{1}{x}[(g(x))^2]+2(x+1)g(x)+(x+1)^2-1-x(x+2)]\end{cases}$

$$=\frac{1}{x}[(g(x))^2+2(x+1)g(x)]$$

$$=\frac{1}{x}g(x)\cdot[g(x)+x+x+2].$$

注意到 $g(x)+x\geqslant 0$,所以有 $g(x)=\dfrac{x\cdot g(x+1)}{g(x)+x+x+2}$.

因此,由 $-x-1\leqslant g(x)\leqslant x+1$,有 $|g(x)|\leqslant x+1$.

从而,有 $|g(x)|=\dfrac{x|g(x+1)|}{[g(x)+x]+x+2}\leqslant\dfrac{x|g(x+1)|}{x+2}$

$$\leqslant\frac{x(x+2)}{x+2}=x.$$

于是,由 $|g(x)|\leqslant x$,推出 $|g(x+1)|\leqslant x+1$.

从而,有 $|g(x)|\leqslant\dfrac{x(x+1)}{x+2}$.

由此,得 $|g(x+1)|\leqslant\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+3}$,

即有 $|g(x)|\leqslant\dfrac{\dfrac{x(x+1)(x+2)}{x+3}}{x+2}=\dfrac{x(x+1)}{x+3}$.

设 n 为自然数，$|g(x)| \leqslant \frac{x(x+1)}{x+n}$，

则 $\quad |g(x+1)| \leqslant \frac{(x+1)(x+2)}{x+3}$.

于是，$|g(x)| \leqslant \frac{x|g(x+1)|}{x+2} \leqslant \frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+n+1)} = \frac{x(x+1)}{x+n+1}$.

由数学归纳法原理，对一切自然数都有 $|g(x)| \leqslant \frac{x(x+1)}{x+n}$.

取 $n \to \infty$，便推出 $|g(x)| \leqslant 0$，即 $y(x) = 0$ 恒成立.

这就证明了 $g(x) = x+1$ 为唯一解.

注 题设条件(1)中的系数 2 可换成任何大于 1 的常数 c. 此时由 $f(x+1) \leqslant c(x+1)$ 及条件(2)，得 $f^2(x) \leqslant 1 + c(x^2+2x) \leqslant c(x+1)^2$，故 $f(x) \leqslant \sqrt{c}(x+1)$，归纳可证对一切 $n \in \mathbf{N}^+$，$f(x) \leqslant \sqrt[2^n]{c}(x+1)$ 成立. 令 $n \to \infty$，有 $f(x) \leqslant x+1$，于是 $-x \leqslant g(x) \leqslant 0$，仍有 $|g(x)| \leqslant x$.

3. 注意函数基本性质的运用

例 10 求所有的函数 $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$，满足条件

$$f[x+f(y)] = f(x) \cdot f(y) \quad (x, y \in \mathbf{Q}).$$

解 显然 $f = 0$ 符合条件.

设 $f \neq 0$，取 $f(y) \neq 0$，由 $f(y) = f[y - f(y)] \cdot f(y)$，得

$f[y - f(y)] = 1$，即存在 $a \in \mathbf{Q}$，使 $f(a) = 1$.

令 $y = x$ 代入已知条件式，有 $f(x+1) = f(x)$，$x \in \mathbf{Q}$.

所以，$f(x)$ 是周期函数，且 1 为其一个周期. 由此，可知 $f(x+n) = f(x)$，$n \in \mathbf{Z}$.

又因为 $f[n \cdot f(y)] = f[(n-1)f(y) + f(y)]$

$$= f[(n-1)f(y)] \cdot f(y) = \cdots = f(0) \cdot f^n(y),$$

设 $f(g) = \frac{q}{p}$，$p > 0$，$p, q \in \mathbf{Z}$，则 $f(0) = f(q) = f(0) \cdot f^p(y)$.

由于 $f(0) \neq 0$，则 $f^p(y) = 1$，$f(y) = 1$ 或 -1.

若 $f(y) = -1$，则 $f(x-1) = f(x) \cdot f(y) = -f(x)$，仍导出 $f(x) = 0$，于是对一切 $x \in \mathbf{Q}$，$f(y) = 1$.

故所求 $f(x)$ 为 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = 1$.

例 11 设函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，对一切 $x, y \in \mathbf{R}$，满足

$$f[x^2 + f(y)] = y + [f(x)]^2. \qquad ①$$

求 $f(x)$.

解 若取 $x = 0$，并记 $f^2(0) = t$，由 ①，有

$f[f(y)] = y + t.$ ②

由 ②,有 $f[f(x^2 + f(f(y)))] = x^2 + f(f(y)) + t$, ③

注意到 ①,有 $f[f(x^2 + f(f(y)))] = f[f(y) + (f(x))^2]$

$= f[(f(x))^2 + f(y)] = y + [f(f(x))]^2.$ ④

由 ②,③,④ 得 $x^2 + y + 2t = 2y + (x+1)^2$,

即 $2t = t^2 + 2tx$.

故对任意 $x \in \mathbf{R}$,均有 $t = 0$,故 $f(0) = 0$.

于是 ② 式成为 $f[f(y)] = y$. ⑤

当 $x \geqslant 0$ 时,由 ① 和 ⑤,得

$f(x+y) = f[x + f(f(y))] = f(y) + f^2(\sqrt{x}) \geqslant f(y)$,

从而,知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的递增函数,即当 $x \geqslant y$ 时,有 $f(x) \geqslant f(y)$,由此即得 $f(x) = x$.

事实上,若存在 $z \in \mathbf{R}$,使 $f(z) \neq z$,如果 $z > f(z)$,则 $f(z) \leqslant f(f(z)) = z$,矛盾.如果 $z < f(z)$,则 $f(z) \geqslant f(f(z)) = z$,也同样矛盾.

【模拟实战】

习题 A

1. 求所有满足 $f(n+m) + f(n-m) = f(3n)$, $m, n \in \mathbf{Z}^*$, $n \geqslant m$ 的函数 $f: \mathbf{Z}^* \to \mathbf{R}$($\mathbf{Z}^*$ 是非负整数集). (1979 年奥地利 – 波兰竞赛题)
2. 求所有满足 $xf(y) + yf(x) \equiv (x+y) \cdot f(x) \cdot f(y)$, $x, y \in \mathbf{R}$ 的函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. (1968 年保加利亚竞赛题)
3. 求满足条件:$f\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x}$ 的函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
4. 设 $f(n)$ 是定义在整数集上的函数,且满足如下两个条件
   (1) $f(0) = 1, f(1) = 0$;
   (2) 对任意 $m, n \in \mathbf{N}$,有 $f(m+n) + f(m-n) = 2f(m) \cdot f(n)$,求 $f(n)$.
5. 求函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,使得对于任意实数 x, y 有 $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$. (2003 年捷克训练题,2003 年中国国家队训练题)

习题 B

1. 求所有满足 $f(1) = 2$ 与 $f(xy) = f(x) \cdot f(y) - f(x+y) + 1$, $x, y \in \mathbf{Q}$ 的函数 f:

$\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$. (1980年卢森堡竞赛题)

2. 设 f 为定义在非负实数集上且在其中取值的函数.求所有满足下列条件的 f:
(i) $f[x\cdot f(y)]\cdot f(y)=f(x+y)$;(ii) $f(2)=0$;(iii) $f(x)\neq 0$,当 $0\leqslant x<2$.
(IMO－27试题)

3. 设 $\mathbf{R}$ 是实数集合,是否存在函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,同时满足以下三个条件:(a) 存在一个正数 M,使得对所有的 x,都有 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$;(b) $f(1)$ 的值是1;(c) 如果 $x\neq 0$,则 $f(x+\frac{1}{x^2})=f(x)+[f(\frac{1}{x})]^2$. (IMO－36预选题)

4. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 适合条件 $f(x^3+y^3)=(x+y)\cdot[(f(x))^2-f(x)\cdot f(y)+f(f(y))^2]$ $(x,y\in\mathbf{R})$.试证:对一切 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(1996x)=1996f(x)$.
(CMO－11试题)

5. 确定所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得对于任何 $x,y\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)\cdot f[y\cdot f(x)-1]=x^2f(y)-f(x)$. (《中等数学》2003年3期奥林匹克问题)

第三篇 数列问题

第九章　数列项的求值与通项公式的求解

【基础知识】

确定数列的通项公式,对于研究数列的性质是很重要的.有了通项公式,可以求出数列中任意指定的一项,也有利于对数列性质的深入研究.求数列的通项公式是数学竞赛中的数列问题之一.由于复杂的数列常常是一些简单的基本数列或特殊性质的数列构成的,因此,我们在求某些复杂数列的通项公式时,除要运用各种方法与技巧外,还要熟练掌握一些简单的基本数列的通项公式.

对于线性齐次递归数列$\{a_n\}$:$a_1=\alpha_1,a_2=\alpha_2,\cdots,a_k=\alpha_k,a_{n+k}=\lambda_1a_{n+k-1}+\lambda_2a_{n+k-2}+\cdots+\lambda_ka_n$,其特征方程为

$$x^k=\lambda_1x^{k-1}+\lambda_2x^{k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}x+\lambda_k. \tag{*}$$

若特征方程(*)有 k 个不同的根$x_1,x_2,\cdots,x_k$,则其通项公式 a_n 为

$$a_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n+\cdots+c_kx_k^n=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i^n; \tag{Ⅰ}$$

若特征方程(*)有 k_1 个重根 α_1,k_s 个重根$\alpha_s,\cdots,k_s$ 个重根α_s,且 $k_1+k_2+\cdots+k_s=k$,则其通项公式 a_n 为

$$a_n=\sum_{i=1}^{s}(c_{i1}+c_{i2n}+\cdots+c_{ik_i}n^{k_i-1})x_{k_i}^n, \tag{Ⅱ}$$

(Ⅰ)、(Ⅱ)中的 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 由初始条件$a_1=\alpha_1,a_2=\alpha_2,\cdots,a_k=\alpha_k$ 组成的方

程组确定.

【典型例题与基本方法】

例 1 设正整数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+3}=a_{n+2}(a_{n+1}+2a_n)$, $n=1,2,\cdots$ 且 $a_6=2288$. 求 a_1,a_2,a_3. (1988 年四川省竞赛题)

解 由递推关系可得

$$\begin{aligned} a_6 &= a_5(a_4+2a_3)=a_4(a_3+2a_2)(a_4+2a_3) \\ &= a_3(a_2+2a_1)(a_3+2a_2)[a_3(a_2+2a_1)+2a_3] \\ &= a_3^2(a_3+2a_2)(a_2+2a_1)(a_2+2a_1+2). \end{aligned}$$

因为 $a_6=2288=2^4\cdot 11\cdot 13$, 所以由 a_2+2a_1+2 与 a_2+2a_1 相差 2, 且都是 2288 的因子, 则只能有

$$a_2+2a_1=11, a_2+2a_1+2=13,$$

从而 $a_3^2(a_3+2a_2)=2^4$.

由此, 可得 a_3 只能为 1 或 2. 若 $a_3=1$, 则 $a_2=\frac{12}{5}$ 不是自然数, 矛盾! 所以

$$a_3=2, a_2=1.$$

再由 $a_2+2a_1=11$, 得 $a_1=5$.

故 $a_1=5, a_2=1, a_3=2$ 为所求.

例 2 将与 105 互素的所有正整数从小到大排成数列, 试求这个数列的第 1000 项. (1994 年全国高中联赛题)

解 该数列记为 $a_1,a_2,a_3,\cdots$, 不超过 105, 而且与 105 互素的正整数的个数为

$$105-\left(\frac{105}{3}+\frac{105}{5}+\frac{105}{7}\right)+\left(\frac{105}{15}+\frac{105}{35}+\frac{105}{21}\right)-1=48.$$

由于 $1000=20\cdot 48+40$, 从而 $a_{1000}=20\cdot 105+a_{40}=2100+a_{40}$.

再由 $a_{48}=104, a_{47}=103, a_{46}=101, a_{45}=97,$

$a_{44}=94, a_{43}=92, a_{42}=89, a_{41}=88, a_{40}=86.$

故 $a_{1000}=2100+86=2186.$

例 3 设数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 满足 $a_0=a_1=11$, $a_{m+n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})-(m-n)^2$, $m,n\geqslant 0$, 求 a_{45}. (1991 年前苏联教育部推荐题)

解 由 $a_1=a_{1+0}=\frac{1}{2}(a_2+a_0)-1$, 所以 $a_2=13$.

对于 $n\geqslant 1$, 由题设可知, $a_{2n}=a_{n+1+n-1}=\frac{1}{2}(a_{2n+2}+a_{2n-2})-4$.

于是,记 $b_n = a_{2n}$,则得到

$b_0 = 11, b_1 = 13, b_{n+1} = 2b_n - b_{n-1} + 8(n \geqslant 1)$,

由此可得,$\sum_{k=1}^{n} b_{k+1} = 2\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} + 8n$,

即 $\quad b_{n+1} = b_n + b_1 - b_0 + 8n = b_n + 8n + 2$,

从而得到 $\quad b_{n+1} = b_1 + 2n + 8\sum_{k=1}^{n} k = 4n^2 + 6n + 13.$

再由 $b_0 = 11, b_1 = 13$,得

$b_n = 4(n-1)^2 + 6(n-1) + 13 = 4n^2 - 2n + 11(n = 0,1,2,\cdots)$,

对任何 $n \geqslant 0$,利用题设,可得

$$a_n = a_{n+0} = \frac{1}{2}(a_{2n} + a_0) - n^2 = \frac{1}{2}(4n^2 - 2n + 11 + 11) - n^2 = n^2 - n + 11.$$

从而 $\quad a_{45} = 45 \cdot 44 + 11 = 1991.$

例 4 已给 $S = \{1,2,3,4\}$.设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 S 中的数所组成的数列,而且包含 $(1,2,3,4)$ 的不以 1 结尾的所有排列,即如果 (b_1, b_2, b_3, b_4) 是 $(1,2,3,4)$ 的一个排列,且 $b_4 \neq 1$,则存在 $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant k$,使得

$(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.求这种数列项数 k 的最小值.

(1991 年上海市竞赛题)

解 由于 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 包含 $(1,2,3,4)$ 的第 2 个数为 1 的所有排列,从而存在

$1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 < \cdots < i_m \leqslant k$,

使得 $(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3})$ 是 $(2,3,4)$ 的一个排列,$a_{i_4} = 1, a_{i_5}, \cdots, a_{i_m}$ 是 $\{2,3,4\}$ 中的数组成的数列,且包含 $\{2,3,4\}$ 的所有两个元素的排列.易知,$a_{i_5}, \cdots, a_{i_m}$ 最少有 5 项,即 $m \geqslant 9$.

显然,在数列 $a_{i_1}, \cdots, a_{i_m}$ 中任增加一项,不可能具有题中所要求的性质,所以 $k \geqslant 11$.

另一方面,容易验证:数列 1,3,2,4,1,2,3,1,4,3,2 包含 $(1,2,3,4)$ 的不以 1 结尾的所有排列.于是项数 k 的最小值为 11.

例 5 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n, n \geqslant 1$.求 a_n 的通项公式.

(1975 年加拿大奥林匹克题)

解 当 $n \geqslant 2$ 时,由于

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 \cdot a_n, a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = (n-1)^2 \cdot a_{n-1}$,

所以,$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$,

由此,得 $a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}, n = 2,3,\cdots$

于是,有 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1,2,3,\cdots$

例 6 设正数数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 满足 $a_0 = a_1 = 1$,且

$\sqrt{a_n \cdot a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n-2}} = 2a_{n-1}, n = 2,3,\cdots$ 求该数列的通项公式.

(1993 年全国高中联赛题)

解 由于当 $n \geqslant 2$ 时,$\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + \frac{2a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-2}}}$,

所以,令 $b_n = \sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$ 可得 $b_1 = 1$,且 $b_n = 1 + 2b_{n-1}, n = 2,3,\cdots$

由此,得 $b_n = 2^n - 1, n = 1,2,\cdots$

于是,有$\sqrt{a_n} = (2^n - 1)\sqrt{a_{n-2}}$,

从而所求通项公式为 $a_n = \prod_{k=1}^{n}(2^k - 1)^2, n = 1,2,3,\cdots$

例 7 设数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足:$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}), n = 1,2,\cdots$ 求通项公式.

(1986 年联邦德国奥林匹克题)

解 令 $b_n = \sqrt{1 + 24a_n}$,则当 $n > 1$ 时,由数列$\{a_n\}$的递推关系可得

$$\begin{aligned} b_n^2 &= 1 + 24a_n = 1 + \frac{24}{16}(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1 + 24a_{n-1}}) \\ &= \frac{1}{4}(10 + 24a_{n-1} + 6\sqrt{1 + 24a_{n-1}}) \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{1 + 24a_{n-1}} + 3)^2 \\ &= \frac{1}{4}(3 + b_{n-1})^2. \end{aligned}$$

所以,$b_n = \frac{1}{2}(3 + b_{n-1})$,即 $b_n - 3 = \frac{1}{2}(b_{n-1} - 3)$.

再由 $b_1 = \sqrt{1 + 24a_1} = \sqrt{1 + 24} = 5$,从而

$b_n - 3 = (b_1 - 3) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-2}$,即 $b_n = 3 + (\frac{1}{2})^{n-2}, n = 1,2,\cdots$

由此,可知对于 $n = 1,2,3,\cdots$ 有

$a_n = \frac{1}{24}(b_n^2 - 1) = \frac{1}{3} + (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{2n-1}$.

【解题思维策略分析】

1. 注意特征根方法的运用

例 8　设数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$,且$a_n-2a_{n-1}=n^2-3(n=2,3,\cdots)$,求$a_n$.

解　由$a_n-2a_{n-1}=n^2-3$得$a_{n-1}-2a_{n-2}=(n-1)^2-3=n^2-2n-2$,从而

$a_n-3a_{n-1}+2a_{n-2}=2n-1$.

又由$a_{n-1}-3a_{n-2}+2a_{n-3}=2(n-1)-1=2n-3$得

$a_n-4a_{n-1}+5a_{n-2}-2a_{n-3}=2$.

再由$a_{n-1}-4a_{n-2}+5a_{n-3}-2a_{n-4}=2$得

$a_n-5a_{n-1}+9a_{n-2}-7a_{n-3}+2a_{n-4}=0$.

于是其特征方程为$x^4-5x^3+9x^2-7x+2=0$,其根为$x_1=x_2=x_3=1,x_4=2$.

所以其通项可设为$a_n=(c_1+c_2n+c_3n^2)\cdot 1^n+c_4\cdot 2^n$.

由$a_1=0,a_n-2a_{n-1}=n^2-3$有$a_2=1,a_3=8,a_4=29$.

即有$\begin{cases}c_1+c_2+c_3+2c_4=0,\\c_1+2c_2+4c_3+4c_4=1,\\c_1+3c_2+9c_3+8c_4=8,\\c_1+4c_2+16c_3+16c_4=29,\end{cases}$　即$\begin{cases}c_1=-1,\\c_2=-4,\\c_3=-3,\\c_4=4.\end{cases}$

故所求通项$a_n=-n^2-4n-3+4\cdot 2^n=2^{n+2}-n^2-4n-3$.

例 9　设数列$\{x_n\}$满足:$x_1=2,x_2=3$,且

$$\begin{cases}x_{2m+1}=x_{2m}+x_{2m-1},m\geqslant 1,\\x_{2m}=x_{2m-1}+2x_{2m-2},m\geqslant 2.\end{cases}$$

求数列$\{x_n\}$的通项公式.　　(1983年澳大利亚奥林匹克题)

解　由递推关系,当$m\geqslant 2$时,有$x_{2m+1}=x_{2m}+x_{2m-1}=2x_{2m-1}+2x_{2m-2}$,

又$x_{2m-2}=x_{2m-1}-x_{2m-3}$,

所以$x_{2m+1}=4x_{2m-1}-2x_{2m-3}$.

令$a_m=x_{2m-1}$,则$a_{m+1}=4a_m-2a_{m-1},m\geqslant 2$.

同理,令$b_m=x_{2m}$,也可得$b_{m+1}=4b_m-2b_{m-1},m\geqslant 2$.

数列$\{a_m\}$与$\{b_m\}$有相同的递推关系,其特征方程是$\lambda^2-4\lambda+2=0$,

求得其特征根为$\lambda=2\pm\sqrt{2}$.于是

$a_m=\alpha_1(2+\sqrt{2})^m+\beta_1(2-\sqrt{2})^m,m=1,2,\cdots$

$b_m=\alpha_2(2+\sqrt{2})^m+\beta_2(2-\sqrt{2})^m,m=1,2,\cdots$

其中 $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ 为待定常数,再由

$$a_1=x_1=2, a_2=x_3=x_2+x_1=5,$$

$$b_1=x_2=3, b_2=x_4=x_3+2x_2=11,$$

可算出 $\alpha_1=\frac{1}{4}(3-\sqrt{2}), \beta_1=\frac{1}{4}(3+\sqrt{2}),$

$$\alpha_2=\frac{1}{4}(1+2\sqrt{2}), \beta_2=\frac{1}{4}(1-2\sqrt{2}).$$

所以,当 $n=2m-1$ 时, $x_n=\frac{1}{4}(3-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^m+\frac{1}{4}(3+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^m$;

当 $n=2m$ 时, $x_n=\frac{1}{4}(1+2\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^m+\frac{1}{4}(1-2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^m$.

例 10 设 $a_1=a_2=\frac{1}{3}$,且当 $n=3,4,5,\cdots$ 时, $a_n=\frac{(1-2a_{n-2})a_{n-1}^2}{2a_{n-1}^2-4a_{n-2}\cdot a_{n-1}^2+a_{n-2}}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 证明: $\frac{1}{a_n}-2$ 是整数的平方. (1993 年中国国家队集训试题)

解 用数学归纳法易证: $0<a_n<\frac{1}{2}, n=1,2,3,\cdots$

令 $b_n=\frac{1}{a_n}-2$,则 $b_n>0$. 由题设递推关系,得

$$\frac{1}{a_n}=\frac{2a_{n-1}^2-4a_{n-2}\cdot a_{n-1}^2+a_{n-2}}{(1-2a_{n-2})a_{n-1}^2}=2+\frac{a_{n-2}}{(1-2a_{n-2})a_{n-1}^2},$$

即 $b_n=\frac{1}{b_{n-2}\cdot a_{n-1}^2}=\frac{(b_{n-1}+2)^2}{b_{n-2}}$,

由此,可得 $\sqrt{b_n\cdot b_{n-2}}=b_{n-1}+2$.

用 $n+1$ 代替 n,有 $\sqrt{b_{n+1}\cdot b_{n-1}}=b_n+2$.

于是,有 $\sqrt{b_{n+1}\cdot b_{n-1}}-\sqrt{b_n\cdot b_{n-2}}=b_n-b_{n-1}$,

从而 $\sqrt{b_{n-1}}(\sqrt{b_{n+1}}+\sqrt{b_{n-1}})=\sqrt{b_n}(\sqrt{b_n}+\sqrt{b_{n-2}})$.

令 $c_n=\frac{\sqrt{b_n}+\sqrt{b_{n-2}}}{\sqrt{b_{n-1}}}, n=3,4,\cdots$,则

$$c_{n+1}=c_n=\cdots=c_3=\frac{\sqrt{b_3}+\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_2}}.$$

由于 $a_1=a_2=\frac{1}{3}$,所以 $b_1=b_2=1, b_3=\frac{(b_2+2)^2}{b_1}=9$.

因此，$c_n = 4, n = 3,4,5,\cdots$

即 $\sqrt{b_n} = 4\sqrt{b_{n-1}} - \sqrt{b_{n-2}}, n = 3,4,5,\cdots$ (＊)

由于$\sqrt{b_1} = \sqrt{b_2} = 1$，从而由数学归纳法易证$\sqrt{b_n}$是正整数，即 $b_n = \frac{1}{a_n} - 2$是平方数.(2) 的结论获证.

递推关系(＊)的特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$，其特征根为 $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$，所以

$\sqrt{b_n} = \alpha(2+\sqrt{3})^n + \beta(2-\sqrt{3})^n, n = 1,2,\cdots$

其中 α,β 为待定常数.由$\sqrt{b_1} = \sqrt{b_2} = 1$ 可算出

$$\alpha = \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\sqrt{3}, \beta = \frac{3}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}
\text{从而}, b_n &= [\alpha(2+\sqrt{3})^n + \beta(2-\sqrt{3})^n]^2 \\
&= \alpha^2(2+\sqrt{3})^{2n} + \beta^2(2-\sqrt{3})^{2n} + 2\alpha\beta(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n \\
&= \alpha^2(7+4\sqrt{3})^n + \beta^2(7-4\sqrt{3})^n + 2\alpha\beta \\
&= \left(\frac{13}{3} - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)(7+4\sqrt{3})^n + \left(\frac{13}{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)(7-4\sqrt{3})^n + \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

于是，所求通项公式为

$$\begin{aligned}
a_n &= (b_n + 2)^{-1} \\
&= [(\frac{13}{5} - \frac{5}{2}\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})^n + \left(\frac{13}{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)(7-4\sqrt{3})^n + \frac{7}{3}]^{-1},
\end{aligned}$$

其中 $n = 1,2,\cdots$

2. 注意问题的变更转化表述

例 11 设 $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, f(n) = [\alpha n], f^{(k)} = f \cdot f \cdot \cdots \cdot f$为$f$的$k$次复合，求 $F(k)$ 的表达式.

解 显然，由取整函数的性质，有

$$f(1) = [\alpha] = 0, f(2) = [3-\sqrt{5}] = 0, f(3) = [3 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}] = 1.$$

从而可得 $f[f(n)] > 0 \Leftrightarrow f(n) = [\alpha n] \geqslant 3$.

又 $[\alpha n] \geqslant 3 \Leftrightarrow n\alpha > 3 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{3}{\alpha} = \frac{3(3+\sqrt{5})}{2} \Leftrightarrow n \geqslant 8,$

由此，可得 $F(2) = 8$.

设 $F(1), F(2), \cdots, F(k-1), F(k)$ 均已求出，则

$f^{(k+1)}(n) > 0 \Leftrightarrow f(n) \geqslant F(k)$.

又 $f(n)=[\alpha n]\geqslant F(k)\Leftrightarrow n\geqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}F(k)$,

从而,$F(k+1)$是不小于$\frac{3+\sqrt{5}}{2}F(k)$的最小整数,或者说$F(k)$是不超过$\frac{2}{3+\sqrt{5}}F(k+1)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k+1)$的最大整数.注意到$\frac{3+\sqrt{5}}{2}F(k)$是无理数,上述结论可表示为

$$F(k+1)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}F(k)\right]+1, \quad ①$$

$$F(k)=\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k+1)\right], \quad ②$$

其中 $k=1,2,3,\cdots$

当 $k\geqslant 2$ 时,由 ① 可得 $F(k+1)=\left[3F(k)-\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k)\right]+1$.

由于$\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k)$也是无理数,所以 $F(k+1)=3F(k)-\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k)\right]$.

再由 ② 可得$\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}F(k)\right]=F(k-1)$,于是

$$F(k+1)=3F(k)-F(k-1). \quad ③$$

补充 $F(0)=1$,则 ③ 式对于 $k\geqslant 1$ 都成立.

递推公式 ③ 的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+1=0$,其特征根为$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,所以

$$F(k)=\alpha\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\beta\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k,$$

其中 α,β 为待定常数,由 $F(0)=1,F(1)=3$,可算出

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2},\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

于是,$F(k)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1},k=0,1,2,\cdots$

【模拟实战】

习题 A

1. 已知数列$\{x_n\}$满足 $x_0=0,x_{n+1}=x_n+a+\sqrt{b^2+4ax_n},n=0,1,2,\cdots$,其中 a,b 为

给定的正实数.求此数列的通项.

2. 在正项数列$\{a_n\}$中,$a_1=10$,$a_{n+1}=10\sqrt{a_n}$,求此数列的通项公式.

3. 设$a_0=1$,$a_1=2$,且$n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}$,$n=1,2,3,\cdots$,求

$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{50}}{a_{51}}$. (1976年加拿大奥林匹克题)

4. $n^2(n\geqslant 4)$个正数排成n行n列:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

其中每一行的数成等差数列,每一列的数成等比数列,并且所有公比相等.已知$a_{24}=1$,$a_{42}=\frac{1}{8}$,$a_{43}=\frac{3}{16}$.求$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$. (1990年全国高中联赛题)

习题 B

1. 已给数列0,1,1,2,3,5,8,… 自第3项起,每一项都等于前面两项之和.问在此数列的前100000001项中,是否会有某一项的末尾4位数全为0?

(第9届莫斯科奥林匹克题)

2. 设数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2a_n-1(n=1,2,\cdots)$,数列$\{b_n\}$满足$b_1=3$,$b_{k+1}=a_k+b_k(k=1,2,\cdots)$.求数列$\{b_n\}$的前$n$项和. (1996年全国高中联赛题)

第十章　数列一般项性质问题的求解

【基础知识】

讨论数列一般项的性质也是数学竞赛试题常出现的一类问题,这类问题常常将数列知识与其他知识,如数论知识、代数知识等紧密结合起来,构成一类综合问题.

【典型例题与基本方法】

例1　在正整数集上定义函数 $f(n)$ 如下:

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时},\\ n+3, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}.\end{cases}$$

(1) 证明对任何正整数 m,数列 $a_0=m, a_1=f(m), \cdots, a_n=f(a_{n-1}), \cdots$ 中总有一项为1或3.

(2) 在所有正整数中,哪些 m 使上述数列必然出现3?哪些 m 使上述数列必然出现1?

(1979年全国高中联赛题)

解　(1) 由于 $\{a_n\}$ 是自然数列,所以必有最小值 a_{n_0}.如果 $a_n>3$,当 a_n 是偶数时,$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}<a_n$;当 n 是奇数时,$a_{n+2}=\dfrac{a_n+3}{2}<a_n$.又若 $a_{n_0}=2$,则 $a_{n_0+1}=1$,矛盾!所以 a_{n_0} 必等于1或3.

(2) 由 $f(n)$ 的定义易知 $3\mid a_n \Leftrightarrow 3\mid a_{n+1}, n=1,2,\cdots$

于是,若 $3\mid m=a_0$,则 $3\mid a_n, n=0,1,2,\cdots$.所以 $\{a_n\}$ 中没有等于1的项,由(1)知必有等于3的项.若 $3\nmid m$,则 $3\nmid a_n, n=0,1,2,\cdots$,从而数列 $\{a_n\}$ 中没有等于3的项,由(1)可知必有等于1的项.

例2　已知 $a_1=1, a_2=2$,

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n, & a_n\cdot a_{n+1} \text{ 为偶数},\\ a_{n+1}-a_n, & a_n\cdot a_{n+1} \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

求证:对一切 $n\in\mathbf{N}, a_n\neq 0$.

(1988年全国高中联赛题)

证明　由 a_1 是奇数,a_2 是偶数及递推公式易知在数列 $\{a_n\}$ 中任意相邻两项不能

全是偶数.可以证明 $4 \nmid a_n, n = 1,2,\cdots$,由此即得对任意 $n \in \mathbf{N}, a_n \neq 0$.事实上,若不然,则集合 $\{n \in \mathbf{N} | 4 \mid a_n\}$ 非零,记 $n_0 = \min\{n \in \mathbf{N} | 4 \mid a_n\}$.由于 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 7$,所以 $n_0 > 3$.由于 a_{n_0} 是偶数,a_{n_0-1}, a_{n_0-2} 不全是偶数,由递推公式可知 a_{n_0-1},a_{n_0-2} 全是奇数.

同理可知,a_{n_0-3} 是偶数.所以

$$a_{n_0} = a_{n_0-1} - a_{n_0-2}, a_{n_0-1} = 5a_{n_0-2} - 3a_{n_0-3}.$$

由此,得 $a_{n_0} = 4a_{n_0-2} - 3a_{n_0-3}$.

由于 $4 \mid a_{n_0}$,从而 $4 \mid a_{n_0-3}$,与 n_0 的最小性矛盾.

例3　设非零数列 $a_1, a_2, \cdots$ 满足:$a_1, a_2, \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + b}{a_1 a_2}$ 都是整数,且 $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2 + b}{a_n}, n = 1,2,\cdots$.其中 b 是某个给定的整数.求证:数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数.

(1972 年奥地利奥林匹克题)

证明　设 $n \geqslant 2$,由递推公式可得

$b = a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+1}^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1} - a_n^2$.

从而 $a_n(a_{n+2} + a_n) = a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-1})$,

即 $\dfrac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n}, n = 2,3,\cdots$

令 $c_n = \dfrac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}}$,则 $c_n = c_1 = \dfrac{a_3 + a_1}{a_2} = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + b}{a_1 a_2}$.

由假设可知,c_1 是整数,且 $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} - a_n, n = 1,2,3,\cdots$

再由 a_1, a_2 是整数可得 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数.

例4　已知 $x_0 = 1, x_1 = 3, x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1} (n \in \mathbf{N})$.求证:数列 $\{x_n\}$ 中无完全平方数.

(《中等数学》2003 年 3 期奥林匹克训练题)

证明　由特征根法可求得数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为

$$x_n = \frac{1}{2}[(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n].$$

设 $y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}[(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})n^2]$,则

$y_n \in \mathbf{N}$,且易得 $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$.

因此,欲证 x_n 为非完全平方数,只需证明方程 $x^4 - 2y^2 = 1$　①

无正整数解 (x, y),其中 $x \geqslant 3$.

由①式知 x 为奇数，则 $8\mid(x^4-1)$，故 y 为偶数，不妨设 $y=2y_1(y_1\in\mathbf{N})$，则

$$\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{2}=2y_1^2. \quad ②$$

又 $\left(\frac{x^2+1}{2},\frac{x^2-1}{2}\right)=\left(\frac{x^2+1}{2},1\right)=1$，由②式及有关数论知识，得

$$\begin{cases}\frac{x^2+1}{2}=2s^2\\ \frac{x^2-1}{2}=t^2\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{x^2+1}{2}=s^2\\ \frac{x^2-1}{2}=2t^2\end{cases}(s,t\in\mathbf{N},s,t\text{ 互素}).$$

若为前者，则 $x^2=4s^2-1\equiv3(\bmod 4)$，矛盾！

若为后者，则 $x^2-1=4t^2$，有 $(x+2t)(x-2t)=1$.

于是，$\begin{cases}x+2t=1,\\x-2t=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\t=0.\end{cases}$ 矛盾.

故 $x_n(n\in\mathbf{N}^+)$ 不是完全平方数.

例5 设 a_n 为下述自然数 N 的个数：N 的十进制表示中的各位数字之和为 n，且每位数字只能取1,3或4.求证：a_{2n} 是完全平方数. （1991年全国高中联赛题）

证明 显然 $a_1=1,a_2=1,a_3=2,a_4=4$，

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4},n>4. \quad ①$$

只需让当 $n\geqslant3$ 时，a_{2n} 是完全平方数.

由①可得，$a_{2n}=a_{2n-1}+a_{2n-3}+a_{2n-4}$

$$=a_{2n-2}+a_{2n-4}+a_{2n-5}+a_{2n-3}+a_{2n-4}.$$

又 $a_{2n-2}=a_{2n-3}+a_{2n-5}+a_{2n-6}$，

所以 $a_{2n}=2a_{2n-2}+2a_{2n-4}-a_{2n-6}$.

令 $b_n=2a_n$，则 $b_1=1,b_2=4,b_3=9$，且

$$b_n=2b_{n-1}+2b_{n-2}-b_{n-3},n>3.$$

另一方面，补充 $a_0=1,a_{-1}=0$，则①对于 $n>2$ 成立.

令 $c_n=a_n+a_{n-2}$，则 $c_1=1,c_2=2$，且由①可知

$$c_n=c_{n-1}+c_{n-2},n>2. \quad ②$$

由此，得 $c_3=3$，且 $c_n^2=(c_{n-1}+c_{n-2})^2=2c_{n-1}^2+2c_{n-2}^2-(c_{n-1}-c_{n-2})^2$.

由②，则 $c_{n-1}=c_{n-2}+c_{n-3}$，于是

$c_1^2=1,c_2^2=4,c_3^2=9$，且

$$c_n^2=2c_{n-1}^2+2c_{n-2}^2-c_{n-3}^2,n>3. \quad ③$$

比较②和③及其初值可得 $b_n=c_n^2$，

即 $a_{2n}=(a_n+a_{n-2})^2, n=1,2,\cdots$

例 6 自然数数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足关系式 $x_n+\sqrt{2}y_n=\sqrt{2}(3+2\sqrt{2})^{2^n}(n\in\mathbf{N})$. 求证：$y_n-1$ 为完全平方数.

证明 将已知条件式两边平方后，有

$$\frac{(x_n+\sqrt{2}y_n)^2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(3+2\sqrt{2})^{2^{n+1}}=x_{n+1}+\sqrt{2}y_{n+1},$$

易证对任意 $n\in\mathbf{N}$，x_n 为偶数，且 $x_{n+1}=2x_ny_n, y_{n+1}=\frac{1}{2}x_n^2+y_n^2$. $(*)$

因当 $n=1$ 时，由条件式知 $x_1=24, y_1=17$，有 $y_1^2=\frac{1}{2}x_1^2+1$，从而要证 y_n-1 为完全平方数，即证得有 $y_n^2=\frac{1}{2}x_n^2+1$ 即可.

下面用数学归纳法证明 $y_n^2=\frac{1}{2}x_n^2+1(n\in\mathbf{N})$.

显然，当 $n=1$ 时，结论成立.假设当 $n=k$ 时，结论成立.那么，当 $n=k+1$ 时，由 $(*)$ 式，有 $x_{k+1}^2=4x_k^2y_k^2, y_{k+1}^2=y_k^4+x_k^2y_k^2+\frac{1}{4}x_k^4$,

$$\text{从而}, y_{k+1}^2-(\frac{1}{2}x_{k+1}^2+1)=y_k^4+x_k^2y_k^2+\frac{1}{4}x_k^4-(2x_k^2y_k^2+1)$$

$$=(y_k^2-\frac{1}{2}x_k^2)^2-1=1-1=0.$$

于是 $y_{k+1}^2=\frac{1}{2}x_{k+1}^2+1$.

故对任何 $n\in\mathbf{N}$，有 $y_n^2=\frac{1}{2}x_n^2+1$.

最后证明 y_n-1 为完全平方数.

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

当 $n>1$ 时，由前述论证，有 $y_n=y_{n-1}^2+\frac{1}{2}x_{n-1}^2=x_{n-1}^2+1$.

故 $y_n-1=x_{n-1}^2$ 为完全平方数.

【解题思维策略分析】

1. 注意先对项的性质进行估计，然后再推论

例 7 设 $a_0=0$，且对 $n=0,1,2,\cdots$ 有

$a_{n+1}=(k+1)a_n+k(a_n+1)+2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)}$,

其中 k 是给定的自然数.求证:对于 $n\geqslant 0$, a_n 是整数. (IMO－26 预选题)

证明 由所给条件式,运用数学归纳法,证得

$0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$

又由于 $a_{n+1}-(k+1)a_n-k(a_n+1)=2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)}$,

上式两端平方,可得

$a_{n+1}^2+(2k^2+2k+1)a_n^2+2k^2a_n+k^2-(4k+2)a_na_{n+1}-2ka_{n+1}(a_n+1)+2k(k+1)a_n(a_n+1)=4k(k+1)a_n(a_n+1)$,

即 $a_n^2+a_{n+1}^2-4(k+2)a_{n+1}a_n-2k(a_{n+1}+a_n)+k^2=0$.

用 $n-1$ 代替 n,有

$a_{n-1}^2+a_n^2-(4k+2)a_na_{n-1}-2k(a_n+a_{n-1})+k^2=0$.

上述两式相减,得

$a_{n+1}^2-a_{n-1}^2-(4k+2)a_n(a_{n+1}-a_{n-1})-2k(a_{n+1}-a_{n-1})=0$.

由于 $a_{n+1}-a_{n-1}>0$,所以消去 $a_{n+1}-a_{n-1}$ 可得

$a_{n+1}+a_{n-1}-(4k+2)a_n-2k=0$,

即 $a_{n+1}=(4k+2)a_n-a_{n-1}+2k, n=1,2,\cdots$

再由 $a_0=0, a_1=k$, k 为自然数,立即可知对一切非负整数 n, a_n 是整数.

例 8 整数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=2, a_2=7, -\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2}, n\geqslant 2$.求证:对所有 $n>1$, a_n 是奇数. (IMO－29 预选题)

证明 易证 $\{a_n\}$ 为正整数数列,进一步运用数学归纳法可证明

$a_n\geqslant 3a_{n-1}, n\geqslant 2$. ①

事实上,当 $n=2$ 时,① 式显然成立.

设对于 $n=k(k\geqslant 2)$,① 式成立,根据假设可得

$a_{k+1}>\frac{a_k^2}{a_{k-1}}-\frac{1}{2}\geqslant 3a_k-\frac{1}{2}$.所以 $a_{k+1}\geqslant 3a_k$,即对于 $n=k+1$,① 式也成立.

不难算出,$a_1=2, a_2=7, a_3=25, a_4=89$.可以证明数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系:

$a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}, n=3,4,5,\cdots$ ②

显然,当 $n=3$ 时,② 式成立.设当 $n=k(k\geqslant 3)$ 时,② 式成立.于是

$$\frac{a_k^2}{a_{k-1}}=\frac{a_k(a_{k-1}+2a_{k-2})}{a_{k-1}}=3a_k+\frac{2a_k\cdot a_{k-2}}{a_{k-1}}$$

$$=3a_k+2a_{k-1}+\frac{2a_ka_{k-2}-2a_{k-1}^2}{a_{k-1}}.$$

由①式及假设,可得

$$\left|\frac{2a_ka_{k-2}-2a_{k-1}^2}{a_{k-1}}\right|=\frac{2a_{k-2}}{a_{k-1}}\left|\frac{a_ka_{k-2}-a_{k-1}^2}{a_{k-2}}\right|=\frac{2a_{k-2}}{a_{k-1}}\left|a_k-\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-2}}\right|\leqslant\frac{1}{3}.$$

从而$\left|\dfrac{a_k^2}{a_{k-1}}-3a_k-2a_{k-1}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$.

由于$\left|a_{k+1}-\dfrac{a_k^2}{a_{k-1}}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$,所以$a_{k+1}=3a_k+2a_{k-1}$,即对于$n=k+1$,②式也成立.

于是,对一切$n\geqslant3$,②式成立,由此可知$a_n\equiv a_{n-1}(\bmod 2)$,$n=3,4,\cdots$因此,当$n>1$时,$a_n$与$a_2=7$同为奇数.

2. 注意各种方法的综合运用

例9 设r是正整数,数列$\{a_n\}$满足:$a_1=1$,$a_{n+1}=\dfrac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2}$,$n=1,2,\cdots$求证:每个$a_n$都是正整数,并且求所有的$n$,使得$a_n$是偶数.

(1992年台北市奥林匹克题)

证明 由于$(n+2)a_{n+1}=na_n+2(n+1)^{2r}$,所以

$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1)^{2r+1}$.

令$b_n=(n+1)na_n$,$n=1,2,3,\cdots$ (*)

则$b_{n+1}=b_n+2(n+1)^{2r+1}$.

于是,由$b_1=2$,可得$b_n=2\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2r+1}$,$n=1,2,\cdots$

当$n=1$时,由$b_1=2$,显然可知$1\cdot(1+1)\mid b_1$.

设$n>1$时,由于$b_n=2n^{2r+1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}[k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}]$,

又 $2r+1$为奇数,可推出$n\mid[k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}]$,所以$n\mid b_n$.

另一方面,由$b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}[k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}]$和

$(n+1)\mid[k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}]$,可知$(n+1)\mid b_n$.

再由n与$n+1$互素,可得$n(n+1)\mid b_n$,$n=1,2,3,\cdots$

由(*)式即有$a_n=\dfrac{b_n}{n(n+1)}$为正整数.

以下讨论a_n的奇偶性.

当n为偶数时,显然a_n与$\dfrac{b_n}{n}$同奇偶,又$\dfrac{b_2}{2}=1+2^{2r+1}$,且当$n>2$时,有

$$b_n = 2n^{2r+1} + \sum_{k=1}^{n-1}[k^{2r+1} + (n-k)^{2r+1}]$$

$$= 2n^{2r+1} + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}[k^{2k-1} + (n-k)^{2r+1} + 2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^{2r+1},$$

所以$\frac{b_n}{n}$与$\left(\frac{n}{2}\right)^{2r}$同奇偶.由此,立即得到

$$a_n = \begin{cases} 偶数,当 n \equiv 0(\text{mod}4), \\ 奇数,当 n \equiv 2(\text{mod}4). \end{cases}$$

当 n 为奇数时,显然 a_n 与$\frac{b_n}{n+1}$同奇偶.

由于 $b_1 = 2$,且当 $n > 1$ 时,

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}[k^{2r+1} + (n+1-k)^{2r+1}]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}[k^{2r+1} + (n+1-k)^{2r+1}] + 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2r+1},$$

从而$\frac{b_n}{n+1}$与$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2r}$同奇偶.于是

$$a_n = \begin{cases} 偶数,当 n \equiv 3(\text{mod}4), \\ 奇数,当 n \equiv 1(\text{mod}4). \end{cases}$$

总之,当且仅当 $n \equiv 0$ 或 $3(\text{mod}4)$ 时,a_n 是偶数.

例 10 已知$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$是整数列且满足

(1) $a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2}, n = 2,3,\cdots$

(2) $2a_1 = a_0 + a_2 - 2$;

(3) 对任何 $m \in \mathbf{N}$,存在 k,使得 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+m-1}$ 都是完全平方数.

(CMO－7 试题)

求证:数列$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$的所有项都是完全平方数.

证明 由条件(1)知,当 $n \geqslant 2$ 时,有

$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) - (a_{n-1} - a_{n-2})$.

令 $d_n = a_n - a_{n-1}, n = 1,2,\cdots$,则上式化为 $d_{n+1} - d_n = d_n - d_{n-1}$.

由此可得 $d_{n+1} - d_n = d_n - d_{n-1} = \cdots = d_2 - d_1$.

又由条件(2),有 $d_2 - d_1 = a_2 - 2a_1 + a_0 = 2$,所以

$d_n = d_1 + 2(n-1), n = 1,2,3,\cdots$

于是可得 $a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k = a_0 + d_1 n + n(n-1)$，即

$$a_n = n^2 + bn + c, n = 0,1,2,\cdots \quad ①$$

其中 $b = d_1 - 1 = a_1 - a_0 - 1, c = a_0$.

由条件(3)知，存在非负整数 t，使得 a_t 与 a_{t+2} 都是完全平方数，从而

$a_{t+2} - a_t \not\equiv 2(\mathrm{mod}4)$.

再由条件(1)，得 $a_{t+2} - a_t = 4t + 4 + 2b$，

于是 b 为偶数，令 $b = 2\lambda$，则 ① 式化为

$a_n = (n+\lambda)^2 + c - \lambda^2, n = 0,1,2,\cdots$

显然，只需再证 $c - \lambda^2 = 0$. ②

若不然，有 $c-\lambda^2 \neq 0$，则 $c-\lambda^2$ 的不同约数只有有限多个，记其个数为 m，由①式知存在 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加.

又由题设条件(3)知，当 $k \geqslant n_0$ 时，使得 $a_{k+i} = p_i^2, i = 0,1,2,\cdots,m$，其中 p_i 是正整数且 $p_0 < p_1 < \cdots < p_m$.

再由②式得 $c - \lambda^2 = p_i^2 - (k+i+\lambda)^2$

$$= (p_i - k - i - \lambda)(p_i + k + i + \lambda), i = 0,1,2,\cdots,m.$$

由此可知 $c - \lambda^2$ 至少有 $m+1$ 个不同的约数，矛盾.

例 11 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0 = x, a_1 = y, a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}}, n = 1,2,\cdots$.

(1) 对于怎样的实数 x 与 y，总存在正整数 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时 a_n 恒为常数?

(2) 求通项 a_n. (2006年全国高中联赛题)

解 (1) 我们有 $a_n - a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}} = \dfrac{a_n^2 - 1}{a_n + a_{n-1}}, n = 1,2,\cdots$.

所以，如果对每个正整数 n，有 $a_{n+1} = a_n$，则必有 $a_n^2 = 1$，且 $a_n + a_{n-1} \neq 0$.

如果该 $n = 1$，我们得 $|y| = 1$ 且 $x \neq -y$. ①

如果该 $n > 1$，我们有 $a_n - 1 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2} + 1}{a_{n-1} + a_{n-2}} - 1 = \dfrac{(a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1)}{a_{n-1} + a_{n-2}}, n \geqslant 2$ 和

$$a_n + 1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} + 1}{a_{n-1} + a_{n-2}} + 1 = \frac{(a_{n-1} + 1)(a_{n-2} + 1)}{a_{n-1} + a_{n-2}}, n \geqslant 2. \quad ②$$

将两述两式两端相乘，得 $a_n^2 - 1 = \dfrac{a_{n-1}^2 - 1}{a_{n-1} + a_{n-2}} \cdot \dfrac{a_{n-2}^2 - 1}{a_{n-1} + a_{n-2}}, n \geqslant 2$.

由上式递推，必有①式或 $|x| = 1$ 且 $y \neq -x$.

反之，如果①式或上式满足，则当 $n \geqslant 2$ 时，必有 $a_n =$ 常数且常数是 1 或 -1.

(2) 由 ② 中两式,可得到$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}\cdot\frac{a_{n-2}-1}{a_{n-2}+1},n\geqslant 2$.

令 $b_n=\frac{a_n-1}{a_n+1}$,则当 $n\geqslant 2$ 时,$b_n=b_{n-1}b_{n-2}=(b_{n-2}\cdot b_{n-3})\cdot b_{n-2}=b_{n-2}^2\cdot b_{n-3}=(b_{n-3}b_{n-4})^2b_{n-3}=b_{n-3}^3b_{n-4}^2=\cdots$.

由此递推,可得$\frac{a_n-1}{a_n+1}=(\frac{y-1}{y+1})^{F_{n-1}}\cdot(\frac{x-1}{x+1})^{F_{n-1}},n\geqslant 2$. ③

其中 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2},n\geqslant 2,F_0=F_1=1$.

由上求得 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$,且 n 还可延伸有 $F_{-1}=0,F_{-2}=1$.

这样 ③ 式对所有的 $n\geqslant 0$ 都成立,由 ③ 式解得

$$a_n=\frac{(x+1)^{F_{n-2}}\cdot(y+1)^{F_{n-1}}+(x+1)^{F_{n-2}}\cdot(y-1)^{F_{n-1}}}{(x+1)^{F_{n-2}}\cdot(y+1)^{F_{n-1}}-(x-1)^{F_{n-2}}\cdot(y-1)^{F_{n-1}}},n\geqslant 0.$$

例 12 已知数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=15n+2+(15n-32)\cdot 16^{n-1},n=0,1,2,\cdots$

(1) 求证:对每个非负整数 $n,15^3\mid a_n$.

(2) 求所有的 n,使得 $1991\mid a_n,1991\mid a_{n+1},1991\mid a_{n+2}$.

(1991 年中国国家队集训试题)

解 (1) 由于 $2a_{n+1}-a_n$

$=2[15(n+1)+2+(15n-17)\cdot 16^n]-[15n+2+(15n-32)\cdot 16^{n-1}]$

$=15n+30+2+(31\cdot 15n-32\cdot 16)\cdot 16^{n-1}$

$=a_{n+2}+[31\cdot 15n-32\cdot 16)\cdot 16^{n-1}-(15n-2)\cdot 16^{n+1}$

$=a_{n+2}-15^3n\cdot 16^{n-1}$,

所以 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+15^3n\cdot 16^{n-1},n=0,1,2,\cdots$

又 $a_0=0,a_1=0$,从而用数学归纳法易证(略)有 $15^3\mid a_n$.

(2) 设 p 是大于 5 的素数.如果 $p\mid a_n,p\mid a_{n+1},p\mid a_{n+2}$,则由(1)中的递推公式可得 $p\mid n$.

再由通项公式可推出 $16^n\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.反之,若$p\mid n,16^n\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$,由通项公式易知 $p\mid a_n$.

又 $a_{n+1}=15n(1+16^n)+17(1-16^n)$,

所以 $p\mid a_{n+1}$.再用(1)中的递推公式,可知 $p\mid a_{n+2}$.这便证明了:$p\mid a_n,p\mid a_{n+1},p\mid a_{n+2}$ 的充要条件是 $p\mid n$ 且 $16^n\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

若记 n_0 是最小的自然数,使得 $16^{n_0}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$,则$\{n\mid p\mid a_n,p\mid a_{n+1},p\mid a_{n+2}\}=\{k[p,n_0]\mid k=0,1,2,\cdots\}$,其中$[p,n_0]$表示 p 与 n_0 的最小公倍数.

显然,$1991 = 11 \cdot 181$,11与181都是素数.由 $16^n \equiv 5^n \pmod{11}$ 容易算出使得 $16^n \equiv 1 \pmod{11}$ 的最小自然数 $n = 5$,由费尔马定理可知,$2^{180} \equiv 1 \pmod{181}$,即 $16^{45} \equiv 1 \pmod{181}$.

如果自然数 $n < 45$ 且 $16^n \equiv 1 \pmod{181}$,则 $n \mid 45$,但 $16^1 \equiv 16 \pmod{181}$,经计算可得 $16^5 \equiv 43 \pmod{181}$,$16^9 \equiv 59 \pmod{181}$.从而使得 $16^n \equiv 1 \pmod{181}$ 的最小自然数 $n = 45$.

故使得 $1991 \mid a_n$,$1991 \mid a_{n+1}$,$1991 \mid a_{n+2}$ 的所有 n 为

$[5,11,45,181]k = 11 \cdot 45 \cdot 181k = 89595k, k = 0,1,2,\cdots$

【模拟实战】

习题 A

1. 数列 $a_1, a_2, \cdots$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$,$a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$,对于任意 $n \geqslant 3$.证明:数列中的所有数都是整数. (第26届莫斯科奥林匹克题)
2. 任意选定一个自然数作 a_0,再任意选取 $a_1 \in \{a_0 + 54, a_0 + 77\}$,如此下去,即当选定 a_k 后,再选定 $a_{k+1} \in \{a_k + 54, a_k + 77\}$.证明:在所得数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 中,必有某项的末两位数相同. (1992年圣彼得堡竞赛题)
3. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一数列,通项 $x_n = \dfrac{n}{n + a}$,其中 a 为自然数.试证明:对自然数 n,数列的项 x_n 总可以表示为其他两项的乘积. (1986年联邦德国竞赛题)
4. 已知 $v_0 = 0, v_1 = 1, v_{n+1} = 8v_n - v_{n-1} (n = 1,2,3,\cdots)$.试问:在数列 $\{V_n\}$ 中是否有能被15整除的项?这样的项有多少?证明你的结论. (1991年浙江省夏令营题)

习题 B

1. 第一项是一个正整数,小唐构造所有的偶数项,小夏构造后面的奇数项.小唐的构造方法是:将前一项减去它本身的任何一个数字.小夏的构造方法是:将前一项加上它本身的任何一个数字.如果他们不停地增添新项,求证:有一个整数会在这个数列内出现至少100次. (1999年世界城市际竞赛题)
2. 斐波那契数列 $\{f_n\}$ 定义为 $f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n > 2)$.证明:有唯一一组正整数 a、b、m,使得 $0 < a < m$,$0 < b < m$,并且对一切正整数 n,$f_n - anb^n$ 都能

被 m 整除. (1983 年英国奥林匹克题)

3. 给定正整数 $m \geqslant 2$. 试证:

(1) 存在整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2m}$, 使得

$x_i x_{m+i} = x_{i+1} x_{m+i-1} + 1, 1 \leqslant i \leqslant m.$ $(*)$

(2) 对任何适合条件 $(*)$ 的整数组 $x_1, x_2, \cdots, x_{2m}$, 可构造出满足

$y_k y_{m+k} = y_{k+1} y_{m+k-1} + 1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 的整数序列 $\cdots, y_{-k}, \cdots, y_{-1}, y_0,$ $y_1, \cdots, y_k, \cdots$ 使得 $y_1 = x_i, i = 1, 2, \cdots, 2m$. (第 40 届 IMO 国家队选拔试题)

4. 是否存在数 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 使得有一个无穷的正数数列 $\{a_n\}$, 满足

$$1 + a_{n+1} \leqslant a_n + \frac{\alpha}{n} \cdot a_n, n = 1, 2, \cdots$$ (第 29 届 IMO 备选题)

5. $A_1, A_2, \cdots, A_{29}$ 是 29 个不同的正整数数列. 对 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 29$ 及自然数 x, 定义:

$N_i(x) =$ 数列 A_i 中 $\leqslant x$ 的数的个数,

$N_{ij}(x) =$ 数列 $A_i \cap A_j$ 中 $\leqslant x$ 的数的个数.

已知对所有的 $1 \leqslant i \leqslant 29$ 及每一个自然数 x, $N_i(x) = \frac{x}{e}$, $e = 2.71828\cdots$

证明:至少存在一对 i、$j (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 29)$, 使得 $N_{ij}(1988) > 200$.

(第 29 届 IMO 备选题)

第十一章 数列不等式的证明

【基础知识】

将数列内容与不等式结合起来,便构成了数列不等式.证明数列不等式,既需要运用证明不等式的基本思路与方法,又要结合数列本身的结构与性质.

【典型例题与基本方法】

1. 单调数列法

例 1 设 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 是递减的正数列且对任意自然数 n 都有

$$x_1+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\cdots+\frac{x_{n^2}}{n}\leqslant 1.$$

求证:对任意自然数 n 都有 $x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\cdots+\frac{x_n}{n}<3$.

(第 13 届全苏奥林匹克题)

证明 由于 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 是递减的正数列,所以对任意自然数 k,有

$$\frac{x_{k^2}}{k^2}+\frac{x_{k^2+1}}{k^2+1}+\cdots+\frac{x_{(k+1)^2-1}}{(k+1)^2-1}<(2k+1)\frac{x_{k^2}}{k^2}\leqslant 3\frac{x_{k^2}}{k}.$$

任取自然数 n,则存在自然数 k,使得 $k^2\leqslant n\leqslant(k+1)^2-1$,

从而 $x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}<3(x_1+\frac{x_4}{2}+\cdots+\frac{x_{k^2}}{k})\leqslant 3$.

例 2 已知严格递增的无界正数列 $a_1, a_2, \cdots$.求证:

(1) 存在自然数 k_0 使得对于一切 $k\geqslant k_0$,有

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1.$$

(2) 当 k 充分大时,有 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985$. (第 19 届全苏奥林匹克题)

证明 记 $S_k=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}$,可以证明任给 $M>0$,存在自然数 k_0,使得当 $k\geqslant k_0$ 时,有 $S_k<k-M$, ①

由此,立即可得(1),(2)都成立.

事实上,由于 $a_1,a_2,\cdots$ 递增,所以

$$k-S_k=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_{i+1}-a_i}{a_{i+1}}\geqslant\frac{1}{a_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}(a_{i+1}-a_i)=1-\frac{a_1}{a_{k+1}}.$$

又 $a_1,a_2,\cdots$ 无界,从而 $a_k\to+\infty(k\to+\infty)$,由此可知存在 k_1 使得当 $k\geqslant k_1$ 时,$\frac{a_1}{a_{k+1}}<\frac{1}{2}$.

于是,对任意 $k\geqslant k_1$,有 $S_k<k-\frac{1}{2}$. ②

记 $b_1=a_{k_1+1},b_2=a_{k_1+2},\cdots$,则数列$\{b_k\}$也是递增无界的正数列,由②可知存在 k_2 使得$\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_2}{b_3}+\cdots+\frac{b_k}{b_{k+1}}<k-\frac{1}{2}$,对于任意 $k\geqslant k_2$.

即 $S_k<k-1$,对于任意 $k\geqslant k_1+k_2$.

以此类推易知①成立.

2. 数学归纳法

例3 设正数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1},n=1,2,3,\cdots$ 求证:对任意 $n\in\mathbf{N}$,有 $a_n<\frac{1}{n}$. (1964年北京市竞赛题)

证明 运用数学归纳法,当 $n=1$ 时,由 $a_1^2\leqslant a_1-a_2<a_1$,可知 $a_1<1$.

设对自然数 k,有 $a_k<\frac{1}{k}$.

若进一步,当 $a_k\leqslant\frac{1}{k+1}$,则由 $a_k^2\leqslant a_k-a_{k+1}$,可得

$$a_{k+1}\leqslant a_k-a_k^2<a_k\leqslant\frac{1}{k+1},$$

即要证之结果成立,否则$\frac{1}{k+1}<a_k<\frac{1}{k}$,从而

$$a_{k+1}\leqslant a_k-a_k^2<\frac{1}{k}(1-\frac{1}{k+1})=\frac{1}{k+1}.$$

无论何种情况,当 $n=k+1$ 时,要证之结果成立,从而由归纳原理知结论成立.

例4 数列 $a_1,a_2,a_3\cdots$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+\frac{1}{a_n}},n=1,2,3,\cdots$.求证:存在正数 α,使得$\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_n}{n^\alpha}\leqslant2,n=1,2,3,\cdots$ (1988年瑞典奥林匹克题)

证明 用数学归纳法可以证明$\frac{1}{2}n^{\frac{1}{3}}\leqslant a_n\leqslant2n^{\frac{1}{3}},n=1,2,\cdots$ ①

即 $\alpha = \frac{1}{3}$ 为所求.

事实上,当 $n = 1$ 时,由 $a_1 = 1$ 可知 ① 显然成立,设当 $n = k$ 时,① 式成立. 于是

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k^2 + \frac{1}{a_k}} \leqslant \sqrt{4k^{\frac{2}{3}} + 2k^{-\frac{1}{3}}}.$$

由此可得, $a_{k+1}^6 \leqslant (4k^{\frac{2}{3}} + 2k^{-\frac{1}{3}})^3 = 64k^2 + 96k + 48 + 8k^{-1}$

$$\leqslant 64k^2 + 96k + 56 < 64(k+1)^2,$$

即 $a_{k+1} < 2(k+1)^{\frac{1}{3}}$. ②

另一方面,由归纳假设 $a_{k+1} = \sqrt{a_k^2 + \frac{1}{a_k}} \geqslant \sqrt{\frac{1}{4}k^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{3}}}$,

所以 $a_{k+1}^6 \geqslant (\frac{1}{4}k^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{3}})^3 = \frac{1}{64}k^2 + \frac{3}{32}k + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}k^{-1} > \frac{1}{64}(k+1)^2$,

即 $a_{k+1} > \frac{1}{2}(k+1)^{\frac{1}{3}}$. ③

由 ② 和 ③ 得,当 $n = k+1$ 时,① 也成立,从而完成了对 ① 的归纳证明.

3. 平均值不等式法

例 5 设无穷数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0 = 1, 0 < x_{n+1} \leqslant x_n, n = 0,1,2,\cdots$

(1) 求证:存在 $n \geqslant 1$,使得 $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 3.999$.

(2) 构造一个满足假设条件的数列,使得对任何 $n \geqslant 1$,有 $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$.

(IMO - 23 试题)

解 (1) 记 $S_n = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n}$,由于 $\{x_k\}$ 是不增正数列,所以

$$S_2 = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} \geqslant 2x_0\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \geqslant 2x_0 = 2,$$

$$S_3 = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} \geqslant \frac{x_0^2}{x_1} + 2x_1\sqrt{\frac{x_2}{x_3}} \geqslant \frac{x_0^2}{x_1} + 2x_1 \geqslant 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} x_0 = 2^{1+\frac{1}{2}},$$

$$S_4 \geqslant \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + 2x_2 \geqslant \frac{x_0^2}{x_1} + 2^{1+\frac{1}{2}} \cdot x_1 \geqslant 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \cdot x_0 = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}.$$

依此类推易知 $S_n \geqslant 2^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}} \cdot x_0 = 2^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}) = 2$,所以存在自然数 n_0,使得当 $n \geqslant n_0$ 时,

$S_n > 3.999$.

(2) 取 $x_0 = 1, x_n = (\frac{1}{2})^n, n = 1,2,3,\cdots$,则

$s_1 = 2$, 当 $n > 1$ 时, $S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-2} < 4$.

例 6 数列 $\{F_n\}$ 定义如下: $F_1 = 1, F_2 = 2$, 且 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 1,2,3,\cdots$. 求证:对于任何自然数 n,均有 $\sqrt[n]{F_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{F_n}}$. (1992 年圣彼得堡市选拔题)

证明 令 $F_0 = 1$,则 $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$,

即 $1 = \frac{F_k}{F_{k+1}} + \frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}, k = 1,2,3,\cdots$

于是, $n = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{F_{k+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}$.

由平均值不等式,可得 $1 \geqslant \sqrt[n]{\frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{F_2}{F_3} \cdot \cdots \cdot \frac{F_n}{F_{n+1}}} + \sqrt[n]{\frac{F_0}{F_2} \cdot \frac{F_1}{F_3} \cdot \frac{F_2}{F_4} \cdots \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}}$.

注意到 $F_0 = F_1 = 1$,可知 $1 \geqslant \frac{1}{\sqrt[n]{F_{n+1}}} + \frac{1}{\sqrt[n]{F_n F_{n+1}}}$,

故 $\sqrt[n]{F_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{F_n}}$.

4. 放缩法

例 7 设数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足 $a_0 = \frac{1}{2}$,且 $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n} a_k^2, k = 0,1,\cdots,n-1$. 求证: $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$. (1980 年芬兰、英国、匈牙利、瑞典四国竞赛题)

证明 用数学归纳法易证 $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

对于 $0 \leqslant k \leqslant n-1$,由于 $a_{k+1} = a_k(1 + \frac{1}{n} a_k) < a_k(1 + \frac{1}{n} a_{k+1})$,

所以 $\frac{1}{a_k} < \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{n}$.

由此,可得 $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{a_{n-2}} - \frac{2}{n} > \cdots > \frac{1}{a_0} - 1 = 1$,

即 $a_n < 1$.

另一方面,由递推关系,可得

$\frac{a_{k+1}}{n+1} - \frac{a_k}{n} = \frac{a_k(n + a_k)}{n(n+1)} - \frac{a_k}{n} = \frac{a_k(a_k - 1)}{n(n+1)} < 0$,

从而 $a_{k+1}=a_k(1+\frac{a_k}{n})>a_k(1+\frac{a_{k+1}}{n+1})$.

于是,有$\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{1}{a_k}-\frac{1}{n+1},k=0,1,2,3,\cdots,n-1$.

由此,可得$\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{n+1}<\cdots<\frac{1}{a_0}-\frac{n}{n+1}=2-\frac{n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$,

即 $a_n>\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}>1-\frac{1}{n}$.

综上可得,$1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

5. 反证法

例 8 设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是正数数列,求证:存在无穷多个 $n\in\mathbf{N}$,使得

$\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}>1+\frac{1}{n}$. (普特南竞赛题)

证明 用反证法.设要证之结论不成立,则存在 $k\in\mathbf{N}$,使得当 $n\geqslant k$ 时,有

$\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1+\frac{1}{n}$,

即$\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{a_1}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1}$.

于是,可得$\frac{a_k}{k}\geqslant\frac{a_1}{k+1}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\geqslant\frac{a_1}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\frac{a_{k+2}}{k+2}$

$$\geqslant\cdots\geqslant a_1\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k+i}+\frac{a_{k+m}}{k+m}\geqslant\cdots$$

由于$\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k+i}=+\infty$,从而引出矛盾!

所以,必有无穷多个 $n\in\mathbf{N}$,使得$\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}>1+\frac{1}{n}$.

6. 辅助数列法

例 9 设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足

$a_0=\frac{\sqrt{2}}{2},a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}},n=0,1,2,\cdots$

$b_0=1,b_{n+1}=\frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n},n=0,1,2,\cdots$

求证:对任意非负整数 n,有 $2^{n+2}\cdot a_n<\pi<2^{n+2}\cdot b_n$. (IMO - 30 预选题)

证明 可令 $a_0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$,则 $a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^2}}=\sin\frac{\pi}{2^3}$.

若 $a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$,则 $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \sin\frac{\pi}{2^{n+3}}$.

于是,运用数学归纳法可证明(证略)$a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}, n = 0,1,2,\cdots$

同理,可证 $b_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}, n = 0,1,2,\cdots$

由于,当 $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ 时,有 $\sin x < x < \tan x$.

从而,有 $2^{n+2}\cdot a_n < \pi < 2^{n+2}\cdot b_n$.

7. 分拆与合项法

例 10 数列 $\{a_n\}$ 定义如下:$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, n = 1,2,\cdots$,证明:

$$1 - \frac{1}{2003^{2003}} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2003}} < 1.$$ (2003 年中国女子奥林匹克题)

证明 由题设得:$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}-1} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$.

因此,$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_{2003}} = (\frac{1}{a_1-1} - \frac{1}{a_2-1}) + (\frac{1}{a_2-1} - \frac{1}{a_3-1}) + \cdots$
$+ (\frac{1}{a_{2003}-1} - \frac{1}{a_{2004}-1}) = \frac{1}{a_1-1} - \frac{1}{a_{2004}-1} = 1 - \frac{1}{a_{2004}-1}$.

易知数列 $\{a_n\}$ 是严格递增的,所以 $a_{2004} > 1$,故 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2003}} < 1$.

为了证明左边的不等式,只要证明 $a_{2004} - 1 > 2003^{2003}$.由已知用归纳法可得 $a_{n+1} = a_n a_{n-1}\cdot\cdots\cdot a_1 + 1$ 及 $a_n\cdot\cdots\cdot a_1 > n^n (n \geqslant 1)$,从而结论成立.

例 11 在平面直角坐标系 xOy 中,y 轴正半轴上的点列 $\{A_n\}$ 与曲线 $y = \sqrt{2x}$ $(x \geqslant 0)$ 上的点列 $\{B_n\}$ 满足 $|OA_n| = |OB_n| = \frac{1}{n}$,直线 A_nB_n 在 x 轴上的截距为 a_n,点 B_n 的横坐标为 b_n, $n \in \mathbf{N}^+$.证明:(1) $a_n > a_{n+1} > 4$;

(2) 存在 $n_0 \in \mathbf{N}^+$,使得对任意的 $n > n_0$,都有

$$\frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_2} + \cdots + \frac{b_{n+1}}{b_n} < n - 2004.$$ (2004 年全国高中联赛题)

证明 (1) 由 $A_n(0,\frac{1}{n})$, $B_n(b_n,\sqrt{2b_n})(b_n > 0)$ 及 $|OB_n| = \frac{1}{n}$ 得 $b_n^2 + 2b_n = \frac{1}{n^2}$,则 $b_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1$.于是,对 $n \in \mathbf{N}^+$,有 $b_n > b_{n+1} > 0$.

注意到直线 A_nB_n 的方程为$(\sqrt{2b_n}-\frac{1}{n})x=b_n(y-\frac{1}{n})$.令 $y=0$,得

$$a_n=b_n\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sqrt{2b_n}}=b_n\cdot\frac{\sqrt{b_n^2+2b_n}}{\sqrt{b_n^2+2b_n}-\sqrt{2b_n}}=b_n\cdot\frac{\sqrt{b_n+2}}{\sqrt{b_n+2}-\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{b_n+2}(\sqrt{b_n+2}+\sqrt{2}).$$

显然,$f(x)=\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})$ 在$[0,+\infty)$上单调递增,于是由 $b_n>b_{n+1}>0$ 得 $a_n>a_{n+1}>4$.

(2) 设 $c_n=\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{n})^2+1}-\sqrt{(\frac{1}{n+1})^2+1}}{\sqrt{(\frac{1}{n})^2+1}-1}$

$$=n^2\cdot[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]\cdot\frac{\sqrt{(\frac{1}{n})^2+1}+1}{\sqrt{(\frac{1}{n})^2+1}+\sqrt{(\frac{1}{n+1})^2+1}}$$

$$>\frac{2n+1}{(n+1)^2}[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{(\frac{1}{n})^2+1}}]>\frac{2n+1}{2(n+1)^2}.$$

又$(2n+1)(n+2)-2(n+1)^2=n>0$,则 $c_n>\dfrac{1}{n+2}$,$n\in\mathbf{N}^+$.

设 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i$,当 $n>2^k-2>1$ 时,

$$S_n>\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^k}$$

$$=(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k})$$

$$>2\cdot\frac{1}{2^2}+2^2\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{k-1}{2}.$$

所以,取 $n_0=2^{4009}-2$,使对任意 $n>n_0$ 都有

$$(1-\frac{b_2}{b_1})+(1-\frac{b_3}{b_2})+\cdots+(1-\frac{b_{n+1}}{b_n})=S_n>S_{n_0}>\frac{4009-1}{2}=2004.$$

因此,对任意的 $n>n_0$,都有$\dfrac{b_2}{b_1}+\dfrac{b_3}{b_2}+\cdots+\dfrac{b_{n+1}}{b_n}<n-2004$.

例 12 设 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}$.求证:当正整数 $n\geqslant 2$ 时,$a_{n+1}<a_n$.

(2007 年全国高中联赛题)

证明 注意到 $\frac{1}{k(n+1-k)}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1-k}\right)$,

因此,$a_n=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

于是,对任意的正整数 $n\geqslant 2$,有 $\frac{1}{2}(a_n-a_{n+1})=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=$

$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right)>0$,

所以 $a_{n+1}<a_n$.

【解题思维策略分析】

1. 在运用各种方法时,注意运用不等式性质

例 13 设非负数列 $a_1,a_2,\cdots$,满足条件 $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$,$m,n\in\mathbf{N}$.求证:对任意 $n\geqslant m$,均有 $a_n\leqslant ma_1+\left(\frac{n}{m}-1\right)a_m$.

(CMO - 12 试题)

证明 设 $n=mq+r$,$q\in\mathbf{N}$,$0\leqslant r<m$.

于是,由条件式 $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$,有

$$a_n\leqslant a_{mq}+a_r\leqslant qa_m+a_r=\frac{n-r}{m}\cdot a_m+a_r=\left(\frac{n}{m}-1\right)a_m+\frac{m-r}{m}a_m+a_r$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{m}-1\right)a_m+\frac{m-r}{m}\cdot ma_1+ra_1=\left(\frac{n}{m}-1\right)a_m+ma_1.$$

例 14 设 $1<x_1<2$.令 $x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2$,$n=1,2,3,\cdots$.求证:$|x_n-\sqrt{2}|<2^{-n}$,$n=3,4,5,\cdots$

(1985 年加拿大奥林匹克题)

证明 由题设,有 $x_{n+1}=-\frac{1}{2}(x_n-1)^2+\frac{3}{2}$,$n=1,2,3,\cdots$ (*)

由于 $1<x_1<2$,则从(*)可推出 $\frac{1}{2}<x_2<\frac{3}{2}$.

再由(*)得到 $\sqrt{2}-\frac{1}{8}<\frac{11}{8}<x_3\leqslant\frac{3}{2}<\sqrt{2}+\frac{1}{8}$,

即 $\left|x_3-\sqrt{2}\right|<2^{-3}$.

设当 $n=k(k\geqslant 3)$ 时,有 $\left|x_k-\sqrt{2}\right|<2^{-k}$,

即$\sqrt{2}-2^{-k}<x_k<\sqrt{2}+2^{-k}$.

由(*)可得 $x_{k+1}<-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-2^{-k}-1)^2+\frac{3}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 2^{-k}-2^{-k}-2^{-2k-1}$

$<\sqrt{2}+2^{-k-1}$,

$x_{k+1}>-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2^{-k}-1)^2+\frac{3}{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot 2^{-k}+2^{-k}-2^{-2k-1}$.

再由 $k\geqslant 3$ 推出,$\sqrt{2}-1+2^{-k-1}<\frac{1}{2}$.

所以 $x_{k+1}>\sqrt{2}-2^{-k-1}$.于是, $\left|x_{k+1}-\sqrt{2}\right|<2^{-(k+1)}$.

由归纳原理,可知对 $n\geqslant 3$,有$\left|x_n-\sqrt{2}\right|<2^{-n}$.

2. 在运用各种方法时,充分关注数列或函数性质

例 15 设 $a_1=1$,且 $a_n=\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{1}{a_{n-1}}$,其中 $n=2,3,\cdots,10$.求证:$0<a_{10}-\sqrt{2}<10^{-370}$.

(第 49 届莫斯科奥林匹克题)

证明 由题设,显然有 $a_n>0,n=1,2,\cdots,10$,

从而 $a_n>\sqrt{2},n=2,3,\cdots,10$. ①

运用归纳法,易证 $a_n<2,n=1,2,\cdots,10$. ②

记 $\lambda_n=\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}$,则 $\lambda_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{a_n^2-2a_n\sqrt{2}+2}{a_n^2+2a_n\sqrt{2}+2}=\lambda_n^2$.

由此可知$\frac{a_{10}-\sqrt{2}}{a_{10}+\sqrt{2}}=\lambda_1^{2^9}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{512}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{1024}$.

再由 ②,便知 $a_{10}-\sqrt{2}<(2+\sqrt{2})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{1024}$. ③

注意到$(\sqrt{2}+1)^8=(3+2\sqrt{2})^4=(17+12\sqrt{2})^2>(24\sqrt{2})^2=1152>10^3$,

所以$(\sqrt{2}+1)^{1024}>(10^3)^{128}=10^{384}$.

于是,由 ③ 得到 $a_{10}-\sqrt{2}<10^{-383}$. ④

由 ① 和 ④ 便给出所证的不等式.

例 16 设实数列$\{x_n\}$满足:$0\leqslant x_1<1$,且对于 $n\geqslant 1$,有

$$x_n=\begin{cases}0,\text{当 } x_n=0\text{ 时},\\ \frac{1}{x_n}-[\frac{1}{x_n}],\text{当 } x_n\neq 0\text{ 时}.\end{cases}$$

求证:对任意自然数 n,有 $x_1+x_2+\cdots+x_n<\frac{F_1}{F_2}+\frac{F_2}{F_3}+\cdots+\frac{F_n}{F_{n+1}}$,

其中 $F_1 = F_2 = 1$，且对 $n \geqslant 1$，有 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$．（IMO－33 预选题）

证明 令 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$，显然，对于 $0 \leqslant x < y$，有

$$0 < f(x) - f(y) = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} < y - x.$$

由此易证，对任意自然数 n，总有当 $x \geqslant 0$ 时

$$g_n(x) = x + f(x) + f(f(x)) + \cdots + f^{(n)}(x) \text{ 严格单调．} \quad ①$$

用数学归纳法证明所要结论成立．当 $n = 1$ 时，

显然，有 $x_1 < \dfrac{F_1}{F_2} = 1$．

设当 $1 \leqslant n \leqslant k-1$ 时，所要结论成立．不妨设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 全不为0，否则由 $\{x_n\}$ 的递推关系可知 $x_k = 0$，再由归纳假设即得所要之结论．于是 $0 < x_i < 1, i = 1,2,\cdots,k$，且对于 $i = 2,3,\cdots,k$，有

$$x_{i-1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{x_{i-1}}\right] + x_i} \leqslant \frac{1}{1+x_i} = f(x_i). \quad ②$$

令 $y_1 = x_k, y_2 = x_{k-1}, \cdots, y_k = x_1$，则由②可得

$$0 < y_1 < 1, y_i \leqslant f(y_{i-1}), i = 2,3,\cdots,k. \quad ③$$

由于当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x)$ 单调，所以由③得

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k \leqslant y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + f(y_{k-1}).$$

再由①和③，得

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-2} + f(y_{k-2}) + f(f(y_{k-2})).$$

重复利用①和③，可得

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant y_1 + f(y_1) + \cdots + f^{(k-1)}(y_1).$$

由 $0 < y_1 < 1$，再由①，得

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k < 1 + f(1) + \cdots + f^{(k-1)}(1).$$

由于 $\dfrac{F_1}{F_2} = 1$，且当 $i \geqslant 1$ 时，有 $f\left(\dfrac{F_i}{F_{i+1}}\right) = \dfrac{F_{i+1}}{F_i + F_{i+1}} = \dfrac{F_{i+1}}{F_{i+2}}$，

从而，$1 + f(1) + \cdots + f^{(k-1)}(1) = \dfrac{F_1}{F_2} + \dfrac{F_2}{F_3} + \cdots + \dfrac{F_k}{F_{k+1}}$，

于是，$x_1 + x_2 + \cdots + x_k < \dfrac{F_1}{F_2} + \dfrac{F_2}{F_3} + \cdots + \dfrac{F_k}{F_{k+1}}$，

即当 $= k$ 时，所要之结论也成立．

综上，由归纳原理，结论获证．

【模拟实战】

习题 A

1. 设数列$\{a_n\}$满足条件：$a_1=5, a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+8a_n+16}{4a_n}(n=1,2,\cdots)$.求证：$a_n \geqslant 4(n=1,2,\cdots)$.

2. 设数列$\{a_n\}$满足条件：$a_1=\dfrac{1}{2}, 2ka_k=(2k-3)a_{k-1}(k \geqslant 2)$.求证：对一切$n \in \mathbf{N}$，有$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k < 1$.

3. 设数列$\{x_n\}$满足条件$x_0=5, x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}(n=0,1,\cdots)$.求证：$45 < x_{1000} < 45.1$.

4. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_n \cdot a_{n+1}=n+1(n \in \mathbf{N})$.求证：$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k} \geqslant 2(\sqrt{n+1}-1)$.

5. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$.求证：$14 < a_{1000} < 18$.

6. 求证：$16 < \sum\limits_{k=1}^{80} \dfrac{1}{\sqrt{k}} < 17$. （1992年全国高中联赛题）

7. 设数列$\{a_n\}$满足条件：$a_0=1, a_n=\dfrac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$.求证：$a_n > \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$.

8. 设$n, k \in \mathbf{N}$，证明：$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

习题 B

1. 设$n(n \geqslant 2)$是整数.证明：$\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{n}{n-k} \cdot \dfrac{1}{2^{k-1}} < 4$.

2. 数列$\{a_k\}, k=1,2,\cdots$是一非负实数列，满足$a_k-2a_{k+1}+a_{k+2} \geqslant 0$及$\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \leqslant 1$，$k=1,2,\cdots$.求证：对任何自然数$k$，有$0 \leqslant a_k-a_{k+1} < \dfrac{2}{k^2}$. （IMO－29预选题）

3. 设$x_0=10^9, x_n=\dfrac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}}, n=1,2,\cdots$.求证：$0 < x_{36}-\sqrt{2} < 10^{-9}$.

（第16届莫斯科奥林匹克题）

第四篇 不等式问题

第十二章 不等式证明中的变形技巧

【基础知识】

不等式的证明(或某些函数最值)方法多、技巧强,即在证明不等式时,常常要将题设结构式进行恰当的分拆、凑配、消合、代换等来整形,以达到我们的目的.

具体地说,凑——是按照我们的预定的目标,对题设结构式进行分拆拼凑、凑合,凑成可运用某个基本不等式或著名不等式,凑成能用上题设条件,凑成出现结论的形式等等.

配——是根据题设条件,找到或发掘出题目中的构成的特点进行搭配、配对,配置出为达到预期目的所需要的形式等等.

消——是根据题设条件,使我们尽可能地缩小考虑范围,恰当地进行放缩,并伴以分拆相消、代入相消、加减相消、乘除相消、引参消参等等.

合——是指合并、统一的变换技巧,统一几个分式的分母,统一几个式子的次数,统一用某个量或式表示其余的量或式等等.

代——是指代换、替代,即用一个字母代换一个式子(如和式、差式、比值、分式、增量、常数、几何量等)或用一个式子替代一个式子或字母.

不等式与恒等式有密切的联系,不等式可以由恒等式略去一些项或增加一些项而产生.因此,在运用如上变形技巧证明不等式时,我们也要注意一些恒等式及其恒等变形.

如下的几种恒等变形式及其写法值得我们注意：

$$(\text{I})\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i). \qquad (12-1)$$

$$(\text{II})\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j. \qquad (12-2)$$

$$(\text{III})\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2. \qquad (12-3)$$

$$(\text{IV})\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}a_ib_j\right). \qquad (12-4)$$

$$(\text{V})\sum_{i=1}^{n}a_ib_j=b_n\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)(b_k-b_{k+1}). \qquad (12-5)$$

注 (12 - 5) 式称为阿贝尔恒等式.

【典型例题与基本方法】

例 1 设 a,b,c 为正实数，且任意两数之和大于第三个数．求证：$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$. (1983 年瑞士竞赛题改编)

证明 由 $a=a+\frac{1}{2}(b-c+c-b)=\frac{1}{2}[(a+b-c)+(c+a-b)]$

$$\geqslant\sqrt{(a+b-c)(c+a-b)}.$$

同理，$b\geqslant\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}$，$c\geqslant\sqrt{(c+a-b)(b+c-a)}$.

以上三式两边分别相乘即证得结论.

例 2 设 a,b,c 是非负实数，求证：

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+a^2bc+b^2ac+c^2ab\geqslant 0.$$

(第 45 届莫斯科奥林匹克题)

证明 经计算，原不等式左端为

$$(a+b+c)[abc-(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)].$$

由于 $a,b,c\geqslant 0$，所以 $a+b-c,b+c-a,c+a-b$ 三个数中至多有一个为负(否则产生矛盾)．若上述三个数中有一个为负，则原不等式显然成立.

设 $a+b-c\geqslant 0,b+c-a\geqslant 0,c+a-b\geqslant 0$，由此，得

$a^2\geqslant(b-c)^2,b^2\geqslant(c-a)^2,c^2\geqslant(a-b)^2$.

于是，$a^2b^2c^2\geqslant[a^2-(b-c)^2]\cdot[b^2-(c-a)^2]\cdot[c^2-(a-b)^2]$

$$=(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2.$$

因此，$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

所以，原不等式获证.

例3 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是实数，$n\geqslant 2$，且 $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|=1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$. 求证：$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

（1989 年全国高中联赛题）

证法 1 由题设知，$\sum\limits_{x_k>0}x_k=\frac{1}{2}$，$\sum\limits_{x_k<0}x_k=-\frac{1}{2}$.

所以，$\sum\limits_{x_k>0}\frac{x_k}{k}\leqslant\frac{1}{2}$，$\sum\limits_{x_k<0}\frac{|x_k|}{k}\geqslant\frac{1}{2n}$. 由此可得

$$\left|\sum_{k=1}\frac{x_k}{k}\right|=\left|\sum_{x_k>0}\frac{x_k}{k}-\sum_{x_k<0}\frac{|x_k|}{k}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

证法 2 令 $S_0=0,S_1=x_1,S_2=x_1+x_2,\cdots,S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$.

由于 $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|=1$，$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=0$，所以 $S_n=0$，且

$|S_k|\leqslant\frac{1}{2}$，$k=0,1,2,\cdots,n$.

$$\text{因为}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(S_k-S_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}S_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}S_{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}S_k-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}S_k.$$

注意到 $S_0=S_n=0$，所以

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)s_k\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

例 4 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，其中 $0<a<b$. 求证：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2.$$

（第 12 届全苏奥林匹克题）

证明 由 $0<a\leqslant x_i\leqslant b$，$i=1,2,\cdots,n$ 可得

$$\left(\sqrt{x_i}-\frac{b}{\sqrt{x_i}}\right)\left(\sqrt{x_i}-\frac{a}{\sqrt{x_i}}\right)\leqslant 0,$$

即 $\quad x_i+\frac{ab}{x_i}\leqslant a+b$，$i=1,2,\cdots,n$.

从而，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+ab\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\leqslant(a+b)n$.

又 $2\sqrt{ab}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+ab\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$,

所以$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2$.

例5 设$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in[1,2]$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$.求证:$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{17}{10}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$,并问等号成立的充要条件. (1998年全国高中联赛题)

证明 由于$a_i,b_i\in[1,2,],i=1,2,\cdots,n$,

因此$\frac{1}{2}\leqslant\frac{\sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}}{\sqrt{a_ib_i}}=\frac{a_i}{b_i}\leqslant 2$. ①

从而有$\left(\frac{1}{2}\sqrt{a_ib_i}-\sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}\right)\left(2\sqrt{a_ib_i}-\sqrt{\frac{a_i^3}{b_i}}\right)\leqslant 0$,

即$a_ib_i-\frac{5}{2}a_i^2+\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant 0$.

由此,得$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{5}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$. ②

又由①得$\left(\frac{1}{2}b_i-a_i\right)(2b_i-a_i)\leqslant 0$,

即$b_i^2-\frac{5}{2}a_ib_i+a_i^2\leqslant 0,a_ib_i\geqslant\frac{2}{5}(a_i^2+b_i^2)$.

将上式代入②式,并注意条件$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$,得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\frac{2}{5}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)$$

$$=\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

要使等号成立,必须使$a_i=1,b_i=2$或者$a_i=2,b_i=1$,再注意已知条件$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$,可以断定,等号成立的充要条件是$n$为偶数,且$a_1,a_2,\cdots,a_n$中一半是1,另一半是2,$b_i=\frac{2}{a_i},i=1,2,\cdots,n$.

注 (1)此例由徐万益先生给出了推广,由罗增儒先生给出了取等号的充要条件:设$x_1,x_2,\cdots x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n\in[a,b](0<a<b)$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2$.则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3}{y_i}\leqslant\frac{a^4+b^4}{a^3b+ab^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \quad ①$$

其中取等号的充要条件是：n 取偶数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有一半取 a、一半取 b，且 $x_iy_i=ab$，$i=1,2,\cdots,n$.

事实上，由 $a\leqslant x_i\leqslant b$，$a\leqslant y_i\leqslant b$，有

$$\frac{a}{b}y_i\leqslant x_i\leqslant\frac{b}{a}y_i\Leftrightarrow\left(x_i-\frac{a}{b}y_i\right)\left(x_i-\frac{b}{a}y_i\right)\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x_i^2-\frac{a^2+b^2}{ab}x_iy_i+y_i^2\leqslant 0. \quad ②$$

② 乘以 $\frac{x_i}{y_i}+\frac{ab}{a^2+b^2}>0$，得

$$\frac{x_i^3}{y_i}-\frac{a^4+b^4+a^2b^2}{ab(a^2+b^2)}x_i^2-\frac{ab}{a^2+b^2}y_i^2\leqslant 0, \quad ③$$

移项并求和，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3}{y_i}\leqslant\frac{a^4+b^4+a^2b^2}{ab(a^2+b^2)}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{ab}{a^2+b^2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

$$=\frac{a^4+b^4+a^2b^2}{ab(a^2+b^2)}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{ab}{a^2+b^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$=\frac{a^4+b^4}{a^3b+ab^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2. \quad ④$$

从而，① 式已被证明，并且 ④ 取等号 $\Leftrightarrow$ ③ 式中第一式取等号 $\Leftrightarrow$ ② 式中第一式取等号 $\Leftrightarrow x_i=\frac{a}{b}y_i$ 或 $x_i=\frac{b}{a}y_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

首先证明，x_i 只能取 a 或 $b(i=1,2,\cdots,n)$. 若不然，存在 x_j，使得 $a<x_j<b$，有 $\frac{a}{b}y_j=x_j>a\Rightarrow y_j>b$，矛盾，或 $\frac{b}{a}y_j=x_j<b\Rightarrow y_j<a$，也矛盾.

这表明，所有的 x_i 只能取 a 或 b 两个值，且只能是

$$\begin{cases}x_i=a,\\ y_i=b;\end{cases}\quad\begin{cases}x_i=b,\\ y_i=a.\end{cases}\quad 满足\ x_iy_i=ab.$$

其次证明，n 为偶数，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 一半取 a，一半取 b. 记 x_i 中有 k 个 a，$n-k$ 个 b，则 y_i 中有 k 个 b，$n-k$ 个 a. 代入已知条件 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$，得

$$\underbrace{a^2+\cdots+a^2}_{k个}+\underbrace{b^2+\cdots+b^2}_{k个}=\underbrace{b^2+\cdots+b^2}_{k个}+\underbrace{a^2+\cdots+a^2}_{k个},$$

故 $(b^2-a^2)(n-2k)=0$.

但 $b^2-a^2>0$,故只有 $n=2k$.

这就证明了等号成立时,n 为偶数,且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有一半取 a,一半取 b,且 $x_iy_i=ab$.

反之,充分性的验证可以分别计算不等式左、右两边的值,有

$$\text{左边}=\frac{a^3}{b}+\cdots+\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}+\cdots+\frac{b^3}{a}$$

$$=\frac{n}{2}\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\right)=\frac{n(a^4+b^4)}{2ab}(n\text{ 为偶数}).$$

$$\text{右边}=\frac{a^4+b^4}{a^3b+ab^3}(a^2+\cdots+a^2+b^2+\cdots+b^2)$$

$$=\frac{a^4+b^4}{ab(a^2+b^2)}\cdot\frac{n}{2}(a^2+b^2)=\frac{n(a^4+b^4)}{2ab}(n\text{ 为偶数}).$$

左、右两边相等,证毕.

(2) 山东的崔金兴老师探讨了如下问题:若 $a,b\in[\alpha,\beta](0<\alpha<\beta)$,则

(Ⅰ) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$;

(Ⅱ) $\frac{a^2+b^2}{ab}\leqslant\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ 或 $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\leqslant\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$;

(Ⅲ) $\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}\leqslant\frac{(a+b)^2}{(\alpha+\beta)^2}$.

上述三式中的等号当且仅当 $a=\alpha,b=\beta$ 或 $a=\beta,b=\alpha$ 时成立.

事实上,不妨设 $a\leqslant b$,令 $\frac{b}{a}=t$,则函数 $f(t)=t+\frac{1}{t}$ 在 $[\frac{\alpha}{\beta},1]$ 内递减,在 $[1,\frac{\beta}{\alpha}]$ 内递增,知 $t=\frac{\beta}{\alpha}$ 或 $t=\frac{\alpha}{\beta}$ 处取最大值,即 $f(t)=t+\frac{1}{t}\leqslant\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$,

故 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$.

由上式即有 $\frac{a^2+b^2}{ab}\leqslant\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ 或 $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\leqslant\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$.

于是 $ab\geqslant\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}(a^2+b^2)$,有 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\geqslant a^2+b^2+\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}(a^2+b^2)=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2+\beta^2}(a^2+b^2)$,故有 $\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}\leqslant\frac{(a+b)^2}{(\alpha+\beta)^2}$. 其中等号成立的条件可由上述推导中得出.

特别地,取 $a_i=a,b_i=b,\alpha=1,\beta=2$,由(Ⅱ)有

$a_i^2+b_i^2\leqslant\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}a_ib_i=\frac{5}{2}a_ib_i$，有$\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{5}{2}a_i^2-a_ib_i$，即可证得1998年全国高中联赛题即例5.

例6 已知 $a_1,a_2,a_3\cdots$ 是两两不相同的自然数列.求证：对任何正整数 n 有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

（IMO－20试题）

证法1 为便于比较，将不等式两边对应项的分母统一起来，即把 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 改写成 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2}$. 注意到 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两互不相同的自然数列，所以，$a_1\geqslant 1,a_1+a_2\geqslant 1+2,\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 1+2+\cdots+n$.

从而
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}&=\frac{a_1-1}{1}+\frac{a_2-2}{2^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}\\&\geqslant\frac{a_1+a_2-(1+2)}{2^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}\\&\geqslant\frac{(a_1+a_2+a_3)-(1+2+3)}{3^2}+\sum_{k=4}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}\\&\geqslant\cdots\\&\geqslant\frac{1}{n^2}[(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(1+2+\cdots+n)]\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

故
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

证法2 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列，使得 $b_1<b_2<\cdots<b_n$.由于 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是自然数，则 $b_k\geqslant k,k=1,2,\cdots,n$.

由排序不等式，得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot\frac{b_k}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

证法3 令 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k\geqslant 1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1),b_k=\frac{1}{k^2}$，利用阿贝尔恒等式，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}&=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})\\&\geqslant\frac{1}{n^2}S_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

【解题思维策略分析】

1. 发掘题设内隐条件,对题设式恰当变形处理

例 7　设 $0<t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n<1$.求证:

$$(1-t_n)^2\left[\frac{t_1}{(1-t_1^2)^2}+\frac{t_2^2}{(1-t_2^3)^2}+\cdots+\frac{t_n^n}{(1-t_n^{n+1})^2}\right]<1.$$　(IMO－28 预选题)

证明　由题设知 $\frac{(1-t_n)^2}{(1-t_k)^2}\leqslant 1, k=1,2,\cdots,n$,所以

$$\frac{t_1(1-t_n)^2}{(1-t_1^2)^2}\leqslant\frac{t_1}{(1+t_1)^2}<\frac{t_1}{1+t_1}=1-\frac{1}{1+t_1},$$

$$\frac{t_2^2(1-t_n)^2}{(1-t_2^3)^2}\leqslant\frac{t_2^2}{(1+t_2+t_2^2)^2}<\frac{1}{1+t_2}-\frac{1}{1+t_1+t_2^2}\leqslant\frac{1}{1+t_1}-\frac{1}{1+t_2+t_2^2},$$

$$\frac{t_k^k(1-t_n)^2}{(1-t_k^{k+1})^2}\leqslant\frac{t_k^k}{(1+t_k+\cdots+t_k^k)^2}<\frac{1}{1+t_k+\cdots+t_k^{k-1}}-\frac{1}{1+t_k+\cdots+t_k^k}$$

$$\leqslant\frac{1}{1+t_{k-1}+t_{k-1}^2+\cdots+t_{k-1}^{k-1}}-\frac{1}{1+t_k+\cdots+t_k^k},\text{其中 } k=3,4,\cdots$$

将以上不等式两边相加,即得所证不等式.

例 8　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数,它们的和是 1,求证:

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$(第 24 届全苏奥林匹克题)

证明　注意到 $\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2-a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}=0$,

则 $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}=\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_1^2}{a_n+a_1}$.

再由基本不等式 $x^2+y^2\geqslant 2xy$,有

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\geqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2),\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}\geqslant\frac{1}{2}(a_2+a_3),$$

…

$$\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1} \geqslant \frac{1}{2}(a_n+a_1),$$

故 $$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_n+a_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{1}{2}.$$

2. 注意综合运用各种变形技巧

例 9 设正数 a,b,c 满足 $abc=8$,证明:

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geqslant \frac{4}{3}.$$

(2005 年 APMO 试题)

证明 注意到 $\frac{a^2+2}{2}=\frac{(a^2-a+1)+(a+1)}{2} \geqslant \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}=\sqrt{a^3+1}$,用 $\sum$ 表示循环和,故只需证明 $\sum\frac{a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} \geqslant \frac{1}{3}$.

即 $3\sum a^2(c^2+2) \geqslant (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$.

展开,得 $6a^2+6b^2+6c^2+3a^2b^2+3b^2c^2+3c^2a^2 \geqslant a^2b^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2+4a^2+4b^2+4c^2+8$,

由 $abc=8$,即证 $2a^2+2b^2+2c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant 72$. (*)

而 $2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 6\sqrt[3]{(abc)^2}=24$,

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^4}=48$.

故(*)式显然成立,故原不等式获证.

例 10 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n \geqslant 2)$ 是 n 个互不相同的实数, $S=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$, $M=\min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2$.求证: $\frac{S}{M} \geqslant \frac{n(n^2-1)}{12}$. (1990 年中国奥林匹克题)

证明 由题给条件,不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,

则 $(a_i-a_j)^2 \geqslant M\,|\,i-j\,|^2$. ①

记 $A=nS-(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$,则

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i,j=1}^{n}a_ia_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_i(a_i-a_j).$$

又 $A = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_j(a_j - a_i)$,

从而 $A = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i - a_j)^2$. ②

由 ① 和 ②,可得

$$nS \geqslant A \geqslant \frac{M}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^2$$
$$= M[n(1+2^2+\cdots+n^2)-(1+2+\cdots+n)^2]$$
$$= M[n\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}n^2(n+1)^2],$$

故 $nS \geqslant \frac{1}{12}n^2(n+1)(4n+2-3n-3)\cdot M = \frac{1}{12}n^2(n^2-1)M$,

即 $\frac{S}{M} \geqslant \frac{n(n^2-1)}{12}$.

例 11 设 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n (n \geqslant 3)$ 满足条件

(1) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$;

(2) $0 < a_1 = a_2, a_i + a_{i+1} = a_{i+2} (i = 1,2,\cdots,n-2)$;

(3) $0 < b_1 \leqslant b_2, b_i + b_{i+1} \leqslant b_{i+2} (i = 1,2,\cdots,n-2)$.

求证: $a_{n-1} + a_n \leqslant b_{n-1} + b_n$. (CMO - 10 试题)

证明 如果 $a_1 \leqslant b$,则由已知递推关系式可知 $a_i \leqslant b_i (i = 2,3,\cdots,n)$,从而结论成立.

如果存在 i_0,使得 $2 \leqslant i_0 \leqslant n-1, a_{i_0} \leqslant b_{i_0}$ 且 $a_{i_0+1} \leqslant b_{i_0+1}$,则当 $i_0 = n-1$ 时,立刻得到结论;而当 $2 \leqslant i_0 \leqslant n-2$ 时,由递推关系式可知,对一切 $i \geqslant i_0 + 2$,均有 $a_i \leqslant b_i$,从而结论成立.

如果以上两种情况都不出现,那么必有 $a_1 > b_1$,并且在集合 $I = \{i \mid a_i \leqslant b_i, 2 \leqslant i \leqslant n-2\}$ 中无相邻的自然数.这就是说,对任何 $i \in I$,必有 $a_i \leqslant b_i, a_{i-1} > b_{i-1}, a_{i+1} > b_{i+1}$.于是,有 $a_{i-1} + a_i = a_{i+1} > b_{i+1} \geqslant b_{i-1} + b_i, i \in I$. ①

而对于任何未在 ① 式出现的下标 $j \leqslant n-2$,都有 $a_j > b_j$. ②

将所有 ① 和 ② 中的不等式相加,得 $\sum_{j=1}^{n-2} a_j > \sum_{j=1}^{n-2} b_j$.

又由条件 $\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j$,故 $a_{n-1} + a_n \leqslant b_{n-1} + b_n$.

例 12 求证:对任意正实数 a, b, c 都有

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$ (2004年西部奥林匹克题)

证明 先证右边不等式:由抽屉原理知,$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}$ 中至少有两个在$\frac{\sqrt{2}}{2}$的同侧(或在$\frac{\sqrt{2}}{2}$处),不妨设$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$在$\frac{\sqrt{2}}{2}$同侧(或$\frac{\sqrt{2}}{2}$处),

则$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\geqslant 0$,

即$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)\leqslant\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{2}$.

从而$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)$

$$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{2(c^2+a^2)}}$$

注意到$\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}\geqslant ab+bc,\sqrt{2(c^2+a^2)}\geqslant c+a$,则有

$$\frac{1}{2}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{2(c^2+a^2)}}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{ab}{ab+bc}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{2}.$$

故$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

其中等号当且仅当 $a=b=c$ 时取得.

再证左边不等式:由 $a^2+b^2>a^2>0$,有 $0<\frac{a^2}{a^2+b^2}<1$.

则 $0<\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}<1$,即$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}>\frac{a^2}{a^2+b^2}>\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$,

亦即$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}>\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$.

同理 $\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}>\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2},\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}>\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

于是 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}>\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$.

故原不等式获证.

3. 注意局部调整

例 13 若 x,y,z 是正实数,求函数$\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)}$的最大

值,并证明你的结论. (2003年新加坡奥林匹克题)

解 在取定 y 的情况下,$\frac{x}{(1+5x)(4x+3y)}=\frac{x}{20x^2+(15y+4)x+3y}=\frac{1}{20x+\frac{3y}{x}+15y+4}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{20\cdot 3y}+15y+4}=\frac{1}{(\sqrt{15y}+2)^2}$,

其中等号当且仅当 $x=\sqrt{\frac{3y}{20}}$ 时取得.

同理可得 $\frac{z}{(5y+6z)(z+18)}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{6\cdot 90y}+5y+108}=\frac{1}{(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})^2}$,

其中等号当且仅当 $z=\sqrt{15y}$ 时取得.

所以 $\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)}\leqslant\frac{y}{(\sqrt{15y}+2)^2(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})^2}=\left(\frac{1}{5\sqrt{3y}+\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{y}}+20\sqrt{5}}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{2\sqrt{5\sqrt{3}\cdot 12\sqrt{3}}+20\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5120}$.

故当且仅当 $x=\frac{3}{5},y=\frac{12}{5},z=6$ 时,所求函数取得最大值 $\frac{1}{5120}$.

例14 设非负实数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=1$,求 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$ 的最小值. (2003年中国国家队集训题)

解法1 显然 a,b,c 中至少有一个不超过 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,不妨设 $b\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,则

$$S=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{a+2b+c}{1+b^2}+\frac{1}{c+a}=\frac{2b}{1+b^2}+\frac{a+c}{1+b^2}+\frac{1}{a+c}.$$

先固定 b,来求 $\frac{a+c}{1+b^2}+\frac{1}{a+c}$ 的最小值.

令 $a+c=x$,则 $f(x)=\frac{x}{1+b^2}+\frac{1}{x}$ 在 $x\geqslant\sqrt{1+b^2}$ 时单调递增.

又 $1-b(a+c)=ac\leqslant\frac{(a+c)^2}{4}$,即 $1-bx\leqslant\frac{x^2}{4}$.所以 $x\geqslant 2\sqrt{1+b^2}-2b$.

结合 $0\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,知 $x\geqslant 2\sqrt{b^2+1}-2b\geqslant\sqrt{b^2+1}$,

从而 $f(x)\geqslant f(2\sqrt{b^2+1}-2b)$.

综上可知,$S\geqslant\frac{2b}{1+b^2}+f(2\sqrt{b^2+1}-2b)=\frac{2b}{1+b^2}+\frac{2}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{2b}{1+b^2}+$

$$\frac{1}{2\sqrt{b^2+1}-2b}=\frac{2}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{2\sqrt{b^2+1}-2b}=\frac{2}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{\sqrt{b^2+1}+b}{2}.$$

令 $\sqrt{b^2+1}-b=y$,则 $b^2+1=(y+b)^2$,解之得 $b=\frac{1-y^2}{2y}$.

从而
$$S\geqslant\frac{2}{y+b}+\frac{1}{2y}=\frac{2}{y+\frac{1-y}{2y}}+\frac{1}{2y}=\frac{4y}{1+y^2}+\frac{1}{2y}$$
$$=\frac{9y^2+1}{2y(1+y^2)}=\frac{5}{2}+\frac{9y^2+1-5y-5y^3}{2y(1+y^2)}=\frac{5}{2}+\frac{(1-y)(5y^2-4y+1)}{2y(1+y^2)}$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{(1-y)[5(y-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}]}{2y(1+y^2)}\geqslant\frac{5}{2}.$$

其中等号当 $y=1$ 即 $b=0$ 时取到,这时 $a=c=1$,故所求最小值为$\frac{5}{2}$.

解法2 记$f(a,b,c)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$,注意到条件式,知 a、b、c 有对称性,可不妨设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c$.

先证明 $f(0,a+b,c')\leqslant f(a,b,c)$,其中 $c'=\frac{1}{a+b}$.

即证 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c'}+\frac{1}{c'}\leqslant\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$.

由于 $c'=\frac{1}{a+b}$,$c=\frac{1-ab}{a+b}$,不难验证上式等价于

$(a+b)^2ab\leqslant 2(1-ab)$. （*）

注意到 $2(1-ab)=2c(a+b)\geqslant(a+b)^2\geqslant(a+b)^2\cdot ab$,故(*)式成立.

即有 $f(a,b,c)\geqslant f(0,a+b,\frac{1}{a+b})=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}+a+b$.

令 $t=\frac{1}{a+b}+a+b$,则 $t\geqslant 2$.由于函数 $g(t)=t+\frac{1}{t}$ 在$t\geqslant 2$上是增函数,从而当 $t\geqslant 2$时 $g(t)\geqslant g(2)=\frac{5}{2}$,即$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}+a+b\geqslant\frac{5}{2}$,

故 $f(a,b,c)\geqslant\frac{5}{2}$.

【模拟实战】

习题 A

1. 已给非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,如果 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$,求证:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_n^2}\leqslant\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}.$$

(1989 年前苏联教育部推荐试题)

2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是正实数,且 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$.求证:$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

(1991 年亚太地区奥林匹克题)

3. 设 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 都是正数,求证:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2>4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1).$$

(第 7 届全苏奥林匹克题)

4. 设 $a_i\in[-1,1]$,$a_ia_{i+1}\neq-1$,$i=1,2,\cdots,n$,其中 $a_{n+1}=a_1$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_ia_{i+1}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}.$$

(1993 年圣彼得堡市选拔题)

5. 设非负实数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$,则 $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2}\leqslant1$.

(2003 年中国西部奥林匹克题)

6. 设 $a,b,c>0$,求证 $\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geqslant\frac{3}{1+abc}$.

(2000 年国家队集训题)

7. 对所有 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,求证:$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}>2$.

8. 设 a、b、c 为不同实数,证明:$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2\geqslant5$.

9. 设 $n\geqslant2$,$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$ 是正数,且 $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_{n+1}-a_n\geqslant0$.

证明:$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}\leqslant\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a_1a_n+a_2a_{n+1}}{a_1a_2a_na_{n+1}}$. (2004 年中国香港奥林匹克题)

10. 设 $2n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{2n-1}(a_{i+1}-a_i)^2=1$,求 $(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})$

$-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的最大值.（2003 年中国西部奥林匹克题）

11. 实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$,求证:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k^2)\leqslant\frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2.$$（CMO－21 试题）

12. 已知实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n>2)$ 满足 $\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|>1$, $|x_i|\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$,求证:存在正整数 k,使得 $\left|\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{n}x_i\right|\leqslant 1$.（2005 年中国西部奥林匹克题）

13. 已知 $a\geqslant b\geqslant c>0$,且 $a+b+c=3$.证明 $ab^2+bc^2+ca^2\leqslant\frac{27}{8}$.

（2002 年中国香港奥林匹克题）

14. 设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$,证明 $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 8$.

（2003 年美国奥林匹克题）

15. 数列 $a_0,a_1,\cdots$ 与 $b_0,b_1,\cdots$ 定义如下:$a_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}}(n=0,1,\cdots)$; $b_0=1$, $b_{n+1}=\frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n}(n=0,1,\cdots)$. 证明:对每一个 $n=0,1,\cdots$,有 $2^{n+2}\cdot a_n<\pi<2^{n+2}\cdot b_n$.（IMO－30 预选题）

16. 设 $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}\sqrt{\frac{k}{j}}x_kx_j=1$.求 $\sum_{i=1}^{n}x_i$ 的最大值与最小值.（2001 年全国高中联赛题）

习题 B

1. 设 $0\leqslant x_i\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$, $n\geqslant 2$.求证:存在 i 满足 $1\leqslant i\leqslant n-1$,且 $x_i(1-x_{i+1})\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n)$.（IMO－32 预选题）

2. 已知正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足

(1) $x_1>x_2>\cdots>x_n$, $y_1>y_2>\cdots>y_n$;

(2) $x_1>y_1$, $x_1+x_2>y_1+y_2$, $\cdots$, $x_1+x_2+\cdots+x_n>y_1+y_2+\cdots+y_n$.

求证:对任何自然数 k,有 $x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k>y_1^k+y_2^k+\cdots+y_n^k$.

（第 35 届莫斯科奥林匹克题）

3. 设 n 是大于 2 的自然数,求证:当且仅当 $n=3$ 或 $n=5$ 时,对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,$

a_n，下面的不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)\geqslant 0.$$
（IMO－13 试题）

4. 非负实数满足 $x^2+y^2+z^2=1$，求证：$1\leqslant\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\leqslant\sqrt{2}$.

（2003 年中国国家队集训题）

5. 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为 n 个正实数，且方程组 $x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}+b_kx_k=0,k=1,2,\cdots,n$，有一组不全为零的实数解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 这里 $x_0=x_{n+1}=0$. 求证：

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant\frac{4}{n+1}.$$
（2003 年中国国家队集训题）

第十三章　几个著名不等式与不等式证明

【基础知识】

这里的几个著名不等式,指的是

算术－几何平均值不等式　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^+$,则

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}, \tag{13-1}$$

其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取到.

柯西不等式　设 $a_i, b_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n$,则

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2, \tag{13-2}$$

其中等号当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时取到.

排序不等式　设 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n, 0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n$,

则 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

$$\geqslant a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \cdots + a_nb_{i_n} \tag{13-3}$$

$\geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$.

排序不等式的推论　设 $a, b \in \mathbf{R}^+, p、q > 0$,则 $a^{p+q} + b^{p+q} \geqslant a^pb^q + a^qb^p$,

(13－4)

其中等号当且仅当 $a = b$ 时取到.

车比雪夫不等式　设两个正数序列 $\{a_n\},\{b_n\}$,

(1) 若 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$,则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right); \tag{13-5}$$

(2) 若 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$,则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{13-6}$$

幂平均不等式　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^+$,且 $\alpha < \beta$,则

$$\left(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant\left(\frac{x_1^\beta+x_2^\beta+\cdots+x_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}},\tag{13-7}$$

其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取得.

权方和不等式 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+,y_1,y_2,\cdots,y_n\in\mathbf{R}^+$,

若 $m>0$ 或 $m<-1$,

则 $$\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{m+1}}{y_i^m}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^{m+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i\right)^m},\tag{13-8}$$

若 $-1<m<0$,则 $$\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{m+1}}{y_i^m}\leqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^{m+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i\right)^m}.\tag{13-9}$$

上述两不等式中的等号均当且仅当 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}$ 时取得.

琴生不等式 若连续函数 $f(x)$ 在区间 I 内下凸(或上凸),则对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$ 及任意 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{R}^+$,且 $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i=n$,必有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n),\tag{13-10}$$

或 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$,其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取得 .

卡尔松不等式 设 $a_{ij}>0(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$,则

$$\prod_{j=1}^m\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right)^{\frac{1}{m}}\geqslant\sum_{i=1}^n\prod_{j=1}^m a_{ij}^{\frac{1}{m}}.\tag{13-11}$$

其中等号当且仅当 $\frac{a_{i1}}{a_{i+11}}=\frac{a_{i2}}{a_{i+12}}=\cdots=\frac{a_{im}}{a_{i+1m}}$ 时取得 .

此不等式可表述为:对 $n\times m$ 正实数长方形数表(矩阵),m 列每列数之和的几何平均值不小于其 n 行每行数的几何平均值之和 .

【典型例题与基本方法】

例 1 设 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$.求证:

$$(1-x_n)^2\cdot\left[\frac{x_1}{(1-x_1^2)^2}+\frac{x_2^2}{(1-x_2^3)^2}+\cdots+\frac{x_n^n}{(1-x_n^{n+1})^2}\right]<1.$$

(《中等数学》1998 年 5 期奥林匹克训练题,参见第十二章例 7)

证明 由 $0 < x_k \leqslant x_n < 1(k = 1,2,\cdots,n)$,

有 $0 < \dfrac{1 - x_n}{1 - x_k} \leqslant 1$(等号仅当 $k = n$ 时成立).

故 $(1 - x_n)^2 \cdot \dfrac{x_k^k}{(1 - x_k^{k+1})^2}$

$$= \frac{(1 - x_n)^2}{(1 - x_k)^2} \cdot \frac{x_k^k}{(1 + x_k + x_k^2 + \cdots + x_k^k)^2} \leqslant \frac{x_k^k}{(1 + x_k + x_k^2 + \cdots + x_k^k)^2}$$

$$< \frac{x_k^k}{[(k + 1) \cdot \sqrt[k+1]{1 \cdot x_k \cdot x_k^2 \cdot \cdots \cdot x_k^k}]^2} = \frac{x_k^k}{(k + 1)^2 \cdot x_k^k} = \frac{1}{(k + 1)^2}.$$

从而 $(1 - x_n)^2 \cdot [\dfrac{x_1}{(1 - x_1^2)^2} + \dfrac{x_2^2}{(1 - x_2^3)^2} + \cdots + \dfrac{x_n^n}{(1 - x_n^{n+1})^2}]$

$$< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n + 1)^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n + 1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}\right)$$

< 1.

例 2 设 $a_i \in \mathbf{R}^+, i = 1,2,\cdots,n$,且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$.证明:

$$\frac{a_1^4}{a_1^3 + a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + a_2^3} + \frac{a_2^4}{a_2^3 + a_2^2 a_3 + a_2 a_3^2 + a_3^3} + \cdots + \frac{a_n^4}{a_n^3 + a_n^2 a_1 + a_n a_1^2 + a_1^3} \geqslant \frac{1}{4}.$$

(1998 年河南省竞赛题)

证明 令
$$A = \frac{a_1^4}{a_1^3 + a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + a_2^3} + \frac{a_2^4}{a_2^3 + a_2^2 a_3 + a_2 a_3^2 + a_3^3} + \cdots + \frac{a_n^4}{a_n^3 + a_n^2 a_1 + a_n a_1^2 + a_1^3},$$

$$B = \frac{a_2^4}{a_1^3 + a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + a_2^3} + \frac{a_3^4}{a_2^3 + a_2^2 a_3 + a_2 a_3^2 + a_3^3} + \cdots + \frac{a_1^4}{a_n^3 + a_n^2 a_1 + a_n a_1^2 + a_1^3}.$$

则
$$A - B = \frac{a_1^4 - a_2^4}{(a_1^2 + a_2^2)(a_1 + a_2)} + \frac{a_2^4 - a_3^4}{(a_2^2 + a_3^2)(a_2 + a_3)} + \cdots + \frac{a_n^4 - a_1^4}{(a_n^2 + a_1^2)(a_n + a_1)}$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_1) = 0.$$

从而,由算术 - 几何平均值不等式,有

$a_i^4 + a_{i+1}^4 \geqslant \frac{1}{2}(a_i^2 + a_{i+1}^2)^2, i = 1,2,\cdots,n$,且 $a_{n+1} = a_1$,故

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}(A + B) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{a_1^4 + a_2^4}{(a_1^2 + a_2^2)(a_1 + a_2)} + \frac{a_2^4 + a_3^4}{(a_2^2 + a_3^2)(a_2 + a_3)} + \cdots + \frac{a_n^4 + a_1^4}{(a_n^2 + a_1^2)(a_n + a_1)}\right] \\
&\geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n + a_1}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{8}[(a_1 + a_2) + \cdots + (a_n + a_1)] = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

例 3 设 a,b,c 为正实数,且满足 $abc = 1$.试证:

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \geqslant \frac{3}{2}. \quad \text{(IMO - 36 试题)}$$

证法 1 令 $A = \frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)}$,

则由 $\frac{1}{a} = bc$,可得 $A = \frac{b^2c^2}{a(b + c)} + \frac{c^2a^2}{b(c + a)} + \frac{a^2b^2}{c(a + b)}$.

利用柯西不等式和算术 - 几何平均值不等式,有

$$
\begin{aligned}
&[a(b + c) + b(c + a) + c(a + b)] \cdot A \\
&\geqslant [\sqrt{a(b + c)} \cdot \frac{bc}{\sqrt{a(b + c)}} + \sqrt{b(c + a)} \cdot \frac{ca}{\sqrt{b(c + a)}} \\
&\quad + \sqrt{c(a + b)} \cdot \frac{ab}{\sqrt{c(a + b)}}]^2 \\
&= (bc + ca + ab)^2 \geqslant (bc + ca + ab) \cdot 3\sqrt[3]{bc \cdot ca \cdot ab} \\
&= 3(bc + ca + ab),
\end{aligned}
$$

即 $2(bc + ca + ab) \cdot A \geqslant 3(b + c + ca + ab)$.

故 $A \geqslant \frac{3}{2}$.

证法 2 注意到(13 - 6)式,取 $m = 1$ 时,有

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}. \quad (13 - 12)$$

由 $abc = 1$,有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \\
&= \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b + c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(c + a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a + b)} = \frac{(\frac{1}{a})^2}{ab + ac} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{bc + ab} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{ac + bc}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}\geqslant\frac{(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})^2}{2(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})}$$

$$=\frac{1}{2}(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{3}{2}.$$

其中第一个不等号用的是权方和不等式,第二个不等号用的是算术 - 几何平均值不等式.

注 (13 - 12)式的应用是很广的.

证法3 $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4b^2c^2}{ab+ac}+\frac{4c^2a^2}{bc+ba}+\frac{4a^2b^2}{ca+cb}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{4}[2\cdot2bc-(ab+ac)+2\cdot2ca-(ab+bc)+2\cdot2ab-(ac+cb)]$$

$$=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}.$$

例4 设 a,b,c 是一三角形的三条边长.求证:

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot s^{n-1},\text{其中 } s=\frac{1}{2}(a+b+c),n\in\mathbf{Z}^+.$$

(IMO - 28 预选题)

证法1 由排序不等式,可得

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\frac{1}{3}(a^n+b^n+c^n)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right).\quad①$$

由于 $n\in\mathbf{Z}^+$,从而由幂平均不等式,有

$$a^n+b^n+c^n\geqslant\frac{1}{3^{n-1}}(a+b+c)^n=\frac{2^n}{3^{n-1}}\cdot s^n.\quad②$$

又由算术 - 几何平均值不等式,得

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}}$$

$$\geqslant\frac{3}{\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{3}}=\frac{9}{4s}.\quad③$$

由 ①②③ 立即得要证的不等式.

证法2 当 $n=1$ 时,$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1-3=(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})-3\geqslant\frac{9}{2}-2=\frac{3}{2}$(其中用到权方和不等

式或柯西不等式).

当 $n \geqslant 2$ 时,由权方和不等式,有 $\frac{(a^{\frac{n}{2}})^2}{b+c}+\frac{(b^{\frac{n}{2}})^2}{c+a}+\frac{(c^{\frac{n}{2}})^2}{a+b} \geqslant \frac{(a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}})^2}{2(a+b+c)}$.

由幂平均不等式,有 $\left(\frac{a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}}}{3}\right)^{\frac{2}{n}} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$.

亦即 $(a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}})^2 \geqslant \frac{2^n}{3^{n-2}} \cdot s$.

故 $\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{2^n \cdot s}{3^{n-2} \cdot 4s}=(\frac{2}{3})^{n-2} \cdot s$.

证法 3 构作数表(矩阵)

$$\begin{pmatrix} \frac{a^n}{b+c} & b+c & 1\cdots1 \\ \frac{b^n}{c+a} & c+a & 1\cdots1 \\ \frac{c^n}{a+b} & a+b & \underbrace{1\cdots1}_{n-2\text{列}} \end{pmatrix}_{3\times n}$$

由卡尔松不等式,有

$$\left[\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right) \cdot 2(a+b+c) \cdot 3^{n-2}\right]^{\frac{1}{n}} \geqslant a+b+c,$$

故 $\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{(a+b+c)^n}{2(a+b+c) \cdot 3^{n-2}}=(\frac{2}{3})^{n-2} \cdot s$.

例 5 设 $0<p \leqslant a_i(i=1,2,\cdots,n)$, $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列.
求证: $n \leqslant \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} \leqslant n+\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$. (匈牙利奥林匹克题)

证明 由算术 - 几何平均值不等式,有

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} \geqslant n.$$

从而,只需证右边的不等式.不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,
根据排序不等式,可知

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} \leqslant \frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}.$$

当 $n=2k$ 为偶数时,则

$$\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} \leqslant \left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right).$$

又对于 $x\in[\frac{p}{q},\frac{q}{p}]$,有

$$x+\frac{1}{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2\leqslant\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2+2,$$

从而$\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\leqslant 2k+k\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2=n+\frac{n}{2}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2.$

当 $n=2k-1$ 为奇数时,则

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}&\leqslant\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}\right)+\frac{a_k}{a_k}\\&\leqslant 2(k-1)+(k-1)\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2+1\\&=n+\frac{n-1}{2}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2.\end{aligned}$$

综合以上两种情形,立即得要证之不等式.

例 6 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是实数$(n\geqslant 3)$,令 $p=\sum_{i=1}^{n}x_i$,$q=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$.求证:

(i) $\frac{(n-1)p^2}{n}-2q\geqslant 0$;

(ii) $|x_i-\frac{p}{n}|\leqslant\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}$,$i=1,2,\cdots,n$.

(1986 年中国国家集训队选拔试题)

证明 (i) 由于

$$\begin{aligned}(n-1)p^2-2nq&=(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-2n\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\\&=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2,\end{aligned}$$

所以$\frac{(n-1)p^2}{n}-2q\geqslant 0$.

(ii) $$\left|x_i-\frac{p}{n}\right|=\left|\frac{nx_i-\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}\right|=\frac{n-1}{n}\left|\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_i-x_k)\right|.$$

由幂平均不等式,得

$$\left|x_i-\frac{p}{n}\right|\leqslant\frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_i-x_k)^2}\leqslant\frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_j-x_k)^2}.$$

利用(i) 中结果 $\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_j-x_k)^2=(n-1)p^2-2nq$,

从而得到 $\left|x_i - \frac{p}{n}\right| \leqslant \frac{n-1}{n}\sqrt{p^2 - \frac{2n}{n-1}q}$.

【解题思维策略分析】

1. 注意运用其他知识和方法与运用著名不等式的配合

例 7 设 $n \in \mathbf{N}, x_0 = 0, x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$,且$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.求证:

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

(CMO - 11 试题)

证明 因为$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$,

所以,由均值不等式,得

$$\sqrt{(1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})(x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n)}$$
$$\leqslant \frac{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{2} = 1.$$

从而$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$

即求证的左边的不等式成立.

又因为 $0 \leqslant x_0 + x_1 + \cdots + x_i \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,n$,

所以,可令 $\theta_i = \arcsin(x_0 + x_1 + \cdots + x_i), i = 1,2,\cdots,n$.

于是,$\theta_i \in [0,\frac{\pi}{2}]$,且有 $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \frac{\pi}{2}$,

从而,有 $x_i = \sin\theta_i - \sin\theta_{i-1} = 2\cos\frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2} \cdot \sin\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} < 2\cos\theta_{i-1} \cdot \sin\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}$.

因为,对 $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$,有 $\sin x < x$,所以,有

$$x_i < 2\cos\theta_{i-1} \cdot \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} = (\theta_i - \theta_{i-1}) \cdot \cos\theta_{i-1},$$

故得 $\frac{x_i}{\cos\theta_{i-1}} < \theta_i - \theta_{i-1}, i = 1,2,\cdots,n$.

在上式两端对 i 从 1 到 n 求和,得到

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\cos\theta_{i-1}} < \theta_n - \theta_0 = \frac{\pi}{2}. \quad ①$$

由 θ_i 的定义,知 $\sin\theta_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i$,

所以 $\cos\theta_{i-1} = \sqrt{1-\sin^2\theta_{i-1}} = \sqrt{1-(x_0+x_1+x_2+\cdots+x_{i-1})^2}$

$$= \sqrt{(1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1})(x_i+x_{i+1}+\cdots+x_n)}. \quad ②$$

将 ② 代入 ①,即得要证的右边的不等式.

例 8 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数,且满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$.证明:

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n[1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \leqslant \frac{1}{n^{n+1}}.$$ (IMO - 39 预选题)

证明 设 $a_{n+1} = 1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

显然 $a_{n+1} > 0$,于是得到和为 1 的 $n+1$ 个正数,求证的不等式化为

$n^{n+1}\cdot a_1a_2\cdots a_na_{n+1} \leqslant (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)(1-a_{n+1})$.

对每个 $i \in \{1,2,\cdots,n,n+1\}$,由算术 - 几何平均值不等式,有

$$1-a_i = a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{n+1} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}{a_i}}.$$

将上式所表示的 $n+1$ 个不等式相乘,有

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n+1}) \geqslant n^{n+1}\cdot\sqrt[n]{\frac{(a_1a_2\cdots a_na_{n+1})^{n+1}}{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}}$$

$$= n^{n+1}\cdot a_1a_2\cdots a_na_{n+1}.$$

2. 注意所给条件的综合变形与运用多个著名不等式的配合

例 9 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数($n \geqslant 2$),且 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.$$ (CMO - 4 试题)

证明 由对称性,可设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$,则有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x_n}}.$$

由切比雪夫不等式(或排序不等式),有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}.$$

再由幂平均不等式,得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

从而,有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$.

又由柯西不等式,有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant\sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\sqrt{n}$.

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$.

例 10 对所有正实数 a,b,c,证明:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

(IMO - 42 试题)

证法 1 记 $x=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},y=\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ac}},z=\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$,

则 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $x^2=\dfrac{a^2}{a^2+8bc},y^2=\dfrac{b^2}{b^2+8ac},z^2=\dfrac{c^2}{c^2+8ab}$.

于是 $\dfrac{1}{x^2}-1=\dfrac{8bc}{a^2},\dfrac{1}{y^2}-1=\dfrac{8ac}{b^2},\dfrac{1}{z^2}-1=\dfrac{8ab}{c^2}$,

且 $$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=\frac{8bc}{a^2}\cdot\frac{8ac}{b^2}\cdot\frac{8ab}{c^2}=512. \quad ①$$

另一方面,若 $x+y+z<1$,而 $0<x<1,0<y<1,0<z<1$,则

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=\frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}{x^2y^2z^2}$$

$$>\frac{[(x+y+z)^2-x^2]\cdot[(x+y+z)^2-y^2]\cdot[(x+y+z)^2-z^2]}{x^2y^2z^2}$$

$$=\frac{(y+z)(2x+y+z)\cdot(x+z)(x+2y+z)(x+y)(x+y+2z)}{x^2y^2z^2}$$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{yz}\cdot4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot2\sqrt{xz}\cdot4\sqrt[4]{xy^2z}\cdot2\sqrt{xy}\cdot4\sqrt[4]{xyz^2}}{x^2y^2z^2}$$

$$=\frac{512x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}=512.$$

此与 ① 式矛盾.故有 $x+y+z\geqslant 1$,即有

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

证法 2 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)}}=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{8}{3}}+2(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}\cdot(2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}})}}$

$$\geqslant \frac{a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{8}{3}}+(2a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{1}{3}})^2+(2b^{\frac{2}{3}}\cdot c^{\frac{2}{3}})^2}}$$

$$=\frac{a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{8}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}(2b^{\frac{2}{3}}\cdot c^{\frac{2}{3}})+(2b^{\frac{2}{3}}\cdot c^{\frac{2}{3}})^2}}$$

$$\geqslant \frac{a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{(a^{\frac{4}{3}})^2+2a^{\frac{4}{3}}(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})+(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2}}$$

$$=\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}.$$

同理 $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}\geqslant\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$，$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}=\frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$.

以上三式相加即证．等号成立 $\Leftrightarrow a=b=c$.

证法 3 左边 $=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+8abc}}+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{b^3+8abc}}+\frac{c^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{c^3+8abc}}$

$$\geqslant\frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+b^3+c^3+24abc)^{\frac{1}{2}}}=\left[\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

因而只须证明有 $(a+b+c)^3\geqslant a^3+b^3+c^3+24abc$ 即可．

注意到 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc$，

从而 $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3+24abc)$

$$=3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)-18abc$$

$$\geqslant 3\cdot 6\sqrt[6]{a^2b\cdot ab^2\cdot a^2c\cdot ac^2\cdot b^2c\cdot bc^2}-18abc=0.$$

故原不等式获证．等号成立 $\Leftrightarrow a=b=c$.

注 （Ⅰ）例 10 由罗增儒教授推广为：若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，$\lambda\geqslant 8$，则

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}. \quad ③$$

事实上，令 $x=\frac{bc}{a^2}$，$y=\frac{ca}{b^2}$，$z=\frac{ab}{c^2}$，则

$x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y+z=1$.

于是，原不等式等价于

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda y}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda z}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \quad ④$$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+\lambda}[\sqrt{(1+\lambda y)(1+\lambda z)}+\sqrt{(1+\lambda z)(1+\lambda x)}+\sqrt{(1+\lambda x)(1+\lambda y)}$

$$\geqslant 3\sqrt{(1+\lambda x)(1+\lambda y)(1+\lambda z)}$$
$$\Leftrightarrow (1+\lambda)[3+2\lambda(x+y+z)+\lambda^2(yz+zx+xy)$$
$$+2\sqrt{(1+\lambda x)(1+\lambda y)(1+\lambda z)}(\sqrt{1+\lambda x}+\sqrt{1+\lambda y}+\sqrt{1+\lambda z})]$$
$$\geqslant 9[1+\lambda(x+y+z)+\lambda^2(yz+zx+xy)+\lambda^2]$$
$$\Leftrightarrow (2\lambda^2-7\lambda)(x+y+z)+(\lambda^3-8\lambda^2)(yz+zx+xy)$$
$$+2(1+\lambda)\sqrt{(1+\lambda x)(1+\lambda y)(1+\lambda z)}\cdot(\sqrt{1+\lambda x}+\sqrt{1+\lambda y}+\sqrt{1+\lambda z})$$
$$\geqslant 9\lambda^3-3\lambda+6.$$

注意到 $(1+\lambda x)(1+\lambda y)(1+\lambda z)$
$$=1+\lambda(x+y+z)+\lambda^2(yz+zx+xy)+\lambda^3$$
$$\geqslant 1+3\lambda\cdot\sqrt[3]{xyz}+3\lambda^2\cdot\sqrt[3]{(xyz)^2}+\lambda^3$$
$$=1+3\lambda+3\lambda^2+\lambda^3=(1+\lambda)^3.$$

于是,④ 式左端 $\geqslant 3(2\lambda^2-7\lambda)+3(\lambda^3-8\lambda^2)+6(1+\lambda)\cdot[(1+\lambda x)(x+\lambda y)\cdot(1+\lambda z)]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$
$$\geqslant 3\lambda^3-18\lambda^2-21\lambda+6(1+\lambda)[(1+\lambda)^3]^{\frac{2}{3}}$$
$$=9\lambda^3-3\lambda+6.$$

故不等式 ④ 成立,从而不等式 ③ 成立.

如果对 ③ 式作代换,$x\to\frac{y}{x}$,$y\to\frac{z}{y}$,$z\to\frac{x}{z}$,$\lambda\to\frac{1}{\lambda}$,则当 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,$0<\lambda<\frac{1}{8}$ 时,有$\sqrt{\frac{x}{\lambda x+y}}+\sqrt{\frac{y}{\lambda y+z}}+\sqrt{\frac{z}{\lambda z+x}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$.

(Ⅱ)由证法 2,我们可试探如下的待定指数法:

若$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^x}{a^x+b^x+c^x}$,则 $\frac{a^2}{a^2+8bc}\geqslant\frac{a^{2x}}{(a^x+b^x+c^x)^2}$,

即 $a^2(a^x+b^x+c^x)^2\geqslant a^{2x}(a^2+8bc)$,亦即$(b^x+c^x)(b^x+c^x+2a^x)\geqslant 8a^{2x-2}bc$.

由平均值不等式,可知$(b^x+c^x)(b^x+c^x+2a^x)\geqslant 8a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{3x}{4}}c^{\frac{3x}{4}}$.

令 $\begin{cases}2x-2=\frac{x}{2}\\ \frac{3x}{4}=1\end{cases}$,解得 $x=\frac{4}{3}$,因此有 $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$.

这种先假设,再由平均值不等式来确定待定指数的方法也有较广的应用,例如:

(1) 已知 $abc\neq 0$,求证$\frac{a^4}{4a^4+b^4+c^4}+\frac{b^4}{a^4+4b^4+c^4}+\frac{c^4}{a^4+b^4+4c^4}\leqslant\frac{1}{2}$.

(2004 年北京市高一竞赛题)

可设$\frac{a^4}{4a^4+b^4+c^4} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{a^x}{(a^x+b^x+c^x)}$,有$2a^4+b^4+c^4 \geqslant 2a^{4-x}(b^x+c^x)$.

又$2a^4+b^4+c^4=(a^4+b^4)+(a^4+c^4) \geqslant 2a^2(b^2+c^2)$,可求得$x=2$.

(2) 设a、b、$c \in \mathbf{R}^+$,且$abc=1$.求证 $\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c} \geqslant 1$.

(2004 年吉林省竞赛题)

可设$\frac{1}{1+2a} \geqslant \frac{a^x}{a^x+b^x+c^x}$,则$b^x+c^x \geqslant 2a^{x+1}$.

又$b^x+c^x \geqslant 2\sqrt{b^x c^x}=2a^{-\frac{x}{2}}$,由$x+1=-\frac{x}{2}$,求得$x=-\frac{2}{3}$.

(3) 设a,b,c为正实数,试证明$\frac{a}{\sqrt{a^2+9bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+9ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+9ab}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{10}}$.

(2007 年台湾地区奥林匹克题)

可设$\frac{a}{\sqrt{a^2+9bc}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{a^x}{a^x+b^x+c^x}$,则

$10(a^x+b^x+c^x)^2 \geqslant 9a^{2x}+81a^{2x-2} \cdot bc$.

又$a^{2x}+10b^{2x}+10c^{2x}+20a^x b^x+20b^x c^x+20c^x a^x \geqslant 81(a^{42x} \cdot b^{60x} \cdot c^{60x})^{\frac{1}{81}} \geqslant 81a^{\frac{42x}{81}} \cdot$

$(bc)^{\frac{60x}{81}}$,由$\begin{cases} \frac{42}{81}x=2x-2 \\ \frac{60}{81}x=1 \end{cases}$ 求得$x=\frac{27}{20}$.

注 用这种方法时,若原不等式右端为常数A,则设不等式时,设为$A \cdot \frac{a^x}{a^x+b^x+c^x}$.以上几个不等式的解法可参见:王红权,朱豪的文章《几个常见分式不等式的统一构造证明》(中学教研 2008 年第 10 期).

(Ⅲ) 由例 10 可变形构造出如下不等式:设a,b,c为正实数,求证:

$$\frac{b^3}{a^2+8bc}+\frac{c^3}{b^2+8ca}+\frac{a^3}{c^2+8ab} \geqslant \frac{1}{9}(a+b+c).$$

(《数学教学》2002 年 4 期问题 560 号)

证法 1 设原不等式左端为M,令$(a^2+8bc)+(b^2+8ca)+(c^2+8ab)=N$.

则 $N=(a+b+c)^2+6(ab+bc+ca) \leqslant 3(a+b+c)^2$.

由 $3=\frac{1}{M}\left(\frac{b^3}{a^2+8bc}+\frac{c^3}{b^2+8ca}+\frac{a^3}{c^2+8ab}\right)+$

$\frac{1}{N}[a^2+b^2+c^2+8(ab+bc+ca)]+\frac{1+1+1}{3}$

$$=\left[\frac{b^2}{M(a^2+8bc)}+\frac{a^2+8bc}{N}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{c^3}{M(b^2+8ca)}+\frac{b^2+8ca}{N}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{a^3}{M(c^2+8ab)}+\frac{c^2+8ab}{N}+\frac{1}{3}\right]$$

$$\geqslant\frac{3b}{\sqrt[3]{3MN}}+\frac{3c}{\sqrt[3]{3MN}}+\frac{3a}{\sqrt[3]{3MN}}=\frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{3MN}},$$

有 $\sqrt[3]{M}\geqslant\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{3N}}$,故 $M\geqslant\frac{(a+b+c)^3}{3N}\geqslant\frac{1}{9}(a+b+c)$.由此即证.

证法 2 由平均值不等式,对于 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,有

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a$

$\geqslant 3(a^2b+b^2c+c^2a)$,即 $a^2b+b^2c+c^2a\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

由柯西不等式,有

$$\left(\frac{b^3}{a^2+8bc}+\frac{c^3}{b^2+8ca}+\frac{a^3}{c^2+8ab}\right)[b(a^2+8bc)+c(b^2+8ca)+a(c^2+8ab)]$$

$\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$,于有

$$\frac{b^3}{a^2+8bc}+\frac{c^3}{b^2+8ca}+\frac{a^3}{c^2+8ab}\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{9(a^2b+b^2c+c^2a)}$$

$$\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3(a+b+c)}$$

$$\geqslant\frac{\frac{1}{3}(a+b+c)^2}{3(a+b+c)}=\frac{1}{9}(a+b+c).$$证毕.

(Ⅳ) 由不等式 $(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\geqslant 9$ 联想可得如下不等式:

即对 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,有 $\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{a}+\frac{\sqrt{b^2+8ac}}{b}+\frac{\sqrt{c^2+8ab}}{c}\geqslant 9$.

(《中等数学》2002 年奥林匹克训练题高 58)

我们可以证明这个不等式也是成立的.

证法 1 由算术 - 几何平均值不等式,有

$$\frac{\sqrt{a^2+8ab}}{a}=\frac{\sqrt{a^2+ab+\cdots+ab}}{a}\geqslant\frac{\sqrt{9\sqrt[9]{a^2b^8c^8}}}{a}=\frac{3\sqrt[9]{ab^4c^4}}{a}.$$

同理,$\frac{\sqrt{b^2+8ca}}{b}\geqslant\frac{3\sqrt[9]{a^4bc^4}}{b}$,$\frac{\sqrt{c^2+8ab}}{c}\geqslant\frac{3\sqrt[9]{a^4b^4c}}{c}$.

于是 $\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{a}+\frac{\sqrt{b^2+8ca}}{b}+\frac{\sqrt{c^2+8ab}}{c}$

$$\geqslant 3\left(\frac{\sqrt[9]{ab^4c^4}}{a}+\frac{\sqrt[9]{a^4bc^4}}{b}+\frac{\sqrt[9]{a^4b^4c}}{c}\right)\geqslant 3\cdot 3\sqrt{\frac{\sqrt[9]{a^9b^9c^9}}{abc}}=9.$$

证法2 设 $x=\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{a}, y=\frac{\sqrt{b^2+8ca}}{b}, z=\frac{\sqrt{c^2+8ab}}{c}$,则 $x>1, y>1$, $z>1$ 且 $(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)=8\cdot\frac{bc}{a^2}\cdot 8\cdot\frac{ac}{b^2}\cdot 8\cdot\frac{ab}{c^2}=8^3$.

而
$$8^3=[(x-1)(y-1)(z-1)]\cdot[(x+1)(y+1)(z+1)]$$
$$\leqslant\left(\frac{x+y+z-3}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{x+y+z+3}{3}\right)^3=\left[\frac{(x+y+z)^2-9}{9}\right]^3.$$

将上式两边开立方,并整理,得

$(x+y+z)^2\geqslant 72+9=81$,即 $x+y+z\geqslant 9$.

故
$$\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{a}+\frac{\sqrt{b^2+8ca}}{b}+\frac{\sqrt{c^2+8ab}}{c}\geqslant 9.$$

【模拟实战】

习题 A

1. 设 $x_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=0,1,\cdots,n)$,求证:

$$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n+\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^n\geqslant\frac{x_0}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_0}.$$

2. 对于 $p\geqslant 1, q>0, a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0, 0<b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 或 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n, b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$,则

$$\frac{a_1^p}{b_1^q}+\frac{a_2^p}{b_2^q}+\cdots+\frac{a_n^p}{b_n^q}\geqslant n^{1-p+q}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^p}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^q}.$$

3. 求证:对任意 $x>\sqrt{2}$ 和 $y>\sqrt{2}$,都有 $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4>x^2+y^2$.

(第46届莫斯科奥林匹克题)

4. 设 a,b,c,d 均是非负实数且满足 $ab+bc+cd+da=1$,求证:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$ (IMO-31预选题)

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个非负实数,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$,证明:

$$\frac{a_1^2}{1+a_1^4}+\frac{a_2^2}{1+a_2^4}+\cdots+\frac{a_n^2}{1+a_n^4}\leqslant\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}.$$

（1994 年合肥市竞赛题）

习题 B

1. 对任何正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，求证：

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}>\frac{n}{4}.$$

（第 3 届全苏奥林匹克题）

2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为实数，如果它们中任意两数之和非负，那么对于满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的任意非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有以下不等式成立：
$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$. 请证明上述命题及逆命题.

（CMO－1 试题）

3. 设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$, $b_1\geqslant a_1$, $b_1b_2\geqslant a_1a_2$, $b_1b_2b_3\geqslant a_1a_2a_3,\cdots,b_1b_2\cdots b_n\geqslant a_1a_2\cdots a_n$. 求证：$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$，并确定等号成立的条件.　（1988 年加拿大国家队集训题）

4. 设实数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_n=0$，且 $a_k=c+\sum\limits_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$. 求证：$c\leqslant\frac{1}{4n}$.

（IMO－30 预选题）

第十四章　数学归纳法与不等式证明

【基础知识】

数学归纳法不仅可以证明等式，也可以用来证明不等式．与自然数有关的不等式的证明，尤其应想到采用数学归纳法的可能．

不等式的证明，在利用归纳假设时，一方面要注意对假设式 $n=k$ 时及 $n=k+1$ 时的式子进行适当变形，另一方面，还要注意充分运用证不等式的各种方法与技巧，比如，运用比较法、分析法、基本不等式法、放缩法、裂项法、换元法、反证法等等．

还值得指出的是，有时第一步的验证也不是轻而易举的，要根据题设条件，仔细推证．

【典型例题与基本方法】

1．注意对 $n=k+1$ 时形式的处理

例 1　已知 a,b 是正实数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$．求证：对每一 $n\in\mathbf{N}$，$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$．　　（1988 年全国高中联赛题）

证明　当 $n=1$ 时，显然等式成立．

设 $n=k$ 时，不等式成立，即 $(a+b)^k\geqslant a^k+b^k+2^{2k}-2^{k+1}$．

则
$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=(a+b)^k(a+b)\\&\geqslant(a+b)(a^k+b^k)+(2^{2k}-2^{k+1})(a+b)\\&=a^{k+1}+b^{k+1}+ba^k+ab^k+(2^{2k}-2^{k+1})(a+b).\end{aligned}$$

由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，有 $ab=a+b\geqslant 4$．于是

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&\geqslant a^{k+1}+b^{k+1}+ab(a^{k-1}+b^{k-1}+2^{2k}-2^{k+1})\\&\geqslant a^{k+1}+b^{k+1}+2^{2(k+1)}-2^{k+2}.\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立．

综上，由归纳法原理，对任意 $n\in\mathbf{N}$ 不等式成立．

例 2　设 $0\leqslant t\leqslant 1$，$1\geqslant x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n>0$，求证：

$(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^t \leqslant 1+x_1^t+2^{t-1}\cdot x_2^t+\cdots+n^{t-1}x_n^t$.

（1988 年加拿大国家队集训题）

证明 当 $n=1$ 时，由 $0\leqslant t\leqslant 1, 0\leqslant x_1\leqslant 1$，则

$(1+x_1)^t \leqslant 1+x_1 \leqslant 1+x_1^t$.

设要证之不等式对于 $n=k$ 成立，则

$$
\begin{aligned}
&(1+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1})^t\\
&=\left(1+\frac{x_{k+1}}{1+x_1+\cdots+x_k}\right)^t\cdot(1+x_1+\cdots+x_k)^t\\
&\leqslant\left(1+\frac{x_{k+1}}{1+x_1+\cdots+x_k}\right)\cdot(1+x_1+\cdots+x_k)^t\\
&=(1+x_1+\cdots+x_k)^t+x_{k+1}(1+x_1+\cdots+x_k)^{t-1}\\
&\leqslant 1+x_1^t+2^{t-1}\cdot x_2^t+\cdots+k^{t-1}\cdot x_k^t+x_{k+1}[(k+1)x_{k+1}]^{t-1}\\
&=1+x_1^t+2^{t-1}\cdot x_2^t+\cdots+k^{t-1}\cdot x_k^t+(k+1)^{t-1}\cdot x_{k+1}^t
\end{aligned}
$$

于是要证之不等式对 $n=k+1$ 也成立.

综上，由归纳法原理知原不等式成立.

2. 注意验证步骤的仔细推证

例 3 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负实数，且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=4(n\geqslant 3)$. 试证：

$a_1^3a_2+a_2^3a_3+\cdots+a_{n-1}^3a_n+a_n^3a_1\leqslant 27$. （*）

（《中等数学》1999 年 6 期奥林匹克问题）

证明 由题设条件，

当 $n=3$ 时，由于不等式（*）关于 a_1,a_2,a_3 轮换对称，不妨设 a_1 为最大者.

当 $a_2<a_3$ 时，有 $a_1^3a_2+a_2^3a_3+a_3^3a_1-(a_1a_2^3+a_2a_3^3+a_3a_1^3)=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_1-a_3)(a_1+a_2+a_3)<0$.

因此，只就 $a_2\geqslant a_3$ 的情况进行证明.

下面设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$，则有

$$
\begin{aligned}
a_1^3a_2+a_2^3a_3+a_3^3a_1&\leqslant a_1^3a_2+2a_1^2a_2a_3\leqslant a_1^3a_2+3a_1^2a_2a_3=a_1^2a_2(a_1+3a_3)\\
&=\frac{1}{3}a_1\cdot a_1\cdot 3a_2\cdot(a_1+3a_3)\\
&\leqslant\frac{1}{4}\left[\frac{a_1+a_1+3a_2+(a_1+3a_3)}{4}\right]^4\\
&=\frac{1}{3}\left[\frac{3(a_1+a_2+a_3)}{4}\right]^4=27,
\end{aligned}
$$

其中等号当 $a_1=3,a_2=1,a_3=0$ 时成立.

所以,当 $n=3$ 时,(*)式成立.

设当 $n=k(k\geqslant 3)$ 时,不等式(*)成立.

当 $n=k+1$ 时,仍设 a_1 为最大者,则

$a_1^3a_2+a_2^3a_3+a_3^3a_4+\cdots+a_k^3a_{k+1}+a_{k+1}^3a_1$

$\leqslant a_1^3a_2+a_1^3a_3+(a_2+a_3)^3a_4+\cdots+a_{k+1}^3a_1$

$=a_1^3(a_2+a_3)+(a_2+a_3)^3a_4+\cdots+a_{k+1}^3\cdot a_1$.从而,

k 个变量 $a_1,a_2+a_3,a_4,\cdots,a_{k+1}$ 满足 $a_1+(a_2+a_3)+a_4+\cdots+a_{k+1}=4$.

由归纳假设,可得 $a_1^3(a_2+a_3)+(a_2+a_3)^3a_4+\cdots+a_{k+1}^3\cdot a_1\leqslant 27$.

所以,当 $n=k+1$ 时,不等式(*)也成立.

综上,由归纳法原理,知不等式(*)成立.

注 容易验证,当 $n=2$ 时,取 $a_1=3,a_1=1$,不等式不成立.

例 4 对于任意正数 $a_k,b_k,k=1,2,\cdots,n$,求证:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\leqslant\frac{AB}{A+B},\tag{14-1}$$

其中 $A=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,B=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$.当 $n=1$ 或 $n>1,\dfrac{a_k}{b_k}$ 是常数时,等号成立.

(1993 年圣彼得堡市选拔题)

证明 首先证明:对任意正数 x_1,y_1,x_2,y_2,有

$$\frac{x_1y_1}{x_1+y_1}+\frac{x_2y_2}{x_2+y_2}\leqslant\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{x_1+x_2+y_1+y_2}.\tag{*}$$

事实上,(*)$\Leftrightarrow\dfrac{x_1y_1}{x_1+y_1}+\dfrac{x_2y_2}{x_2+y_2}\leqslant\dfrac{x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2}{x_1+x_2+y_1+y_2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{x_1y_1(x_2+y_2)}{x_1+y_1}+\dfrac{x_2y_2(x_1+y_1)}{x_2+y_2}\leqslant x_1y_2+x_2y_1$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{y_1}{x_1+y_1}+\dfrac{x_2}{x_2+y_2}\right)x_1y_2+\left(\dfrac{x_1}{x_1+y_1}+\dfrac{y_2}{x_2+y_2}\right)x_2y_1\leqslant x_1y_2+x_2y_1$

$\Leftrightarrow-\dfrac{x_1y_2(x_1y_2-x_2y_1)}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}+\dfrac{x_2y_1(x_1y_2-x_2y_1)}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow-(x_1y_2-x_2y_1)^2\leqslant 0$.

因此,(*)式成立.

其次,用数学归纳法证明原不等式.

显然,当 $n=1$ 时,原不等式成立.

假设 $n=m$ 时,原不等式成立.当 $n=m+1$ 时,由归纳假设,可令 $A'=\sum_{k=1}^{m}a_k$,$B'=\sum_{k=1}^{m}b_k$,并注意(*)式,则有

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}+\frac{a_{m+1}b_{m+1}}{a_{m+1}+b_{m+1}}\leqslant\frac{A'\cdot B'}{A'+B'}+\frac{a_{m+1}b_{m+1}}{a_{m+1}+b_{m+1}}$$

$$\leqslant\frac{(A'+a_{m+1})(B'+b_{m+1})}{A'+a_{m+1}+B'+b_{m+1}}=\frac{A\cdot B}{A+B},$$

其中 $A=A'+a_{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}a_k$,$B=B'+b_{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}b_k$.

这说明 $n=m+1$ 时,原不等式也成立.

由归纳法原理,原不等式成立.

注 **另证1** 记 $D=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)-\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right]\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\right)$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)-\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right]\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_jb_j}{a_j+b_j}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_kb_j(a_j+b_j)-a_jb_k(a_k+b_k)}{a_j+b_j}.$$

将指标 k,j 对换,D 的值不变:$D=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_jb_k(a_k+b_k)-a_kb_j(a_j+b_j)}{a_k+b_k}$;

上述两式相加,得 $2D=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_kb_j-a_jb_k)^2}{(a_k+b_k)(a_j+b_j)}\geqslant 0$,故 $D\geqslant 0$.

其中 $D=0$ 当且仅当 $a_kb_j=a_jb_k(k,j=1,2,\cdots,n)$.

另证2 由柯西不等式,得 $\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)\right]^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)^2}{a_k+b_k}\right]$,

故
$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{1}{4}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)\right)^2\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{4}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^2-\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)^2}{a_k+b_k}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k-b_k)^2}{a_k+b_k}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+b_k)^2-(a_k-b_k)^2}{4(a_k+b_k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k}.$$

3. 注意归纳假设的灵活运用

例 5 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个实数，记 $b_k = \frac{1}{k}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k), k = 1,2,\cdots, n$, $C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2$, $D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2$. 求证：$C \leqslant D \leqslant 2C$. （第 12 届全苏奥林匹克题）

证明 当 $n = 1$ 时，命题显然成立.

设 $n = k$ 时，命题成立.

任取 $k + 1$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$. 记

$$C_k = \sum_{i=1}^{k}(a_i - b_i)^2, C_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}(a_i - b_i)^2,$$

$$D_k = \sum_{i=1}^{k}(a_i - b_k)^2, D_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}(a_i - b_{k+1})^2, \text{则}$$

$$\begin{aligned} D_k &= \sum_{i=1}^{k}(a_i - b_{k+1} + b_{k+1} - b_k)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k}(a_i - b_{k+1})^2 + 2(b_{k+1} - b_k)\sum_{i=1}^{k}(a_i - b_{k+1}) + k(b_{k+1} - b_k)^2 \\ &= D_{k+1} - (a_{k+1} - b_{k+1})^2 - k(b_{k+1} - b_k)^2. \end{aligned} \quad (*)$$

由归纳假设，可知 $C_{k+1} = C_k - (a_{k+1} - b_{k+1})^2 \leqslant D_k + (a_{k+1} - b_{k+1})^2$.

再由(*)得 $C_{k+1} \leqslant D_{k+1}$.

另一方面，由(*)和归纳假设，可得

$$D_{k+1} = D_k + (a_{k+1} - b_{k+1})^2 + k(b_{k+1} - b_k)^2 \leqslant 2C_k + (a_{k+1} - b_{k+1})^2 + k(b_{k+1} - b_k)^2.$$

又
$$\begin{aligned} k(b_{k+1} - b_k)^2 &= k\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k + 1} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}\right)^2 \\ &= \frac{1}{k(k + 1)^2}[(k + 1)a_{k+1} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})]^2 \\ &= \frac{1}{k}(a_{k+1} - b_{k+1})^2 \leqslant (a_{k+1} - b_{k+1})^2, \end{aligned}$$

所以 $D_{k+1} \leqslant 2C_k + 2(a_{k+1} - b_{k+1})^2 = 2C_{k+1}$.

即命题对 $n = k + 1$ 时成立.

由归纳法原理，原不等式获证.

【解题思维策略分析】

1. 注意分情况应用归纳假设

例6 设 $\delta(x)$ 是正整数 x 的最大奇因子,对于任意正整数 x,求证:

$\left|\sum_{n=1}^{x}\frac{\delta(n)}{n}-\frac{2}{3}x\right|<1.$ (第32届普特南竞赛题)

证明 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{x}\frac{\delta(n)}{n}$,显然 $S(1)=1$.

由于 $\delta(2m+1)=2m+1,\delta(2m)=\delta(m)$,

所以 $S(2x+1)=\sum_{n=1}^{2x}\frac{\delta(n)}{n}+\frac{\delta(2x+1)}{2x+1}=S(2x)+1$,

$$S(2x)=\sum_{m=1}^{x}\frac{\delta(2m)}{2m}+\sum_{m=1}^{x}\frac{\delta(2m-1)}{2m-1}=\frac{1}{2}S(x)+x.$$

令 $F(x)=S(x)-\frac{2}{3}x$,用数学归纳法可证得

$0<F(x)<\frac{2}{3}$,对任意 $x\in\mathbf{N}$. (*)

事实上,当 $x=1$ 时,$F(1)=S(1)-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,显然(*)式成立.

设 $1\leqslant x\leqslant k$ 时,(*)式成立.分两种情况讨论:

(i)k 为偶数时,则 $k\geqslant 2$,由于

$F(k+1)=S(k+1)-\frac{2}{3}(k+1)=F(k)+\frac{1}{3}$,

又 $F(k)=S(k)-\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}S(\frac{k}{2})+\frac{1}{2}k-\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}F\left(\frac{k}{2}\right)$,

所以 $F(k+1)=\frac{1}{2}F\left(\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{3}$.

由归纳假设可知,$0<F\left(\frac{k}{2}\right)<\frac{2}{3}$,从而 $0<F(k+1)<\frac{2}{3}$.

(ii)k 为奇数时,则 $F(k+1)=\frac{1}{2}F\left(\frac{k+1}{2}\right)$,

由归纳假设有 $0<F\left(\frac{k+1}{2}\right)<\frac{2}{3}$,所以 $0<F(k+1)<\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$.

综合(i)(ii)两种情况可知,当 $n=k+1$ 时,(*)式也成立.

由归纳法原理,(*)式获证,从而原不等式也获证.

例7 在一圆周上写上 N 个自然数($n\geqslant 3$),使得与其中每一个数相邻的两数之和

与该数的比都是自然数,记所有这些比值之和为 S_n.求证:$2n \leqslant S_n < 3n$.

(第 18 届全苏奥林匹克题)

证明　将 n 个数依次标号为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,则

$$S_n = \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-2} + x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1} + x_1}{x_n} + \frac{x_n + x_2}{x_1}.$$

于是 $S_n = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_3}{x_2} + \frac{x_2}{x_3}\right) + \cdots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right) + \left(\frac{x_n}{x_1} + \frac{x_1}{x_n}\right) \geqslant 2n$.

以下用数学归纳法证明 $S_n < 3n$.

当 $n = 3$ 时,$S_3 = \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_3 + x_1}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3}$,不妨设 $x_3 = \max\{x_1, x_2, x_3\}$,则 $\frac{x_1 + x_2}{x_3} \leqslant 2$,由题设 $\frac{x_1 + x_2}{x_3}$ 是自然数,所以只有两种情况.

(i) 若 $\frac{x_1 + x_2}{x_3} = 2$,再由 $x_3 = \max\{x_1, x_2, x_3\}$,可知 $x_1 = x_2 = x_3$,所以 $S_3 = 6 < 9$.

(ii) 若 $\frac{x_1 + x_2}{x_3} = 1$,记 $p = \frac{x_2 + x_3}{x_1}$,$q = \frac{x_3 + x_1}{x_2}$,则 p, q 都是自然数,且 $2x_2 = (p - 1)x_1$,$2x_1 = (q - 1)x_2$.

再由 x_1 和 x_2 为正数,所以 $p - 1 \geqslant 1$,$q - 1 \geqslant 1$,且 $(p - 1)(q - 1) = 4$.

若 $p - 1 = 4$,$q - 1 = 1$ 或者 $p - 1 = 1$,$q - 1 = 4$,则 $S_3 = 1 + p + q = 8 < 9$;若 $p - 1 = 2$,$q - 1 = 2$,则 $S_3 = 1 + p + q = 7 < 9$.无论何种情况都有 $S_3 < 9$.

假设当 $n = k$ 时,有 $S_k < 3k$.那么当 $n = k + 1$ 时,有

$$S_{k+1} = \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_{k-2} + x_k}{x_{k-1}} + \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{x_k} + \frac{x_k + x_1}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1} + x_2}{x_1}.$$

不妨设　$x_{k+1} = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}\}$,则

$$S_{k+1} = \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_{k-2} + x_k}{x_{k-1}} + \frac{x_{k-1} + x_1}{x_k} + \frac{x_k + x_2}{x_1} - \frac{x_{k-1} + x_1}{x_k} -$$
$$\frac{x_k + x_2}{x_1} + \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{x_k} + \frac{x_k + x_1}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1} + x_2}{x_1}.$$

由题设 $\frac{x_k + x_1}{x_{k+1}}$ 是自然,从而仅有两种情况:

1°　若 $\frac{x_1 + x_k}{x_{k+1}} = 2$,再由 $x_{k+1} = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}\}$ 可得 $x_k = x_{k+1} = x_1$,从而 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 也满足题设条件,即与其中每一个数相邻的两数之和与该数之比都是

自然数.由归纳假设,可得

$$S_{k+1} < 3k - \frac{x_{k-1}+x_1}{x_k} - \frac{x_k+x_2}{x_1} + \frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{x_k} + \frac{x_k+x_1}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}+x_2}{x_1}$$

$$= 3k+2 < 3(k+1).$$

2° 若$\frac{x_1+x_k}{x_{k+1}}=1$,即 $x_{k+1}=x_1+x_k$,由于$\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{x_k}$,$\frac{x_{k+1}+x_2}{x_1}$是自然数,且 x_1,x_2,…,x_k,x_{k+1} 都是自然数,所以$\frac{x_{k-1}+x_1}{x_k}$,$\frac{x_k+x_2}{x_1}$也是自然数,由归纳假设,得

$$S_{k+1} < 3k - \frac{x_{k-1}+x_1}{x_k} - \frac{x_k+x_2}{x_1} + \frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{x_k} + \frac{x_k+x_1}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}+x_2}{x_1}$$

$$= 3k+1+\frac{x_{k+1}-x_1}{x_k}+\frac{x_{k+1}-x_k}{x_1} = 3(k+1).$$

从而,不论何种情况,都有 $S_{k+1} < 3(k+1)$.

综上,由归纳法原理,对任意自然数 $n \geqslant 3$,都有 $S_n < 3n$.

故 $2n \leqslant S_n < 3n$.

2. 注意数学归纳法及各种技巧的适时运用

例 8 已知数列$\{r_n\}$满足 $r_1=2$,$r_n=r_1r_2\cdots r_{n-1}+1$,$n=2,3,\cdots$.如果自然数 a_1,a_2,…,a_n 满足$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1$,求证:$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_n}$.

(1987 年中国国家队集训选拔题)

证明 首先,用数学归纳法易证得数列$\{r_n\}$满足

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_n}=1-\frac{1}{r_1r_2\cdots r_n}, n=1,2,\cdots \quad ①$$

以下用数学归纳法证明原不等式.

当 $n=1$ 时,显然原不等式成立.

设原不等式对于 $n=1,2,\cdots,k$ 都成立.

任取 a_1,a_2,…,a_{k+1},不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{k+1}$.

如果$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}<1$,由归纳假设可得

$$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{r_1},$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2} \leqslant \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2},$$

…

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\leqslant\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_k}.$$

用反证法证明：对于 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$，原不等式也成立.若不然，则

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}>\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_{k+1}}. \quad ②$$

将由归纳假设得到的 k 个不等式分别乘以 $(a_1-a_2),(a_2-a_3),\cdots,(a_k-a_{k+1})$，并将 ② 式乘以 a_{k+1}，然后相加，可得

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_i}\right)(a_i-a_{i+1})+\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}\right)a_{k+1}$$

$$>\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_i}\right)(a_i-a_{i+1})+\left(\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_{k+1}}\right)a_{k+1},$$

经化简得到 $\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{a_{k+1}}>\frac{a_1}{r_1}+\frac{a_2}{r_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{r_{k+1}}$，

即 $\frac{a_1}{r_2}+\frac{a_2}{r_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{r_{k+1}}<k+1$.

由算术 - 几何平均值不等式，有 $\frac{a_1}{r_1}\cdot\frac{a_2}{r_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{k+1}}{r_{k+1}}<1$，

所以 $1-\frac{1}{r_1r_2\cdots r_{k+1}}>1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{k+1}}$.

由 ① 得 $1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{k+1}}<\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_{k+1}}$.

由于 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}<1$，又 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 都是正整数，从而

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}\leqslant 1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{k+1}}.$$

于是，有 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}\leqslant\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_{k+1}}$，

此与 ② 式矛盾！所以 ② 不能成立.

因此，原不等式对于 $n=k+1$ 也成立.

由归纳法原理，命题获证.

例 9 已知 $5n$ 个实数 r_i,s_i,t_i,u_i,v_i 都大于 $1(1\leqslant i\leqslant n)$，记 $R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i$，$S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i$，$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$，$U=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i$，$V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i$，求证：$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\right)\geqslant\left(\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1}\right)^n$.

（1994 年中国国家队集训选拔题）

证明 首先证明对任何 n 个大于 1 的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+1}{x_i-1}\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^n,\text{其中 } A=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}. \quad ①$$

事实上，记 $x_i=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$x_j=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则

$1<x_j\leqslant A\leqslant x_i$.

由于 $(x_i+1)(x_j+1)(A-1)(x_ix_j-A)-(x_i-1)(x_j-1)(A+1)(x_ix_j+A)$

$$=2A(x_i+x_j)(x_ix_j+1)-2(x_ix_j+1)(x_ix_j+A^2)$$

$$=2(x_ix_j+1)(A-x_i)(x_j-A)\geqslant 0,$$

又 $x_ix_j>x_i\geqslant A$，所以 $\dfrac{(x_i+1)(x_j+1)}{(x_i-1)(x_j-1)}\geqslant\left(\dfrac{A+1}{A-1}\right)\left(\dfrac{\frac{x_ix_j}{A}+1}{\frac{x_ix_j}{A}-1}\right)$，有

$$\prod_{l=1}^{n}\frac{x_l+1}{x_l-1}=\left(\prod_{\substack{l\neq i\\ l\neq j}}\frac{x_l+1}{x_l-1}\right)\cdot\frac{(x_i+1)(x_j+1)}{(x_i-1)(x_j-1)}\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)\left(\frac{\frac{x_ix_j}{A}+1}{\frac{x_ix_j}{A}-1}\right)\prod_{\substack{l\neq i\\ l\neq j}}\frac{x_l+1}{x_l-1}.$$

显然 $n-1$ 个实数中：$n-2$ 个 $x_l(l\neq i,l\neq j,1\leqslant l\leqslant n)$ 和 $\dfrac{x_ix_j}{A}$ 都大于 1 且其几何平均值 $\sqrt[n-1]{\prod\limits_{\substack{l\neq i\\ l\neq j}}x_l\cdot\dfrac{x_ix_j}{A}}=\sqrt[n-1]{\prod\limits_{l=1}^{n}x_l\dfrac{1}{A}}=\sqrt[n-1]{A^n\cdot\dfrac{1}{A}}$ 仍为 A，从而由数学归纳法有

$\prod\limits_{l=1}^{n}\dfrac{(x_l+1)}{(x_l-1)}\geqslant\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)\left(\dfrac{A+1}{A-1}\right)^{n-1}$，其中 a 是大于 1 的实数，且数 a 的几何平均值为 A，即 $a=A$. 易知 ① 成立.

在 ① 中，令 $x_i=r_is_it_iu_iv_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\geqslant\left(\frac{B+1}{B-1}\right)^n,\text{其中 } B=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}r_is_it_iu_iv_i}. \quad ②$$

而 $RSTUV=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}r_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}s_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}v_i\right)\geqslant B$.

所以 $(B+1)(RSTUV-1)-(B-1)(RSTUV+1)=2(RSTUV-B)\geqslant 0$，

即 $\dfrac{RTSUV+1}{RSTUV-1}\leqslant\dfrac{B+1}{B-1}$.

再由 ② 可知要证之不等式成立.

【模拟实战】

习题 A

1. 利用公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$ 证明:对于互不相同的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^7+a_k^5)\geqslant 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^3\right)^2$,并问等号能否成立? (第45届莫斯科奥林匹克题)

2. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是非负实数,记 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=a$.求证:
$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\leqslant\frac{1}{4}a^2$. (1988年加拿大集训题)

3. 求证:对任意正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,不等式
$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$成立.
(第20届全苏奥林匹克题)

4. 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{2n-1}\geqslant 0$.求证:
$a_1^2-a_2^2+a_3^2-\cdots+a_{2n-1}^2\geqslant(a_1-a_2+a_3-\cdots+a_{2n-1})^2$.
(第7届世界城市际邀请赛题)

习题 B

1. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是非负实数,a 是它们中的最小值,记 $x_{n+1}=x_1$.求证:
$\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-a)^2$,
其中等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$. (CMO-7试题)

2. 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为大于1或等于1的实数.证明:
$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}$. (IMO-39预选题)

3. 对于每个整数 $n\geqslant 2$ 和 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$,求证:$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant n}x_kx_j\leqslant 1$.

第十五章　函数性质与不等式证明

【基础知识】

根据不等式的特征，构作或引入某一函数，利用函数的单调性、凹凸性以及二次函数的非负性质、三次函数的因式分解性质来证明不等式，是证明不等式的一种重要方法．我们曾在《分级精讲与测试系列丛书》中以专题形式分别作过一些介绍，在这里，我们从典型例题与基本方法方面再作介绍．

【典型例题与基本方法】

例 1　已知 $x>-1$，且 $x\neq 0, n\in \mathbf{N}^{+}, n\geqslant 2$．求证：$(1+x)^{n}>1+nx$．

证明　设 $f(n)=\dfrac{1+nx}{(1+x)^{n}}$，由 $x>1$ 且 $x\neq 0$，有

$$f(n+1)-f(n)=\frac{1+(n+1)x}{(1+x)^{n+1}}-\frac{1+nx}{(1+x)^{n}}=\frac{-nx^{2}}{(1+x)^{n+1}}<0,$$

从而，知 $f(n)$ 在集 $\mathbf{N}^{+}$ 上单调递减．

又由 $f(2)<f(1)=\dfrac{1+x}{1+x}=1$，知 $f(x)<1$，即$\dfrac{1+nx}{(1+x)^{n}}<1$．

故$(1+x)^{n}>1+nx$．

例 2　设 $a,b,c>0$，且 $a+b+c=A\leqslant 1, \alpha>0$，则

$$\left(\frac{1}{a}-a\right)^{\alpha}+\left(\frac{1}{b}-b\right)^{\alpha}+\left(\frac{1}{c}-c\right)^{\alpha}\geqslant 3\left(\frac{3}{A}-\frac{A}{3}\right)^{\alpha}.$$

证明　由平均值不等式有$(x+y+z)^{2}\geqslant 3(xy+yz+zx), x,y,z\in \mathbf{R}^{+}$．

从而 $ab+bc+ca\geqslant\sqrt{3(ab^{2}c+abc^{2}+a^{2}bc)}=\sqrt{3abc\cdot A}$，则

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{b}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\sqrt{c}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{abc}}(1-a)(1-b)(1-c)=\frac{1}{\sqrt{abc}}[1-(a+b+c)+(ab+bc+ca-abc)]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{abc}}(1-A+\sqrt{3Aabc}-abc)=-\sqrt{abc}+\frac{1-A}{\sqrt{abc}}+\sqrt{3A}.$$

因为 $0 < A \leqslant 1 \Rightarrow f(t) = -t + \frac{1-A}{t} + \sqrt{3A}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，而

$0 < \sqrt{abc} \leqslant \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3}$，所以 $f(\sqrt{abc}) \geqslant f\left(\sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3}\right)$，

即 $\quad -\sqrt{abc} + \frac{1-A}{\sqrt{abc}} + \sqrt{3A} \geqslant -\sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3} + \frac{1-A}{\sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt{3A} = \left(\sqrt{\frac{3}{A}} - \sqrt{\frac{A}{3}}\right)^3.$

因此，$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \sqrt{b}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \sqrt{c}\right) \geqslant \left(\sqrt{\frac{3}{A}} - \sqrt{\frac{A}{3}}\right)^3.$ ①

类似地，$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{b}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right) \geqslant \sqrt{abc} + \frac{1+A}{\sqrt{abc}} + \sqrt{3A}$，

而 $f(t) = t + \frac{1+A}{t} + \sqrt{3A}$ 在 $(0, \sqrt{1+A}]$ 上是减函数，而

$0 < \sqrt{abc} < \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3} \leqslant \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} < \sqrt{1+A}$，

所以 $f(\sqrt{abc}) \geqslant f\left(\sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3}\right)$，即

$\sqrt{abc} + \frac{1+A}{\sqrt{abc}} + \sqrt{3A} \geqslant \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3} + \frac{1+A}{\sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt{3A} = \left(\sqrt{\frac{3}{A}} + \sqrt{\frac{A}{3}}\right)^3.$

所以 $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{b}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right) \geqslant \left(\sqrt{\frac{3}{A}} + \sqrt{\frac{A}{3}}\right)^3.$ ②

由 ①、② 相乘，即得 $\left(\frac{1}{a} - a\right)\left(\frac{1}{b} - b\right)\left(\frac{1}{c} - c\right) \geqslant \left(\frac{3}{A} - \frac{A}{3}\right)^3.$

于是 $\left(\frac{1}{a} - a\right)^\alpha + \left(\frac{1}{b} - b\right)^\alpha + \left(\frac{1}{c} - c\right)^\alpha$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a} - a\right)^\alpha\left(\frac{1}{b} - b\right)^\alpha\left(\frac{1}{c} - c\right)^\alpha} \geqslant 3\left(\frac{3}{A} - \frac{A}{3}\right)^\alpha.$$

例 3 设 x, y, z 均取正实数，且 $x + y + z = 1$. 求证：

$$\frac{3x^2 - x}{1 + x^2} + \frac{3y^2 - y}{1 + y^2} + \frac{3z^2 - z}{1 + z^2} \geqslant 0.$$ (2003 年湖南省竞赛题)

证明 考虑函数 $g(t) = \frac{t}{1+t^2}$，可知 $g(t)$ 为奇函数. 由于当 $t > 0$ 时，$\frac{1}{t} + t$ 在 $(0,1)$ 内递减，易知 $g(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{t}}$ 在 $(0,1)$ 内递增. 而对于 $t_1, t_2 \in (0,1)$ 且 $t_1 < t_2$ 时，

有$(t_1-t_2)\cdot[g(t_1)-g(t_2)]\geqslant 0$,所以对任意 $x\in(0,1)$,有

$(x-\frac{1}{3})\cdot\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{10}\right)\geqslant 0$,即$\frac{3x^2-x}{1+x^2}\geqslant\frac{3}{10}(3x-1)$.

同理$\frac{3y^2-y}{1+y^2}\geqslant\frac{3}{10}(3y-1)$,$\frac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{10}(3z-1)$.

以上三式相加,有

$$\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{10}[3(x+y+z)-3]=0.$$

例 4 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $xy+yz+zx=1$,求证:$xyz(x+y+z)\leqslant\frac{1}{3}$.

证明 由 $1=(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$,

有 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=1-2xyz(x+y+z)$.

考虑函数 $f(t)=(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)t^2-2(xy+yz+zx)t+3$

$\qquad\qquad=(xyt-1)^2+(yzt-1)^2+(zxt-1)^2\geqslant 0$.

而 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2>0$,从而考虑其判断式,

有 $\Delta=(-2)^2-4\cdot 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\leqslant 0$,

即 $1-3[1-2xyz(x+y+z)]\leqslant 0$,

故 $xyz(x+y+z)\leqslant\frac{1}{3}$.

例 5 设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4$,且 $x_2+x_3+x_4\geqslant x_1$.求证:

$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\leqslant 4x_1x_2x_3x_4$. (1987 年国家队队员集训题)

证明 令 $b=x_2+x_3+x_4$,$c=x_2x_3x_4$,则原不等式等价于

$x_1^2+2(b-2c)x_1+b^2\leqslant 0$.

考虑函数 $f(t)=t^2+2(b-2c)t+b^2$,

由$\frac{b}{c}=\frac{1}{x_3x_4}+\frac{1}{x_2x_4}+\frac{1}{x_2x_3}\leqslant 4$,知 $b\leqslant\frac{3}{4}c$.

又 $\Delta=4(b-2c)^2-4b^2=16c^2-16bc\geqslant 16c^2-12c^2\geqslant 0$.

而 $f(t)=0$ 的两根为

$\alpha=2c-b-2\sqrt{c^2-bc}$,$\beta=2c-b+2\sqrt{c^2-bc}$,

有 $\alpha=(\sqrt{c}-\sqrt{c-b})^2=\left(\frac{b}{\sqrt{c}+\sqrt{c-b}}\right)^2\leqslant\left(\frac{b}{\sqrt{\frac{4}{3}b}+\sqrt{\frac{b}{3}}}\right)^2=\frac{b}{3}$,

$\beta\geqslant 2c-b\geqslant b$.

再注意到 $x_1\leqslant x_2+x_3+x_4=b$,且 $3x_1\geqslant x_2+x_3+x_4=b$,

有 $\alpha < \frac{b}{3} \leqslant x_1 \leqslant b < \beta$,故知 $f(x_1) \leqslant 0$,

即有 $x_1^2 + 2(b-2c)x_1 + b^2 \leqslant 0$.亦即原不等式获证.

注 此例也可用代换法证.令 $x_1 = k(x_2+x_3+x_4)$,则 $\frac{x_2+x_3+x_4}{x_1} = \frac{1}{k} \geqslant 1$,从而 $k \leqslant 1$.另一方面 $k = \frac{x_1}{x_2+x_3+x_4} \geqslant \frac{x_1}{3x_1} = \frac{1}{3}$,所以 $k \in [\frac{1}{3}, 1]$,将 x_1 代入原不等式,得 $(1+k)^2(x_2+x_3+x_4)^2 \leqslant 4kx_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4)$.

即 $\frac{(1+k)^2}{4k}(x_2+x_3+x_4) \leqslant x_2x_3x_4$,而

$$\frac{(1+k)^2}{4k}(x_2+x_3+x_4) = \frac{2+\frac{1}{k}+k}{4}(x_2+x_3+x_4) \leqslant \frac{2+3+\frac{1}{3}}{4}\cdot 3x_2$$
$$= \frac{4}{3}\cdot 3x_2 \leqslant x_2x_3x_4,$$

故原不等式成立(其中 $k+\frac{1}{k}$ 在 $[\frac{1}{3},1]$ 上递减).

例 6 设 $0<x<1, 0<y<1, 0<z<1$,求证:

$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$. (第 15 届全俄奥林匹克题)

证明 考虑三次函数 $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$.

由 $1-x>0, 1-y>0, 1-z>0$,有

$f(1)=(1-x)(1-y)(1-z)>0$.

又 $f(1)=1-(x+y+z)-(xy+yz+zx)-xyz$,

从而 $(x+y+z)-(xy+yz+zx)<1-xyz<1$.

故 $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.

例 7 在 $\triangle ABC$ 中,若 a,b,c 分别表示三边之长,令 $a+b+c=s$,则

(1) $\frac{13}{27}s^2 \leqslant a^2+b^2+c^2+\frac{4}{s}abc < \frac{s^2}{2}$;

(2) $\frac{s^2}{4} < ab+bc+ca-\frac{2}{s}abc < \frac{7}{27}s^2$.

证明 考虑函数 $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$.

注意到 $a+b+c=s$,以及三角形任两边之和大于第三边,有 $0<a,b,c<\frac{s}{2}$.

于是 $f\left(\frac{s}{2}\right) = \left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)$

$$= -\frac{1}{8}s^3 + \frac{s}{2}\left[(ab+bc+ca)-\frac{2abc}{s}\right] > 0.$$

从而 $ab+bc+ca-\frac{2}{s}abc>\frac{s^2}{4}$.

由 $a+b+c=s$ 两边平方后代入上式,有 $a^2+b^2+c^2+\frac{4}{s}abc<\frac{s^2}{2}$.

又由 $f\left(\frac{s}{2}\right)=\left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)\leqslant\left[\frac{\frac{3}{2}s-(a+b+c)}{3}\right]^3=\frac{1}{216}s^3$,

化简,有 $ab+bc+ca-\frac{2}{s}abc\leqslant\frac{7}{27}s^3$.

又由 $a+b+c=s$ 两边平方后代入上式,有

$\frac{13}{27}s^2\leqslant a^2+b^2+c^2+\frac{4}{s}abc$,

故有 $\frac{13}{27}s^2\leqslant a^2+b^2+c^2+\frac{4}{s}abc<\frac{s^2}{2}$,

$$\frac{s^2}{4}<ab+bc+ca-\frac{2}{s}abc\leqslant\frac{7s^2}{27}.$$

注 当 $s=2$ 时,由(1)可得匈牙利竞赛题:

$a+b+c+2abc<2$;

当 $s=1$ 时,由(1)可得第23届全苏竞赛题:

$a+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$;

当 $s=1$ 时,由(2)可得 IMO-25 试题的一种特殊情形:

$0<ab+bc+ca-2abc\leqslant\frac{7}{27}$.

例8 α,β,γ 是一个给定三角形的三个内角.求证:

$$\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 12,$$

并求等号成立的条件. (1994年韩国奥林匹克题)

证明 由算术-几何平均值不等式,有

$$\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 3\left(\csc\frac{\alpha}{2}\cdot\csc\frac{\beta}{2}\cdot\csc\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

其中等号当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时成立.

再由算术-几何平均值不等式及正弦函数的上凸性,有

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\leqslant\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}$$
$$=\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}=\frac{1}{2}.$$

因此，$\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 3\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\geqslant 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=12$，其中等号当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时成立.

例 9 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 都是正数，$k\geqslant 1$，求证：

$$\left(\frac{a_1}{a_2+\cdots+a_n}\right)^k+\left(\frac{a_2}{a_3+\cdots+a_n+a_1}\right)^k+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_1+\cdots+a_{n-1}}\right)^k\geqslant\frac{n}{(n-1)^k}.$$

（IMO－30 预选题）

证明 记 $s=a_1+a_2+\cdots+a_n$，原不等式可写为

$$\left(\frac{a_1}{s-a_1}\right)^k+\left(\frac{a_2}{s-a_2}\right)^k+\cdots+\left(\frac{a_n}{s-a_n}\right)^k\geqslant\frac{n}{(n-1)^k}.$$

由算术－几何平均值不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}=s\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-a_i}-n\geqslant ns\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{(s-a_1)\cdots(s-a_n)}}-n$$

$$\geqslant ns\cdot\frac{n}{(n-1)s}-n=\frac{n}{n-1}.$$

由于 $k\geqslant 1$，所以函数 $f(x)=x^k$ 在 $x\geqslant 0$ 的下凸性或运用幂平均不等式，从而

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{s-a_i}\right)^k\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\right)^k\geqslant\left(\frac{1}{n-1}\right)^k.$$

故原不等式获证.

【解题思维策略分析】

1. 构造函数，运用函数取最值的策略处理不等式

例 10 设 $0<p\leqslant a,b,c,d,e\leqslant q$. 求证：

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2,$$

并且决定何时等号成立.（第 6 届美国奥林匹克题）

证明 给定正数 u,v，考虑函数

$$f(x)=(u+x)\left(v+\frac{1}{x}\right),0\leqslant p\leqslant x\leqslant q.$$

可以证明：对任何 $x\in[p,q]$，有 $f(x)\leqslant\max\{f(p),f(q)\}$. （＊）

事实上，不妨设 $p<q$，令 $\lambda=\frac{q-x}{q-p}$，则 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，且

$x=\lambda p+(1-\lambda)q$.

由于 $$pq\leqslant\lambda^2pq+(1-\lambda)^2pq+\lambda(1-\lambda)(p^2+q^2)$$
$$=[\lambda p+(1-\lambda)q]\cdot[\lambda q+(1-\lambda)p],$$

所以$\frac{1}{x}=\frac{1}{\lambda p+(1-\lambda)q}\leqslant\frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{q}$.

由此可得 $f(x)=uv+1+vx+\frac{u}{x}$

$$=uv+1+v[\lambda p+(1-\lambda)q]+\frac{u}{\lambda p+(1-\lambda)q}$$

$$\leqslant uv+1+v[\lambda p+(1-\lambda)q]+\frac{\lambda u}{p}+\frac{(1-\lambda)u}{q}$$

$$=\lambda f(p)+(1-\lambda)f(q)\leqslant\max\{f(p),f(q)\},$$

即(*)式成立.

由(*)式可知，当 a,b,c,d,e 取端点值 p 或 q 时，$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)$ 可取其最大值.设 a,b,c,d,e 中有 x 个取 p，$5-x$ 个取 q，其中 x 是不大于5的非负整数，由于

$$[xp+(5-x)q]\cdot\left(\frac{x}{p}+\frac{5-x}{q}\right)=x^2+(5-x)^2+x(5-x)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)$$

$$=25+x(5-x)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2,$$

又 $x(5-x)=-(x-2)(x-3)$，所以当 $x=2$ 或者 3 时，$[xp-(5-x)q]\cdot\left(\frac{x}{p}+\frac{5-x}{q}\right)$ 取到最大值 $25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$，于是所证不等式成立，并且当 a,b,c,d,e 中有两个或三个数等于 p，其余等于 q 时，等号成立.

2. 构造函数，注意结合证明不等式的各种方法的综合运用

例 11 已知 $u_1=1,u_n=\frac{1}{(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})^2}(n\geqslant2)$.若记 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.求证：

$$\sqrt[3]{3n+2}\leqslant S_n\leqslant\sqrt[3]{3n+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3n+2}}(n\geqslant2).$$

(《中等数学》2000年2期奥林匹克问题)

证明 首先用数学归纳法证明：

$$S_n\geqslant\sqrt[3]{3n+2}(n\geqslant2). \quad ①$$

当 $n=2$ 时，直接验证可知①式成立.

假设①式对 $n(n\geqslant2)$ 成立，从 S_n 的定义易得 $S_{n+1}=S_n+\frac{1}{S_n^2}$. ②

考虑函数 $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$ 及 $\sqrt[3]{2}\leqslant x_1<x_2$，通过计算知

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2-x_1}{x_1^2x_2^2}(x_1^2x_2^2-x_1-x_2)>\frac{x_2-x_1}{x_1^2x_2^2}(2x_1-x_2-x_3)$$

$$=\frac{(x_2-x_1)^2}{x_1^2x_2^2}>0.$$

可知 $f(x)$ 在$[\sqrt[3]{2},+\infty)$上严格单调递增.

由 $S_n\geqslant\sqrt[3]{3n+2}\geqslant 2$ 和 ② 式,可得

$$S_{n+1}=f(S_n)\geqslant f(\sqrt[3]{3n+2})=\sqrt[3]{3n+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3n+2}}.$$

另一方面,从恒等式

$$\sqrt[3]{3n+5}-\sqrt[3]{3n+2}=\frac{3}{\sqrt[3]{(3n+5)^2}+\sqrt[3]{(3n+5)(3n+2)}+\sqrt[3]{(3n+2)^2}},$$

可得 $$\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+5)^2}}<\sqrt[3]{3n+5}-\sqrt[3]{3n+2}<\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}}.\quad ③$$

由 ③ 式,立即可得 $S_{n+1}>\sqrt[3]{3n+5}=\sqrt[3]{3(n+1)+2}$.

由数学归纳法原理知,① 式成立.

其次用数学归纳法证明:

$$S_n\leqslant\sqrt[3]{3n+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3n+2}}(n\geqslant 1).\quad ④$$

考虑函数 $g(x)=x+\frac{1}{x}$ 及 $1\leqslant x_1<x_2$,通过计算知

$$g(x_2)-g(x_1)=(x_2-x_1)(1-\frac{1}{x_1x_2})>(x_2-x_1)(1-\frac{1}{x_1^2})\geqslant 0,$$

可知 $g(x)$ 在$[1,+\infty)$上严格单调递增.

令 $T_n=g(\sqrt[3]{3n+2})$,则当 $n\leqslant 3$ 时,

$$S_n\leqslant S_3=2.25<\sqrt[3]{5}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=T_1\leqslant T_n.$$

当 $4\leqslant n\leqslant 6$ 时,$S_n\leqslant S_6=2.7607611\cdots<2.8250566\cdots=T_4\leqslant T_n$.

假设 $n\geqslant 6$ 时,④ 式成立.由关于 $g(x)$ 的不等式,知

$$T_{n+1}-T_n>(\sqrt[3]{3n+5}-\sqrt[3]{3n+2})[1-\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}}].$$

由 ③ 式可得 $$T_{n+1}-T_n>\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+5)^2}}\left[1-\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}}\right].\quad ⑤$$

由 $f(x)$ 的单调性,可得 $$S_{n+1}=f(S_n)\leqslant f(T_n)=T_n+\frac{1}{T_n^2}.\quad ⑥$$

从 ⑤ 和 ⑥ 知,要证明 $S_{n+1} < T_{n+1}$,仅需证明

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+5)^2}}\left[1-\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}}\right] \geqslant \frac{1}{T_n^2}. \tag{7}$$

而 ⑦ 式等价于

$$\sqrt[3]{(3n+5)^2}-\sqrt[3]{(3n+2)^2} < 1-\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^4}}. \tag{8}$$

用证明 ③ 的方法可以证明,有

$$\sqrt[3]{(3n+5)^2}-\sqrt[3]{(3n+2)^2} \leqslant \frac{6n+7}{\sqrt[3]{(3n+2)^4}}.$$

要证明不等式 ⑧,仅需证明 $\frac{6n+8}{\sqrt[3]{(3n+2)^4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}} < 1$,

即 $$\frac{2}{\sqrt[3]{3n+2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}}+\frac{4}{\sqrt[3]{(3n+2)^4}} < 1.$$

上述不等式的左边是 n 的减函数,在 $n \geqslant 6$ 时,它不大于

$$\frac{2}{\sqrt[3]{20}}+\frac{1}{\sqrt[3]{400}}+\frac{4}{\sqrt[3]{160000}} = 0.9462078\cdots < 1.$$

所以 $S_{n+1} < T_{n+1}$.

由数学归纳法原理,知 ④ 式成立.

例 12 对任何正整数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,求证:

$$(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)^2$$
$$\geqslant 4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1),$$

并证明当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ 时等号成立. (IMO - 28 预选题)

证明 令二次函数

$$f(x)=(b_1x-a_1)(b_2x-a_2)+(b_2x-a_2)(b_3x-a_3)+(b_3x-a_3)(b_1x-a_1).$$

如果要证的不等式不成立,显然对任意实数 x 有 $f(x)>0$.

由此可得

$$f\left(\frac{a_1}{b_1}\right)=b_2b_3\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}\right)\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_3}{b_3}\right)>0,$$

$$f\left(\frac{a_2}{b_2}\right)=b_1b_3\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}\right)>0,$$

$$f\left(\frac{a_3}{b_3}\right)=b_1b_2\left(\frac{a_3}{b_3}-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_3}{b_3}-\frac{a_2}{b_2}\right)>0,$$

从而 $-\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}\right)^2\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_3}{b_3}\right)^2\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}\right)^2>0$,

矛盾!所以要证之不等式成立.

若$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda$,则$f(x)=(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)(x-\lambda)^2$.

于是 $f(x)$ 的判别式为0,即

$$(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)^2$$
$$=4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1).\qquad ①$$

反之若 ① 成立,则对任何实数 x 有$f(x)\geqslant 0$.

不妨设$\frac{a_1}{b_1}\geqslant\frac{a_2}{b_2}\geqslant\frac{a_3}{b_3}$,则$f\left(\frac{a_2}{b_2}\right)=b_1b_3\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}\right)\leqslant 0$,

从而$f\left(\frac{a_2}{b_2}\right)=0$,由此可得$\frac{a_1}{b_1},\frac{a_3}{b_3}$中至少有一个等于$\frac{a_2}{b_2}$,不妨设$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\lambda$,由于$\lambda$是$f(x)$ 的二重根,所以

$$\lambda=\frac{a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2}{2(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)}.$$

注意到 $a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2$,则 $\lambda b_3(b_1+b_2)=a_3(b_1+b_2)$,

从而$\frac{a_3}{b_3}=\lambda=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

3. 构造函数,对函数求导处理不等式

例 13 设 a,b,c 为正实数,且 $abc=1$.求证

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

(IMO-36 试题)

证法 1 利用 $abc=1$,可把原不等式化为

$$\frac{(bc)^2}{ab+ca}+\frac{(ca)^2}{bc+ab}+\frac{(ab)^2}{ca+bc}\geqslant\frac{3}{2}.$$

记 $ab+bc+ca=s$,考虑函数 $f(x)=\frac{x}{s-x},x\in(0,s)$,则 $f'(x)=\frac{s}{(s-x)^2}>0$.

即知 $f(x)$ 在$(0,s)$上为增函数,从而,对任意的 $x\in(0,s)$,恒有

$$\left(x-\frac{s}{3}\right)\cdot\left[f(x)-f\left(\frac{s}{3}\right)\right]\geqslant 0,\text{由此易得}\frac{x^2}{s-x}\geqslant\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}s.$$

由于$ab,bc,ca\in(0,s)$,可把上式中 x 分别换成ab,bc,ca,再将所得的3个不等式相加,得$\frac{(bc)^2}{ab+ca}+\frac{(ca)^2}{bc+ab}+\frac{(ab)^2}{ca+bc}\geqslant\frac{5}{4}\cdot s-\frac{3}{4}s=\frac{1}{2}s\geqslant\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$.

证毕.

证法 2 同证法 1,原不等式变形为 $\frac{(bc)^2}{ab+ca}+\frac{(ca)^2}{bc+ab}+\frac{(ab)^2}{ca+bc}\geqslant\frac{3}{2}$.

记 $ab+bc+cd=s$,考虑函数 $f(x)=\frac{x^2}{s-x}, x\in(0,s)$,则 $f'(x)=\frac{2x(s-x)+x^2}{(s-x)^2}$,当 $x\in(0,s)$ 时,$f'(x)>0$,且 $f''(x)=\frac{2(x-s)+2x}{(s-x)^2}+\frac{2x(s-x)^2+2x^2(s-x)}{(s-x)^4}>0$.

即知 $f(x)$ 在 $(0,s)$ 内为下凸函数,由琴生不等式:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\geqslant f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}).$$

取 $x_1=bc, x_2=ca, x_3=ab$,有

$$\frac{(bc)^2}{ab+ca}+\frac{(ca)^2}{bc+ab}+\frac{(ab)^2}{ca+bc}\geqslant 3\cdot\frac{(\frac{s}{3})^2}{s-\frac{s}{3}}=\frac{1}{2}s\geqslant\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}.$$ 证毕.

注 对构造的函数 $f(x)$,若可求得 $f''(x)$ 在给定区间上恒正或恒负,就能判断 $f(x)$ 在这个区间上为下凸函数或上凸函数,这时,方可应用琴生不等式.否则,不能应用.

例 14 实数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=\frac{1}{2}, a_{k+1}=-a_k+\frac{1}{2-a_k}, k=1,2,\cdots$.证明不等式

$$[\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1]^n\leqslant(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^n\cdot(\frac{1}{a_1}-1)(\frac{1}{a_2}-1)\cdots(\frac{1}{a_n}-1).$$

(2006 年 CMO - 21 试题)

证明 首先,用数学归纳法证明:$0<a_n\leqslant\frac{1}{2}, n=1,2,\cdots$.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.

假设命题对 $n(n\geqslant 1)$ 成立,即有 $0<a_n\leqslant\frac{1}{2}$.

设 $g(x)=-x+\frac{1}{2-x}, x\in[0,\frac{1}{2}]$,则由 $g'(x)=-1+\frac{1}{(2-x)^2}<0$ 知 $g(x)$ 是减函数,于是,$a_{n+1}=g(a_n)\leqslant g(0)=\frac{1}{2}, a_{n+1}=g(a_n)\geqslant g(\frac{1}{2})=\frac{1}{6}>0$,即命题对 $n+1$ 也成立.

从而,原不等式等价于

$$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n\cdot\left(\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

设 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-1\right),x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则由 $f'(x)=\frac{-1}{x-x^2}<0$，且 $f''(x)=\frac{1-2x}{(x-x^2)^2}>0$，即知 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内为下凸函数，由琴生不等式：

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

取 $x_i=a_i(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-1\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

另一方面，由题设及柯西不等式，可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+a_{i+1}}-n\\&\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})}-n=\frac{n^2}{a_{n+1}-a_1+2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-n\geqslant\frac{n^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-n\\&=n\cdot\left(\frac{n}{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-1\right),\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\geqslant\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\left(\dfrac{n}{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-1\right)$.

故

$$\begin{aligned}&\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n\cdot\left[\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right]^n\leqslant\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\right]^n\\&=\left[\frac{(1-a_1)+(1-a_2)+\cdots+(1-a_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right]^n=\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-1\right)^n\\&\leqslant\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right).\end{aligned}$$

即命题获证.

注　对函数 $f(x)$，求它的导数 $f'(x)$，能否判定 $f'(x)$ 具有单调性，或求它的2阶导数 $f''(x)$，在给定的区间上可根据 $f''(x)$ 恒正或恒负判定函数的凹凸性外，也可以由函数凹凸性的定义判定函数的凹凸性. 例如，对于函数 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)$，对于 $0<x_1$，

$x_2 < \frac{1}{2}$，有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. 事实上，$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 等价于 $(\frac{2}{x_1+x_2}-1)^2 \leqslant (\frac{1}{x_1}-1)(\frac{1}{x_2}-1) \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 \geqslant 0$，从而可判定 $f(x)=\ln(\frac{1}{x}-1)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内为下凸函数. 实际上，运用琴生不等式也可看作为，当 $x_1, x_2 \in I$ 有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})$ 不大于或不小于 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则对于 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$，也有 $f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})$ 不大于或不小于 $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

例 15 已知正数 a, b, c 满足 $a+b+c=3$，求证：

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2} \leqslant 5.$$

（第 2 届北方数学奥林匹克题）

证明 设 $f(x)=\frac{x^2+9}{3x^2-6x+9}, x \in (0,3)$，则 $f'(x)=\frac{-6(x^2+6x-9)}{(3x^2-6x+9)^2}=\frac{-2(x^2+6x-9)}{3(x^2-2x+3)^2}$. 由于 $f'(x)$ 不具单调性，不能用凹凸性来处理．注意到导函数的几何意义：

$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，有 $f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$，可考虑函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否存在界函数，由于函数最值在变元 x 取平均值时取得．故可考虑当 $x=1$ 处 $f(x)$ 的切线函数 $y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{x+4}{3}$.

因为

$$\frac{x^2+9}{3x^2-6x+9}-\frac{x+4}{3}=\frac{(x^2+9)-(x+4)(x^2-2x+3)}{3x^2-6x+9}=\frac{-(x+3)(x-1)^2}{3x^2-6x+9},$$

所以，当 $0<x<3$ 时，$\frac{x^2+9}{3x^2-6x+9} \leqslant \frac{x+4}{3}$.

于是

$$\begin{aligned}&\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2}\\=&\frac{a^2+9}{3a^2-6a+9}+\frac{b^2+9}{3b^2-6b+9}+\frac{c^2+9}{3c^2-6c+9}\\\leqslant&\frac{a+4}{3}+\frac{b+4}{3}+\frac{c+4}{3}=5.\end{aligned}$$

例16 设 a,b,c 满足 $a+b+c=3$. 求证 $\frac{1}{5a^2-4a+1}+\frac{1}{5b^2-4b+1}+\frac{1}{5c^2-4c+1}\leqslant\frac{1}{4}$.

（2007年中国西部奥林匹克题）

证明 设 $f(x)=\frac{1}{5x^2-4x+11}, x\in\mathbf{R}$，则 $f'(x)=\frac{-10x+4}{(5x^2-4x+11)^2}$. 考虑函数在 $x=1$ 处的切线函数 $y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{3-x}{24}$.

因为
$$\frac{1}{5x^2-4x+11}-\frac{3-x}{24}=\frac{24-(3-x)(5x^2-4x+11)}{24(5x^2-4x+11)}=\frac{(5x-9)(x-1)^2}{24(5x^2-4x+11)}.$$

(Ⅰ) 若 a,b,c 都小于 $\frac{9}{5}$，则 $\frac{1}{5a^2-4a+11}\leqslant\frac{3-a}{24}$ 等三式.

因此
$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\leqslant\frac{3-a}{24}+\frac{3-b}{24}+\frac{3-c}{24}=\frac{1}{4}.$$

(Ⅱ) 若 a,b,c 中有一个不小于 $\frac{9}{5}$，不妨设 $a\geqslant\frac{9}{5}$，则

$$5a^2-4a+11>5\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^2-4\cdot\frac{9}{5}+11=20.$$

又 $5b^2-4b+11=5\left(b-\frac{2}{5}\right)^2+11-\frac{4}{5}\geqslant\frac{51}{5}>10$，同理 $5c^2-4c+11>10$.

因此 $\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}<\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{4}$.

综上，原不等式获证.

例17 对所有的正实数 a,b,c，求证：$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1$.

（IMO-42试题，可参见第十三章中的例10）

证明 不妨设 $\frac{a}{\sqrt{b^2+8bc}}\geqslant\frac{a^t}{a^t+b^t+c^t}$，其中，$a,b,c$ 为任意正实数，t 为待定指数.

特别地，当 $b=c=1$，而 a 为任意的正实数时，上式变为

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8}}\geqslant\frac{a^t}{a^t+2}, a\in(0,+\infty).$$

令 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}-\frac{x^t}{x^t+2}$，则知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续且可导，满足 $f(x)\geqslant 0$. 因当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 0，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，即 $f'(1)=0$.

由于
$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)'\bigg|_{x=1}=\frac{8}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}\bigg|_{x=1}=\frac{8}{27},$$
$$\left(\frac{x^t}{x^t+2}\right)'\bigg|_{x=1}=\frac{2t\cdot x^{t-1}}{(x^t+2)^2}\bigg|_{x=1}=\frac{2}{9}t,$$

所以 $f'(1)=\frac{8}{27}-\frac{2}{9}t=0$，从而求得 $t=\frac{4}{3}$.

于是，有 $\frac{a}{\sqrt{b^2+8bc}}\geqslant\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ 等三式. 由此三式相加即证得原不等式.

注 对于如上引入待定指数，运用平均值不等式而确定这个待定指数的问题均可以用上述办法来处理.

例 18 设正实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$. 求 $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}$ 的最小值.

解 设 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$，$x\in(0,1)$，则 $f'(x)=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$，$f''(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}+\frac{4x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$.

虽然 $f''(x)>0$，知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内为下凸函数，但应用琴生不等式时，对于条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 不太好用. 因而另辟途径，考虑函数 $g(x)=\frac{1}{1-x^2}$，$x\in(0,1)$，则

$$g'(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

注意到函数 $g(x)$ 在 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 处的切线函数为 $y=g'(\frac{\sqrt{3}}{3})(x-\frac{\sqrt{3}}{3})+g(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}x$.

由 $\frac{1}{1-x^2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}x=\frac{2-3\sqrt{3}x(1-x^2)}{2(1-x^2)}$ 及令 $h(x)=3\sqrt{3}x(1-x^2)$，且

当 $0<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$h'(x)>0$，当 $\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1$ 时，$h'(x)<0$，知 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$h(x)$ 取

最大值 2，即 $2-3\sqrt{3}x(1-x^2)\geqslant 0$，故 $\frac{1}{1-x^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}x$，亦即 $\frac{x}{1-x^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$.

于是 $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

故当 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}$ 取最小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

例 19　设 $a,b,c>0$，且 $abc\geqslant 1$，求证：

$$n^3\sum_{k=0}^{n}a^k\cdot\sum_{k=0}^{n}b^k\cdot\sum_{k=0}^{n}c^k\geqslant(n+1)^3\sum_{k=0}^{n-1}a^k\cdot\sum_{k=0}^{n-1}b^k\cdot\sum_{k=0}^{n-1}c^k.$$

证明　设 $f(x)=\frac{\sum_{k=0}^{n}x^k}{\sum_{k=0}^{n-1}x^k}-\frac{1+n}{2n}(x+1),x\in\mathbf{R}^+,n\in\mathbf{N}^+$.

当 $x=1$ 时，有 $f(1)=0$.

当 $x\neq 1$ 时，$f(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x^n-1}-\frac{1+n}{2n}(x+1)$.

令 $g(x)=x^{n+1}-1-\frac{1+n}{2n}(x+1)\cdot(x^n-1)$

$=(n-1)x^{n+1}-(1+n)x^n+(1+n)x-(n-1)$,

则 $g'(x)=(n^2-1)x^n-(n+n^2)x^{n-1}+1+n$，且若 $x>1$,

$g''(x)=(n^3-n)(x^{n-1}-x^{n-2})\geqslant 0$,

从而 $g'(x)\geqslant g'(1)=0$，于是 $g(x)\geqslant g(1)=0$，此时，$f(x)\geqslant 0$.

若 $0<x<1$，$g''(x)=(n^3-n)(x^{n-1}-x^{n-2})\leqslant 0$，从而有

$g'(x)\leqslant g'(1)=0$，于是 $g(x)\leqslant g(1)=0$，此时，亦有 $f(x)\geqslant 0$.

故当 $a=b=c=1$ 时，原不等式显然成立 .

当 a,b,c 有一个不是 1 时，有 $\frac{\sum_{k=0}^{n}a^k}{\sum_{k=0}^{n-1}a^k}\geqslant\frac{1+n}{2n}(a+1)$，$\frac{\sum_{k=0}^{n}b^k}{\sum_{k=0}^{n-1}b^k}\geqslant\frac{1+n}{2n}(b+1)$，

$\frac{\sum_{k=0}^{n}c^k}{\sum_{k=0}^{n-1}c^k}\geqslant\frac{1+n}{2n}(c+1)$.

上述三式相乘得

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} a^k}{\sum_{k=0}^{n-1} a^k} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n} b^k}{\sum_{k=0}^{n-1} b^k} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n} c^k}{\sum_{k=0}^{n-1} c^k} \geqslant \left(\frac{1+n}{2n}\right)^3 (a+1)(b+1)(c+1)$$

$$\geqslant \left(\frac{1+n}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{b} \cdot 2\sqrt{c} \geqslant \left(\frac{1+n}{n}\right)^3.$$

故 $n^3 \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot \sum_{k=0}^{n} b^k \cdot \sum_{k=0}^{n} c^k \geqslant (n+1)^3 \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b^k \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c^k$.

注 (1) 此例可运用排序不等式的推论 9 即(13 - 4) 式证:由 $a^n + 1 \geqslant a^{n-1} + a$, $a^n + 1 \geqslant a^{n-2} + a^2, \cdots, a^n + 1 \geqslant a + a^{n-1}$ 这 $n-1$ 个不等式相加得

$(n-1)(a^n + 1) \geqslant 2(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a)$

$\Leftrightarrow 2n \sum_{k=0}^{n} a^k \geqslant (n+1)(a^n + 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} a^k)$.

即 $2n \sum_{k=0}^{n} a^k \geqslant (n+1)(a+1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k$. 同理有其他两式 . 由这样的三式相乘再整理即证结论 .

(2) 此例可推广为:设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, $m, n \in \mathbf{N}^*$, 且 $n \geqslant 2$, $\prod_{i=1}^{n} a_i \geqslant 1$, 则

$n^m \prod_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} a^k \geqslant (n+1)^m \prod_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n-1} a^k$.

【模拟实战】

习题 A

运用函数性质证明下列问题:

1. 设 a, b, c 为正实数,且满足 $abc = 1$.求证:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$ (IMO - 36 试题)

2. 设 a, b, c, d 是满足 $ab + bc + cd + da = 1$ 的非负实数.试证:

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}.$$ (IMO - 31 预选题)

3. 求证:对于任何实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{1987}$ 和任何正数 $b_1, b_2, \cdots, b_{1987}$ 都有

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{1987})^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{1987}} \leqslant \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$ (第 50 届莫斯科奥林匹克题)

4. 设长方体的棱长分别是 x,y 和 z,且 $x<y<z$,记 $p=4(x+y+z)$, $s=2(xy+yz+zx)$, $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.求证:

$$x<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right),z>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right).$$

(第 14 届全苏奥林匹克题)

5. 设 $0<x<a$.求证:

$$(a-x)^6-3a(a-x)^5+\frac{5}{2}a^2(a-x)^4-\frac{1}{2}a^4(a-x)^2<0.$$

(第 4 届普特南竞赛题)

习题 B

1. 设 $n\geqslant 2$,实数 $k\geqslant 1$, $a_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=n$.证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+1)^{2k}}{(a_{i+1}+1)^k}\geqslant n\cdot 2^k(a_{n+1}=a_1),$$并确定等号成立的条件.

(《中等数学》2002 年 5 期奥林匹克问题)

2. 设 x,y,z 是正实数,且 $xyz=1$.证明:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

(IMO - 39 预选题)

3. 给定 $a>2$, $\{a_n\}$ 归纳定义如下: $a_0=1$, $a_1=a$, $a_{n+1}=\left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}-2\right)a_n$.证明:对任何 $k\in\mathbf{N}$,有 $\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}<\frac{1}{2}(2+a-\sqrt{a^2-4})$.

(IMO - 37 预选题)

4. 设 $x_k>0(k=1,2,\cdots,n)$, $\sum\limits_{k=0}^{n}x_k=1$,求证: $\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1+x_k}{x_k}\geqslant\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{n-x_k}{1-x_k}$.

(2006 年国家集训队测试题)

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=s$, $k\in\mathbf{R}$ 且 $k>1$,求证:

$$\frac{a_1^k}{s-a_1}+\frac{a_2^k}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_n^k}{s-a_n}\geqslant\frac{s^{k-1}}{(n-1)\cdot n^{k-2}}.$$

6. 设非负实数 x_1,x_2,x_3,x_4 满足 $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$.求证: $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2}\leqslant 1$.

(2003 年中国西部奥林匹克题)



7. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$. 求证$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 8$.

（2003 年美国奥林匹克题）

8. 设 a,b,c 是正实数,求证$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\geqslant\frac{3}{5}$.

（1997 年日本奥林匹克题）



第十六章　构作数表(矩阵)与不等式证明

【基础知识】

长方形数表(矩阵)是常见的数学现象.它是处理大量数学问题,乃至日常生活中很多实际问题的极为重要的工具.构作长方形数表(矩阵)是证明、推广乃至得出新不等式的一种重要途径.

长方形非负实数表(非负实数矩阵)中的各元素(数)之间的相互关系(这里主要指列的和积关系、列的积和关系与列和之几何均值关系),构成了几个优美的不等式.

为了讨论问题的方便,我们先介绍数表中每列和的几何均值关系与每行的几何均值之和的关系.

在 $n\times m$ 的方格表中,每一格中填入一个非负实数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$,将每一列的和记为 $A_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}$,每一行的积记为 $G_i=\prod\limits_{j=1}^{m}a_{ij}$,则有

$$\prod_{j=1}^{m}A_j^{\frac{1}{m}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}G_i^{\frac{1}{m}}.\tag{16-1}$$

此式则表明:

结论 1　m 列数每列之和的几何平均值不小于 n 行每行数的几何平均值之和,其中等号成立的充要条件是至少有一列填写的完全是零或在所有的行中的数成比例.

证明　若 $A_j=0$,则由非负数性质有 $a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{nj}=0$,此时 $G(A_1,A_2,\cdots,A_m)=0=G_1=G_2=\cdots=G_n$,(16-1)式显然成立.

若 $A_j>0$,对于数 $\frac{a_{i1}}{A_1},\frac{a_{i2}}{A_2},\cdots,\frac{a_{im}}{A_m}$ 应用算术-几何平均值不等式,即有

$$\frac{a_{i1}}{A_1}+\frac{a_{i2}}{A_2}+\cdots+\frac{a_{im}}{A_m}\geqslant m\cdot\left(\frac{G_i}{\prod\limits_{j=1}^{m}A_j}\right)^{\frac{1}{m}}(i=1,2,\cdots,n),$$

将如上 n 个不等式两边相加,即有

$$m \geqslant m \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{G_i}{\prod_{j=1}^{m} A_j}\right)^{\frac{1}{m}} = m \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i^{\frac{1}{m}}}{\prod_{j=1}^{m} A_j^{\frac{1}{m}}},\text{故}$$

$$\prod_{j=1}^{m} A_j^{\frac{1}{m}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} G_i^{\frac{1}{m}},$$

其中等号成立的充要条件是证明中算术 - 几何不等式等号成立的充要条件 $\frac{a_{i1}}{A_1} = \frac{a_{i2}}{A_2} = \cdots = \frac{a_{im}}{A_m}$,即得方格表中所有的行中的数成比例.

【典型例题与基本方法】

下面我们就采用在方格表中填数的方法证明某些不等式.

例 1 在 $\triangle ABC$ 中,外接圆半径 $R = 1$,面积 $S_{\triangle} = \frac{1}{4}$,求证:

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. (1986 年全国高中联赛题)

证明 在 3×2 方格表中填数如下:

$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$
$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c}$
$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{a}$

注意到 $abc = 4R \cdot S_{\triangle} = 1$,则

$$\left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} = \sqrt{c} + \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

当且仅当 $a = b = c = 1$ 时上式取等号,而这时 $S_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4} > \frac{1}{4}$.故

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

例 2 设 $x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$.求证:

$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_1} \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. (1984 年全国高中联赛题)

证明 在 $n\times 2$ 方格表中填数如下：

$\dfrac{x_1^2}{x_2}$	x_2
$\dfrac{x_2^2}{x_3}$	x_3
$\vdots$	$\vdots$
$\dfrac{x_n^2}{x_1}$	x_1

则

$$\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{\frac{1}{2}}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

故 $$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

例 3 设 $x,y,z>0$，且 $x+y+z=1$. 求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ 的最小值.

（1990 年日本 IMO 代表队第一轮选拔题）

解 在 3×2 方格表中填数如下：

$\dfrac{1}{x}$	x
$\dfrac{4}{y}$	y
$\dfrac{9}{z}$	z

则

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+y+2)^{\frac{1}{2}}\geqslant 1+4^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{1}{2}},$$

即 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}\geqslant 36$，

当且仅当 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{y}=\dfrac{3}{z}$ 即 $x=\dfrac{1}{6},y=\dfrac{1}{3},z=\dfrac{1}{2}$ 时取得最小值.

例 4 若 a,b,c 是三角形边长，且 $2S=a+b+c,n\in\mathbf{N}$，求证：

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot S^{n-1}.$$

（IMO－28 预选题）

证明 在 $3 \times n$ 方格表中填数如下：

$\frac{a^n}{b+c}$	$b+c$	1	…	1
$\frac{b^n}{c+a}$	$c+a$	1	…	1
$\frac{c^n}{a+b}$	$a+b$	1	…	1

（后 $n-2$ 列）

则

$$\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot (2a+2b+2c)^{\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{3^{\frac{1}{n}} \cdots 3^{\frac{1}{n}}}_{n-2} \geqslant a+b+c,$$

并注意到 $2S = a+b+c$.

故 $$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot S^{n-1}.$$

注 此例中若 $n=1$，则为1963年莫斯科奥林匹克九年级题；若 $n=2$，则为第二届"友谊杯"国际邀请赛十年级题.

例5 设 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为正数，$n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}$，则

$$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n+\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^n \geqslant \frac{x_1}{x_0}+\frac{x_2}{x_1}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_0}{x_n}.$$

（1990年江苏省夏令营选拔赛题）

证明 在 $(n+2) \times (n+1)$ 方格表中填数如下：

$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n$	$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n$	…	$\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n$	$\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^n$
$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n$	$\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n$	…	$\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^n$	1
$\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n$	$\left(\frac{x_3}{x_4}\right)^n$	…	1	$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n$
⋮	⋮	…	⋮	⋮
1	$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n$	…	$\left(\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}\right)^n$	$\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n$

则

$$\left\{\left[\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n+\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^n+1\right]^{n+1}\right\}^{\frac{1}{n+1}} \geqslant 1+\frac{x_1}{x_0}+\frac{x_2}{x_1}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_0}{x_n},$$

故 $\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^n \geqslant \frac{x_1}{x_0}+\frac{x_2}{x_1}+\cdots+\frac{x_0}{x_n}$.

例 6 求证:对所有满足条件 $x_i>0, y_i>0, x_iy_i-z_i^2>0(i=1,2)$ 的实数 x_1,x_2,y_1,y_2 有不等式

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2} \quad ①$$

成立,并指出不等式中等号成立的条件. (IMO-8 试题)

证明 令 $D_i^2=x_iy_i-z_i^2(i=1,2)$,即 $D_i^2+z_i^2=x_iy_i$,则

$$(D_1^2+z_1^2)(D_2^2+z_2^2)+(D_1^2+z_1^2)\frac{x_2}{x_1}+(D_2^2+z_2^2)\frac{x_1}{x_2}$$
$$=x_1y_1+x_2y_2+x_2y_1+x_1y_2=(x_1+x_2)(y_1+y_2).$$

在 5×2 方格表中填数如下:

$D_1^2+z_1^2+D_2^2+z_2^2$	$D_1^2+z_1^2+D_2^2+z_2^2$
$\frac{x_2}{x_1}D_1^2$	$\frac{x_1}{x_2}D_2^2$
$\frac{x_2}{x_1}z_1^2$	$\frac{x_1}{x_2}z_2^2$
$\frac{x_1}{x_2}D_2^2$	$\frac{x_2}{x_1}D_1^2$
$\frac{x_1}{x_2}z_2^2$	$\frac{x_2}{x_1}z_1^2$

则

$$(D_1+D_2)^2+(z_1+z_2)^2 \leqslant (x_1+x_2)(y_1+y_2),$$

所以
$$\frac{1}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leqslant \frac{1}{(D_1+D_2)^2}. \quad ②$$

又在 2×3 方格表中填数如下:

D_1	D_1	$\frac{1}{D_1^2}$
D_2	D_2	$\frac{1}{D_2^2}$

则

$$\frac{1}{D_1^2}+\frac{1}{D_2^2}\geqslant\frac{8}{(D_1+D_2)^2}. \quad ③$$

由②、③式即知①式成立.

由②、③中等号成立的充要条件$\frac{x_2}{x_1}D_1^2=\frac{x_1}{x_2}D_2^2$且$\frac{x_2}{x_1}z_1^2=\frac{x_1}{x_2}z_2^2$及$D_1:D_2=\frac{1}{D_1^2}:\frac{1}{D_2^2}$得①式中等号成立的充要条件是$D_1=D_2,x_1=x_2,z_1=z_2$,亦即$x_1=x_2,y_1=y_2,z_1=z_2$.

由上面的例子,对于某些不等式运用图表证法由此略见一斑,并且由此可推广这些不等式,读者不妨试一试.对于构造方格表及方格表中填数的技巧,读者可从上述诸例的解法中去体会.

【解题思维策略分析】

为了进一步运用数表法证明不等式,我们称(16-1)式为卡尔松不等式.我们约定,构作数表改为构作矩阵,以免得画表,并且还介绍微微对偶不等式,这样,便可根据题设结构特点,可构造各种不同的矩阵来证明不等式.

考虑两个 $n\times m$ 非负实数矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix},$$

其中 $a_{i1}\leqslant a_{i2}\leqslant\cdots\leqslant a_{im},i=1,2,\cdots,n$.

$$A'=\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1m}\\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nm}\end{bmatrix}$$

其中A'的第$1,2,\cdots,n$行的数分别还是A的第$1,2,\cdots,n$行的数,只是改变了排列的次序(即打乱了大小顺序).

并称A是同序矩阵,A'是A的乱序矩阵.如果通过列的交换可变为同序矩阵,则称此矩阵为可同序矩阵.

此时,我们有

结论2 非负实数可同序矩阵元素的列积之和不小于其乱序矩阵元素的列积之和.

结论3 非负实数可同序矩阵元素的列和之积不大于其乱序矩阵元素的列和之

积.

写成不等式,即为微微对偶不等式:

$$\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\geqslant\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}a'_{ij},\tag{16-2}$$

$$\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a'_{ij}.\tag{16-3}$$

这两个不等式的证明可参见书籍(证略).它们的简单情形即为我们常见的两个不等式:

令 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ a & b\end{bmatrix}$, $A'=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$,其中 $a,b\in\mathbf{R}^+$,则

$a^2+b^2\geqslant 2ab,4ab\leqslant(a+b)^2$.

例 7 若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a^2+b^2+c^2=14$.求证:$a^5+\frac{1}{8}b^5+\frac{1}{27}c^5\geqslant 14$.

证明 构作了 3×5 非负实数矩阵

$$\begin{bmatrix}a^5 & a^5 & 1 & 1 & 1\\ \frac{1}{8}b^5 & \frac{1}{8}b^5 & 4 & 4 & 4\\ \frac{1}{27}c^5 & \frac{1}{27}c^5 & 9 & 9 & 9\end{bmatrix}_{3\times 5}$$

由(16 - 1)式(或卡尔松不等式)有

$$\left[(a^5+\frac{1}{8}b^5+\frac{1}{27}c^5)^2\cdot(1+4+9)^3\right]^{\frac{1}{5}}\geqslant a^2+b^2+c^2=14,$$

故 $a^5+\frac{1}{8}b^5+\frac{1}{27}c^5\geqslant 14$.

例 8 设 $x_i\in\mathbf{R}^+,1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 2,\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$,试证:$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$.

(CMO - 4 试题)

证明 由题设知 $0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n$,注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}-\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}$.由此特征,构作如下三个 $n\times 2$ 非负实数矩阵:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x_1}} & \sqrt{1-x_1} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} & \sqrt{1-x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{1-x_n}} & \sqrt{1-x_n} \end{bmatrix}_{n\times 2}, \begin{bmatrix} 1-x_1 & 1 \\ 1-x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1-x_n & 1 \end{bmatrix}_{n\times 2}, \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}_{n\times 2},$$

由(16 - 1)式(或卡尔松不等式),有

$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant n$,即$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}}$;

$\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right]\cdot n\right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}$,即$\sqrt{(n-1)n} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}$;

$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot n\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$,即$\sqrt{n} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$.

故$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i} \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}} - \sqrt{n(n-1)}$

$$\geqslant \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

例 9 若 $x > y, xy = 1$.求证:$\frac{x^2+y^2}{x-y} \geqslant 2\sqrt{2}$. (第 9 届全苏奥林匹克题)

证明 原不等式可变形为$\left(\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)^2 \geqslant 8$.

构作矩阵 $A = \begin{bmatrix} x-y & \frac{2}{x-y} \\ x-y & \frac{2}{x-y} \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} x-y & \frac{2}{x-y} \\ \frac{2}{x-y} & x-y \end{bmatrix}$.

则 A 为同序矩阵,由(16 - 3)式,有$\left[2(x-y)\cdot\frac{4}{x-y}\right] \leqslant \left[(x-y)+\frac{2}{x-y}\right]^2$,

即 $8 \leqslant \left[\frac{(x-y)^2+2}{x+y}\right]^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)^2$.

故$\frac{x^2+y^2}{x-y} \geqslant 2\sqrt{2}$.

例 10 设 $a,b,c>0$,求证:$a+b+c \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}$. (波兰竞赛题)

证法 1 构作矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}_{3\times 3}, \quad A'=\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

则 A 为可同序矩阵,由(16-2)式,有

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2=abc(a+b+c).$$

故 $$a+b+c \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

证法 2 构作矩阵 $M=\begin{bmatrix} a^4 & a^4 & b^4 & c^4 \\ b^4 & b^4 & c^4 & a^4 \\ c^4 & c^4 & a^4 & b^4 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

由(16-1)式,有 $[(a^4+b^4+c^4)^4]^{\frac{1}{4}} \geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$.

故 $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$,即 $a+b+c \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}$.

【模拟实战】

习题 A

1. 用微微对偶不等式证明本章例 1.

2. 证明:数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 是单调递增的.

3. 设 α,β 均为锐角,求证:$\sin^3\alpha\cdot\cos^3\beta+\sin^3\alpha\cdot\sin^3\beta+\cos^3\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. 设 $a,b\in\mathbf{R}^+$,求证 $\frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x} \geqslant (a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n+2}{2}}$.

5. 求证:$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

习题 B

1. 若 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $x+y+z=1$,求证:

$$\frac{x^4}{y(1-y^2)}+\frac{y^4}{z(1-z^2)}+\frac{z^4}{x(1-x^2)}\geqslant\frac{1}{8}.$$

2. 设 a,b,c 为正实数,且满足 $abc=1$.试证:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$ (IMO – 36 试题)

3. 设 a,b,c,d 满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的非负实数.试证:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$ (IMO – 31 预选题)

4. 设 $n\in\mathbf{N}$,求证:$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}\leqslant 2\sqrt[n]{n}$.

5. 若 $a_i>0(i=1,2,\cdots,m)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=p$,又 q,r 为大于零的常数,$n\in\mathbf{N}^+$,求证:

$$\sum_{i=1}^{m}(qa_i+\frac{r}{a_i})^n\geqslant\frac{(qp^2+m^2r)^n}{m^{n-1}\cdot p^n}.$$

6. 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,$m\in\mathbf{R}^+$,$a\geqslant0$,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=s\leqslant n$,则

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a)\geqslant[(\frac{s}{n})^m+\left(\frac{n}{s}\right)^m+a]^n.$$

第十七章　含参数的不等式问题

【基础知识】

在一定条件下，给出一个带参数的不等式，对使不等式恒成立的参数进行讨论，或求其最大(小)值，这是数学竞赛中比较活跃的题型之一.

确定使不等式恒成立的参数的取值范围或最值，一般要经过这样几个步骤：首先可估计或猜测该参数的上界或下界，再求出该参数的上界或下界，最后证明不等式对于这个上界或下界恒成立.处理这类问题，既要注意运用不等式的比较法、放缩法、反推法、归纳法等，以及善于灵活运用一些基本不等式，如算术 - 几何平均值不等式、柯西不等式、排序不等式等，还要善于利用函数的性质(单调性、最值性等)、利用所给不等式的结构特征或系数特征等来处理，等等.

【典型例题与基本方法】

例 1　求实数 a 的取值范围，使得对于任意实数 x 和任意 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 恒有 $(x+3+2\sin\theta\cdot\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}$.　　(1996 年全国高中联赛题)

解　利用二次函数的非负性，知其判别式 $\Delta\leqslant 0$，从而易知原不等式等价于

$$(3+2\sin\theta\cdot\cos\theta-a\sin\theta-a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{4} \quad ①$$

对任意 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 恒成立.

由 ① 可得 $a\geqslant\dfrac{3+2\sin\theta\cdot\cos\theta+\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}$，对任意 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，　②

或　$a\leqslant\dfrac{3+2\sin\theta\cdot\cos\theta-\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}$，对任意 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，　③

在条件 ② 下，由于 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，因此 $1\leqslant\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}$.

又因 $\dfrac{3+2\sin\theta\cdot\cos\theta+\dfrac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}=(\sin\theta+\cos\theta)+\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$,

而当 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ 时，$f(x)=x+\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{x}$ 为减函数，

所以 $a\geqslant\max\limits_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]}\dfrac{3+2\sin\theta\cdot\cos\theta+\dfrac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}=1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$.

在条件③下，由于 $\dfrac{3+2\sin\theta\cdot\cos\theta-\dfrac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}=(\sin\theta+\cos\theta)+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\geqslant$ $2\cdot\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{6}$，且等号在 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时成立，因此

$$\max_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{3+2\sin\theta\cdot\cos\theta-\dfrac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}=\sqrt{6}，从而有\ a\leqslant\sqrt{6}.$$

综上所述，可知 $a\geqslant\dfrac{7}{2}$ 或 $a\leqslant\sqrt{6}$ 即为所求的 a 的取值范围.

例 2 求最大的正数 λ，使得对任意实数 a,b，均有 $\lambda a^2b^2(a+b)^2\leqslant(a^2+ab+b^2)^3$.

（《中等数学》2003 年 4 期奥林匹克训练题）

解 当 $ab>0$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{a^2+ab+b^2}{3}&=\frac{a^2+b^2+4ab+3(a^2+b^2)}{12}\\&\geqslant\frac{a^2+b^2+4ab+6ab}{12}=\frac{a^2+10ab+b^2}{12}\\&=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(a+b)^2+ab+ab\right]\geqslant\sqrt[3]{\frac{a^2b^2(a+b)^2}{4}},\end{aligned}$$

当且仅当 $\begin{cases}a=b,\\ \dfrac{1}{4}(a+b)^2=ab,\end{cases}$ 即 $a=b$ 时等号成立；

当 $ab\leqslant0$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{a^2+ab+b^2}{3}&=\frac{(a+b)^2-ab}{3}\\&=\frac{1}{3}\left[(a+b)^2-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}ab\right]\\&\geqslant\sqrt[3]{(a+b)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)}=\sqrt[3]{\frac{a^2b^2(a+b)^2}{4}},\end{aligned}$$

当且仅当$(a+b)^2=-\frac{1}{2}ab$,即$a=-\frac{b}{2}$或$b=-\frac{a}{2}$时等号成立.

综上可得$\frac{27}{4}a^2b^2(a+b)^2\leqslant(a^2+ab+b^2)^3$,

等号分别在$a=b$和$a=-\frac{b}{2}$或$b=-\frac{a}{2}$时取得.

因此,所求的$\lambda=\frac{27}{4}$.

例3 设$a\leqslant b<c$是直角三角形的三边长,求最大常数M,使得

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{M}{a+b+c}$. （1991年中国国家集训队测试题）

解 令$I=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$,则

$$I=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}.$$

由于$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2$,

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=\frac{2a}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\geqslant2\sqrt{2}-\frac{a}{c},$$

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{2b}{c}+\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\geqslant2\sqrt{2}-\frac{b}{c},$$

所以$I\geqslant5+4\sqrt{2}-\frac{a+b}{c}$.

又$\frac{a+b}{c}\leqslant\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{c}=\sqrt{2}$,

从而$I\geqslant5+3\sqrt{2}$.

当$a=b=1,c=\sqrt{2}$时,$I=(2+\sqrt{2})(2+\frac{\sqrt{2}}{2})=5+3\sqrt{2}$,

于是$M=5+3\sqrt{2}$.

例4 求最大的常数c,使得对满足$x>0,y>0,x^2+y^2=1$的实数x,y恒有$x^6+y^6\geqslant cxy$.

解 当$x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,不等式也成立,则$c\leqslant\frac{x^6+y^6}{xy}=\frac{1}{2}$.

下证在$x>0,y>0,x^2+y^2=1$条件下,不等式$x^6+y^6\geqslant\frac{1}{2}xy$ (*)

恒成立.(*)式等价于

$(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2]\geqslant\frac{1}{2}xy$，即 $6(xy)^2+xy-2\leqslant 0$.

令 $\mu=xy$，因 $0<xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{1}{2}$，有 $0<\mu\leqslant\frac{1}{2}$.

设 $f(\mu)=6\mu^2+\mu-2, 0<\mu\leqslant\frac{1}{2}$，则 $f(\mu)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上是递增的，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 故在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上，有 $f(\mu)\leqslant 0$，从而，$6(xy)^2+xy-2\leqslant 0$.

综上所述，c 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

注 本题也可以这样来考虑：求出 $\frac{x^6+y^6}{xy}$ 的最小值，此最小值即为 c 的最大值. 即 $\frac{x^6+y^6}{xy}=\frac{(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2]}{xy}=\frac{1}{xy}-3xy$.

由 $0<xy\leqslant\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{xy}\geqslant 2, -3xy\geqslant-\frac{3}{2}$，于是，$\frac{x^6+y^6}{xy}\geqslant 2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，于是 $\frac{x^6+y^6}{xy}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$，从而 c 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

例 5 设 a,b,c 是直角三角形的三边长，且 $a\leqslant b<c$. 求最大常数 k，使得

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geqslant kabc$$

对所有直角三角形都成立，并确定何时等号成立.

解 当 $a=b$ 时，即 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形时，原不等式为

$$a^2(a+\sqrt{2}a)+a^2(\sqrt{2}a+a)+2a^2(a+a)\geqslant\sqrt{2}ka^3,$$

即 $k\leqslant 2+3\sqrt{2}$.

猜测 k 的最大值为 $2+3\sqrt{2}$. 下证：

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geqslant(2+3\sqrt{2})abc. \qquad (*)$$

不妨设 $c=1$，边 a 所对的角为 θ，则 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$.

令 $t=\sin\theta\cdot\cos\theta\leqslant\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{2}=\frac{1}{2}$，于是有

$$\begin{aligned}&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\\=&\sin^2\theta(\cos\theta+1)+\cos^2\theta(1+\sin\theta)+\sin\theta+\cos\theta\\=&1+(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta\cdot\cos\theta+1)\geqslant 1+2\sqrt{t}(t+1)\\\geqslant&1+2\sqrt{2}t(t+1)\left(\text{由 } t\leqslant\frac{1}{2}\text{，则}\sqrt{2}t\leqslant\sqrt{t}\right)\end{aligned}$$

$$= \left(2\sqrt{2}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\sqrt{2}t + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geqslant 2\sqrt{2}t + 2\sqrt{2}t + 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)t$$

$$= (2 + 3\sqrt{2})t = (2 + 3\sqrt{2})\sin\theta \cdot \cos\theta = (2 + 3\sqrt{2})abc.$$

从而(*)式得证,且当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时等号成立.

故欲求的 k 的最大值为 $2 + 3\sqrt{2}$.

注 (*)式也可以用另一个简捷的证法:

$$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$$

$$= c(a^2 + b^2) + a\left(\frac{c^2}{2} + b^2\right) + b\left(\frac{c^2}{2} + a^2\right) + \frac{c}{2} \cdot c(a + b)$$

$$\geqslant 2abc + \sqrt{2}abc + \sqrt{2}abc + \frac{c}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot 2\sqrt{ab} \geqslant (2 + 3\sqrt{2})abc.$$

【解题思维策略分析】

1. 先求出参数的值或上(下)界,再证明能达到此值或界

例 6 试求出所有的正整数 k,使得对任意满足不等式

$k(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2)$ 的正数 a,b,c,一定存在三边长分别为 a,b,c 的三角形. (2002 年全国女子奥林匹克题)

解 为了寻找出正整数 k,可先找出 k 的上、下量,再证明所找的 k 满足条件.

由 $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$,知 $k > 5$. 又取不能构成三角形的 a,b,c,如 $a = b = 1, c = 2$,则 $k(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) \leqslant 5(1^2 + 1^2 + 2^2)$,知 $k \leqslant 6$.从而知 $5 < 5 \leqslant 6$,即 $k = 6$.

下面证明:若正数 a,b,c 满足不等式 $6(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2)$. 则 a,b,c 必可以构成三角形.

不妨设 $0 < a \leqslant b \leqslant c$,则 a,b,c 构成三角形的充要条件是 $a + b > c$.

构造函数 $f(x) = 5x^2 - 6(a + b)x + 5a^2 + 5b - 6ab$,则 $f(c) < 0$.

而 $f(a + b) = 4(a - b)^2 \geqslant 0$,从而 $f(a + b) \geqslant 0 > f(c)$.

假设 $a + b \leqslant c$,则由 $a + b, c \in [\frac{3}{5}(a + b) + \infty)$,知 $f(a + b) \leqslant f(c)$,矛盾(因 $f(x)$ 在顶点右侧单调增).

故 $a + b > c$,即 a,b,c 必构成三角形.

注 也可不构造函数来证. 不妨设 $0 < a \leqslant b \leqslant c$,由

$6(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2)$ 得 $5c^2 - 6(a + b)c + (5a^2 - 5b^2 - 6ab) < 0$.

由 $\Delta = 64[ab - (a - b)^2] \leqslant 64ab \leqslant 16(a + b)^2$. 有 $c < \frac{6(a + b) + \sqrt{\Delta}}{10} \leqslant$

$\frac{6(a+b)+4(a+b)}{10}=a+b.$

例 7 确定最小自然数 k,使得对任意的 $a\in[0,1]$ 及任意的 $n\in\mathbf{N}$,有

$$a^k(1-a)^n<\frac{1}{(n+1)^3}.$$

解 设法消去一个参数 a,然后求 k 的最小值.由算术 - 几何平均值不等式有

$$\sqrt[n+k]{a^k\left[\frac{k}{n}(1-a)\right]^n}\leqslant\frac{ka+n\left[\frac{k}{n}(1-a)\right]}{n+k}=\frac{k}{n+k}.$$

于是,$a^k(1-a)^n\leqslant\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}$,

当且仅当 $a=\frac{k(1-a)}{n}\left(\text{即 } a=\frac{k}{n+k}\right)$时等号成立.

这就是说,当 $a=\frac{k}{n+k}(a\in[0,1])$ 时,$a^k(1-a)^n$ 取得最大值.于是,可把问题改成:确定最小自然数 k,使得对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 有

$$\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}<\frac{1}{(n+1)^3}. \qquad (*)$$

易验证:当数对$(k,n)=(1,1),(2,1),(3,3)$时,不等式①不成立,所以,要对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立,只能 $k\geqslant4$.

下证 $k=4$ 时,$(*)$式成立,即对一切 $n\in\mathbf{N}$ 有 $4^4n^n(n+1)^3<(n+4)^{n+4}$.

事实上,当 $n=1,2,3$ 时可直接验证.

当 $n\geqslant4$ 时有

$$\sqrt[n+4]{4^4n^n(n+1)^3}=\sqrt[n+4]{16\times(2n)(2n)(2n)(2n)n^{n-4}(n+1)^3}$$
$$\leqslant\frac{16+8n+(n-4)n+3(n+1)}{n+4}=\frac{n^2+7n+19}{n+4}<\frac{n^2+8n+16}{n+4}=n+4,$$

即 $4^4n^n(n+1)^3<(n+4)^{n+4}$.

综上,求得 k 的最小值为 4.

例 8 求最小的实数 a,使得对于任意其和为 1 的非负实数 x,y,z 都有 $a(x^2+y^2+z^2)+xyz\geqslant\frac{9}{3}+\frac{1}{27}$. (1991 年国家集训队测试题)

解 令 $I=a(x^2+y^2+z^2)+xyz$.不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$,令 $x=\frac{1}{3}+\delta_1,y=\frac{1}{3}+\delta_2,z=\frac{1}{3}+\delta_3$,则 $-\frac{1}{3}\leqslant\delta_1\leqslant0,0\leqslant\delta_3\leqslant\frac{2}{3},\delta_1+\delta_2+\delta_3=0.$ $(*)$

用新变量 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 表示 I,则

$$I=\frac{a}{3}+\frac{1}{27}+a(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)+\frac{1}{3}(\delta_1\delta_2+\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1)+\delta_1\delta_2\delta_3.$$

由(*)可知 $\delta_1\delta_2+\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1=-\frac{1}{2}(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)$,从而

$$I=\frac{a}{3}+\frac{1}{27}+\left(a-\frac{1}{6}\right)(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)+\delta_1\delta_2\delta_3.$$

若 $a<\frac{2}{9}$,取 $x=0,y=z=\frac{1}{2}$,即 $\delta_1=-\frac{1}{3},\delta_2=\delta_3=\frac{1}{6}$,由于

$$\left(a-\frac{1}{6}\right)(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)+\delta_1\delta_2\delta_3<\frac{1}{18}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{36}\right)-\frac{1}{3\cdot 36}=0,$$

所以此时 $I<\frac{a}{3}+\frac{1}{27}$.

于是所求之 $a\geqslant\frac{2}{9}$.当 $a\geqslant\frac{2}{9}$ 时,若 $\delta_2\leqslant 0$,则由(*)可知 $\delta_1\delta_2\delta_3\geqslant 0$,由此立即可得 $I\geqslant\frac{a}{3}+\frac{1}{27}$.

设 $\delta_2\geqslant 0$,由 $\delta_1=-(\delta_2+\delta_3)$,则

$$\begin{aligned}I&=\frac{a}{3}+\frac{1}{27}+\left(a-\frac{1}{6}\right)(2\delta_2^2+2\delta_3^2+2\delta_2\delta_3)-(\delta_2+\delta_3)\delta_2\delta_3\\&=\frac{a}{3}+\frac{1}{27}+2\left(a-\frac{1}{6}\right)(\delta_2-\delta_3)^2+\left[6\left(a-\frac{1}{6}\right)-(\delta_2+\delta_3)\right]\delta_2\delta_3.\end{aligned}$$

由 $a\geqslant\frac{2}{9}$ 可得 $a-\frac{1}{6}\geqslant\frac{1}{18}$,又从(*)得 $0\leqslant\delta_2+\delta_3=-\delta_1\leqslant\frac{1}{3}$,所以 $I\geqslant\frac{a}{3}+\frac{1}{27}$.

综上可知所求最小的实数 $a=\frac{2}{9}$.

例9 已知自然数 $n\geqslant 2$,求最小正数 λ,使得对任意正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,及$[0,\frac{1}{2}]$中任意 n 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,只要 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1$,就有 $a_1a_2\cdots a_n\leqslant\lambda(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$.

解 由柯西不等式,得

$$1=\sum_{i=1}^n b_i=\sum_{i=1}^n\frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{a_i}}\sqrt{a_ib_i}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n\frac{b_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^{\frac{1}{2}},则\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{b_i}{a_i}.$$

记 $M=a_1a_2\cdots a_n,A_i=\frac{M}{a_i},i=1,2,\cdots,n$,则 $\frac{M}{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}\leqslant\sum\limits_{i=1}^n b_iA_i$.

由排序不等式,不妨设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n,A_1\geqslant A_2\geqslant\cdots\geqslant A_n$.

从而有 $\sum_{i=1}^{n} b_iA_i \leqslant b_1A_1 + (1-b_1)A_2$,

由于 $0 \leqslant b_1 \leqslant \frac{1}{2}, A_1 \geqslant A_2$,所以 $\sum_{i=1}^{n} b_iA_i \leqslant \frac{1}{2}(A_1+A_2) = \frac{1}{2}(a_1+a_2)a_3\cdots a_n$.

再由均值不等式,注意到 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 可得 $\sum_{i=1}^{n} b_iA_i \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

于是所求之 $\lambda \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

另一方面,当 $a_1 = a_2 = \frac{1}{2(n-1)}, a_3 = \cdots = a_n = \frac{1}{n-1}, b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \cdots = b_n = 0$ 时,$a_1a_2\cdots a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$,所以 $\lambda \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

综上所述得 $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

例 10 求最小正数 λ,使得对于任意三角形的三边长 a, b, c,只需 $a \geqslant \frac{b+c}{3}$,就有

$$ac + bc - c^2 \leqslant \lambda(a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab - 4bc).$$ (1993 年中国国家队测验题)

解 易知

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab - 4bc &= (a+b-c)^2 + 2c^2 + 2ac - 2bc \\ &= (a+b-c)^2 + 2c(a+c-b). \end{aligned}$$

令 $I = \frac{(a+b-c)^2 + 2c(a+c-b)}{2c(a+b-c)} = \frac{a+b-c}{2c} + \frac{a+c-b}{a+b-c}$.

由于 $a \geqslant \frac{1}{3}(b+c)$,所以 $a \geqslant \frac{1}{4}(a+b-c) + \frac{c}{2}$,于是

$a + c - b = 2a - (a+b-c) \geqslant -\frac{1}{2}(a+b-c) + c$.由此可知

$$\begin{aligned} I &\geqslant \frac{a+b-c}{2c} - \frac{\frac{1}{2}(a+b-c)}{a+b-c} + \frac{c}{a+b-c} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{a+b-c}{2c} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant -\frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

即 $\frac{ac+bc-c^2}{a^2+b^2+3c^2+2ab-4bc} = \frac{1}{2I} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

从而所求之 $\lambda \leqslant \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

另一方面，当 $a=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}, b=\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}, c=1$，则

$ac+bc-c^2=\sqrt{2}, a^2+b^2+3c^2+2ab-4bc=4-\sqrt{2}$,

所以 $$\frac{1}{2I}=\frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(4+\sqrt{2})}{14}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}.$$

于是 $\lambda \geqslant \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

综上可得 $\lambda=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

2. 注意综合运用各种方法与技巧

例 11 已给两个大于 1 的自然数 n 和 m，求所有的自然 l，使得对任意正数 a_1, $a_2, \cdots, a_n$，都有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)<m^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k},$$

其中 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$.　　　　（1992 年中国国家队选拔试题）

解 易知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{s_k}\left(\frac{l}{2}+k\right)^2-\frac{k^2}{s_k}\right]$$

$$=\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\frac{1}{s_1}-\frac{n^2}{s_n}+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{s_k}\left(\frac{l}{2}+k\right)^2-\frac{(k-1)^2}{s_{k-1}}\right].$$

由于当 $k=2,\cdots,n$ 时，有

$$\frac{1}{s_k}\left(\frac{l}{2}+k\right)^2-\frac{(k-1)^2}{s_{k-1}}$$

$$=\frac{1}{s_ks_{k-1}}\left[\left(\frac{l}{2}+1\right)^2s_{k-1}+(l+2)(k-1)s_{k-1}+(k-1)^2(s_{k-1}-s_k)\right]$$

$$=\frac{1}{s_ks_{k-1}}\left[\left(\frac{l}{2}+1\right)^2s_{k-1}-\left(\sqrt{a_k}(k-1)-\left(\frac{l}{2}+1\right)\frac{s_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\right)^2+\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\frac{s_{k-1}^2}{a_k}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{s_ks_{k-1}}\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\left(s_{k-1}+\frac{s_{k-1}^2}{a_k}\right)=\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\frac{1}{a_k},$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)\leqslant\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{s_n}<\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$.

显然 $\frac{l}{2}+1\leqslant m$，即 $l\leqslant 2(m-1)$ 满足所要之条件.

另一方面，当 $l>2(m-1)$，即 $l\geqslant 2m-1$ 时，可以证明存在正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使

得所要求之不等式不成立.事实上,任意给定 $a_1>0$,令

$$a_k=\frac{l+2}{2(k-1)}s_{k-1},k=2,3,\cdots,n.$$

由前段证明可知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k}\left(lk+\frac{1}{4}l^2\right)=\left(\frac{l}{2}+1\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{s_n}=\left[\left(\frac{l}{2}+1\right)^2-1\right]\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{s_n}.$$

由 $l\geqslant 2m-1$ 可推出

$$\left(\frac{l}{2}+1\right)^2-1\geqslant\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-1=m^2+m+\frac{1}{4}-1>m^2.$$

利用柯西不等式,得

$$n^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)=s_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k},\text{即}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{n^2}{s_k}\geqslant 0.$$

从而 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k}(lk+\frac{1}{4}l^2)>m^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$.

于是,$1,2,\cdots,2(m-1)$ 是满足要求的所有自然数 l.

例 12 设 n 是一个固定的整数,$n\geqslant 2$.

(1) 确定最小的常数 c,使不等式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leqslant c\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^4 \qquad (*)$$

对所有的非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都成立;

(2) 对于这个常数 c,确定等号成立的充要条件. (IMO-40 试题)

解 (1) 当非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为 0 时,记

$$x=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2},y=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k(x_i+x_j+x_k)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^4}.$$

因 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)$

$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\left[\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j-\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i,j)}}^{n}x_k^2\right]$$

$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2-2\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\right)^2-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k(x_i+x_j+x_k),$$

从而(*)式 $\Leftrightarrow c\geqslant -2x^2+x-y$.

又 $-2x^2+x-y=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}-y\leqslant\frac{1}{8}$,

其等号成立的充要条件是 $x=\frac{1}{4}$ 且 $y=0$,

于是 $c\geqslant\frac{1}{8}$, $c_{\min}=\frac{1}{8}$, 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时也适合.

(2) 当 $c=\frac{1}{8}$ 时, $x=\frac{1}{4}$ 且 $y=0$ 的充要条件是

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j, \text{且} \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k(x_i+x_j+x_k)=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i^2=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j, \text{且} \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k=0.$$

又 $\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k=0\Leftrightarrow x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任意三项之积为 0, 即其中最多有两项 x_i、x_j 不为 0, 此时 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\Leftrightarrow x_i^2+x_j^2+2x_ix_j\Leftrightarrow x_i=x_j$.

故 $x=\frac{1}{4}$ 且 $y=0$ 的充要条件是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有两项相等(可以是 0), 其余全为 0.

【模拟实战】

习题 A

1. 求实数 a 的取值范围, 使不等式

$$\sin2\theta-(2\sqrt{2}+\sqrt{2}a)\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2\sqrt{2}}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}>-3-2a,$$

对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立.

2. 某个在 Ox 轴的正方向运动的点的横坐标为 $x(t)=5(t+1)^2+\frac{a}{(t+1)^5}$, 其中 a 是一个正的常数. 求满足对所有 $t\geqslant0$, $x(t)\geqslant24$ 时, a 的最小值.

3. 设 $\lambda>0$, 求最大的常数 $c=c(\lambda)$, 使得对所有非负实数 x,y, 均有 $x^2+y^2+\lambda xy\geqslant c(x+y)^2$.

4. 求最大的常数 k, 使得对于 $[0,1]$ 中的一切实数 a,b,c,d, 都有不等式 $a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant k(a^3+b^3+c^3+d^3)$.

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是给定的不全为 0 的实数. 如果实数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 使得不等式

$$\sum_{k=1}^{n} r_k(x_k - a_k) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

对任何实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都成立，求 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的值. (CMO－3试题)

习题 B

1. 求自然数 a, b, c，使得对任意 $n \in \mathbf{N}, n > 2$，有

$b - \dfrac{c}{(n-2)!} < \dfrac{2^3 - a}{2!} + \dfrac{3^3 - a}{3!} + \cdots + \dfrac{n^3 - a}{n!} < b$.（1996年世界城市际竞赛题）

2. 求使下列两式

$$\begin{cases} 2b \cdot \cos 2(x-y) + 8b^2 \cdot \cos(x-y) + 8b^2(b+1) + 5b < 0 & ① \\ x^2 + y^2 + 1 > 2bx + 2y + b - b^2 & ② \end{cases}$$

对任何实数 x, y 都成立的一切 b 值.

3. 求最小的正数 α，使得存在正数 β，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，成立不等式

$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leqslant 2 - \dfrac{x^\alpha}{\beta}$.

4. 已给大于1的自然数 n，设 a, b, c, d 是自然数且满足

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} < 1, a + c \leqslant n$，求 $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ 的最大值. （1993年中国国家队选拔试题）

5. 若关于 x 的不等式 $\dfrac{x^2 + (2a^2+2)x - a^2 + 4a - 7}{x^2 + (a^2 + 4a - 5)x - a^2 + 4a - 7} < 0$ 的解集是一些区间的并集，且这些区间长度的和小于4，求实数 a 的取值范围.

（2001年上海市高中竞赛题）

6. 设 a, b, c 为正数，记 d 为 $(a-b)^2$、$(b-c)^2$、$(c-a)^2$ 中的最小值.

(1) 求证：存在 $\lambda(0 < \lambda < 1)$，使得 $d \leqslant \lambda(a^2 + b^2 + c^2)$； ①

(2) 求出使不等式 ① 成立的最小正数 λ，并给予证明. （2006年江苏省竞赛题）

7. 给定正整数 $n(n \geqslant 2)$，求最大的实数 λ，使得不等式 $a_n^2 \geqslant \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + 2a_n$，对任何满足 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均成立.

（2003年全国女子奥林匹克题）

8. 求最小的实数 m，使得对于满足 $a + b + c = 1$ 的任意正整数 a, b, c，都有 $m(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant 6(a^2 + b^2 + c^2) + 1$. （2006年中国东南地区奥林匹克题）

9. 设 $n(n \geqslant 2)$ 是一个固定的整数，

(1) 确定最小常数 c，使得不等式 $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant c\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^4$ 对所有的非负实数

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都成立；

(2) 对于这个常数 c，确定等号成立的充要条件 . (IMO－40 试题)

10. 求最小的实数 M，使得对所有的实数 a, b, c，有

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

(IMO－47 试题)

第五篇 复数问题

第十八章 复数及运算的几何意义

【基础知识】

1. 复数的概念

复数有四种表示形式:

代数形式:$z = a + bi, a, b \in \mathbf{R}$;

几何形式:复数 $z = a + bi(a, b \in \mathbf{R})$ 与复平面内的点 $Z(a, b)$ 或由原点发出的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应;

三角形式:$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r \geqslant 0, \theta \in \mathbf{R}$;

指数形式:$z = re^{i\theta}, r \geqslant 0, \theta \geqslant\in \mathbf{R}$.

其中,$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,角 θ 为复数 z 的辐角.这就是著名的欧拉(Euler)公式.

2. 复数的运算法则

加、减法:$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$;

乘法:$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$,

$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$;

除法:$\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i(c + di \neq 0)$,

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)];$$

乘方：$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta),n\in\mathbf{N}^+$；

开方：复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根是 $\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}),k=0,1,\cdots,n-1$.

3. 复数的模与共轭复数

共轭复数的性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq0)$；

(3) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$，$\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$；

(4) z 是实数的充要条件是 $\overline{z}=z$，z 是纯虚数的充要条件是 $\overline{z}=-z$ 且 $z\neq0$；

(5) $\overline{\overline{z}}=z$；

(6) $\overline{z}\cdot=|z|^2=|\overline{z}|^2$.

复数的模的性质：

(1) $\max\{|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|\}\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$；

(2) $|z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\cdots\cdot|z_n|$；

(3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq0)$；

(4) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，当 z_1 或 z_2 中有一个为零时，上述不等式等号成立；当 $z_1z_2\neq0$ 时，当且仅当 $|\arg z_1-\arg z_2|=\pi$ 时，或者与复数 z_1,z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 反向时，左边取等号；当且仅当 $\arg z_1=\arg z_2$ 时，或者与复数 z_1,z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 同向时，右边取等号；

类似地，还有 $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

这两个不等式称为三角不等式；

(5) $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$，与复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2},\cdots,\overrightarrow{OZ_n}$ 同向时取等号；

(6) 若 z 是虚数，$r>0$，则 $|z|=r$ 的充要条件是 $\frac{z-r}{z+r}$ 为纯虚数.

特别地，若 z 是虚数，则 $|z|=1$ 的充要条件是 $\frac{z-1}{z+1}$ 为纯虚数.

4. 两个复数相等的充要条件是它们的实部、虚部对应相等，或者它们的模与辐角主值对应相等(非零复数)

利用复数相等的充要条件，可以把复数问题转化为实数问题.

复数的模也是将复数问题实数化的有效方法之一.

5. 复数运算的几何意义

复数的几何形式,使得复数本身及其运算有了几何意义.

复数的加法可以按照向量加法的平行四边形法则来进行;两个数复的差 $z_1 - z_2$ 与连结两个向量终点并指向被减数的向量对应.

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$,则两个复数的乘积 $z_1 z_2$ 对应的向量就是把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按逆时针方向旋转一个角 θ_2(若 $\theta_2 < 0$,则把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按顺时针方向旋转一个角 $|\theta_2|$),再把它的模变为原来的 r_2 倍.两个复数相除亦有类似的几何性质.

设复数 z_1, z_2, z_3 在复平面内的对应点分别为 Z_1, Z_2, Z_3,由复数及其运算的几何意义,我们容易得到以下结论:

(1) $|z_1 - z_2|$ 表示两点 Z_1, Z_2 间的距离.

(2) 满足 $|z - z_1| = |z - z_2|$ 的复数 z 对应的点的轨迹是线段 Z_1Z_2 的垂直平分线.

(3) 满足 $|z - z_1| = r(r > 0)$ 的复数 z 对应的点的轨迹是以 Z_1 为圆心,r 为半径的圆.

(4) 满足 $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a(0 < |Z_1Z_2| < 2a)$ 的复数 z 对应的点的轨迹是以点 Z_1, Z_2 为焦点,长轴长为 $2a$ 的椭圆.

(5) 满足 $\big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = 2a(|Z_1Z_2| > 2a > 0)$ 的复数 z 对应的点的轨迹是以点 Z_1, Z_2 为焦点,实轴长为 $2a$ 的双曲线.

(6) 满足 $\arg z = \theta(\theta \in [0, 2\pi))$ 的复数 z 对应的点的轨迹是以原点为端点的一条射线(以 x 正半轴为始边,此射线为终边的最小非负角为 θ).

(7) 复数方程的解是方程组中每一方程中的 z 对应的点的轨迹的交点所对应的复数,等等.

利用复数的几何意义,给某些数量关系以几何解释,适当将数量关系问题转化成图形性质问题,通过图形求解.

【典型例题与基本方法】

例 1 设复数 α, β 满足 $|\alpha| = |\beta| = 1$, $\alpha + \beta + 1 = 0$.求证:α, β 都是 1 立方根.

分析 复数表示形式的多样化为我们求解复数问题提供了多角度的思维方式.

证法 1 运用代数形式.设 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$,则由 $|\alpha| = |\beta| = 1$ 得 $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. ①

再由 $\alpha + \beta = -1$,根据复数相等的充要条件得 $a + c = -1$, $b + d = 0$. ②

将上述①,②中四式联立,解得 $a=c=-\frac{1}{2}, b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, d=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 故 $\alpha^3=\beta^3=1$.

证法 2 运用三角形式.由 $|\alpha|=|\beta|=1$,可设 $\alpha=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta, \beta=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi(\theta,\varphi\in\mathbf{R})$.再由 $\alpha+\beta=-1$,得 $\begin{cases}\cos\theta+\cos\varphi=-1,\\ \sin\theta+\sin\varphi=0.\end{cases}$

由此求得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}, \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,从而 $\cos\varphi=-\frac{1}{2}, \sin\varphi=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$.所以 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $\beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

证法 3 考虑几何意义.由 $\alpha+\beta=-1$ 及 $|\alpha|=|\beta|=1$,可设 $\overrightarrow{OA}=\alpha, \overrightarrow{OB}=\beta, \overrightarrow{OC}=-1$,如图 18-1.根据复数加法的几何意义,可知四边形 $OACB$ 是平行四边形,且各边相等,从而 $\angle xOA=120°, \angle xOB=120°$.因此 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $\beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

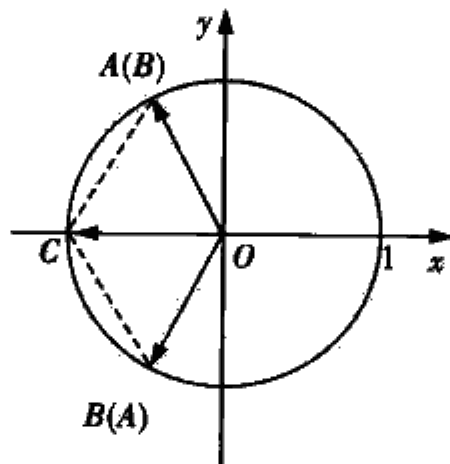


图 18-1

证法 4 运用共轭复数的运算技巧.由 $\alpha+\beta=-1$,知 $|\alpha+\beta|^2=1$,即 $(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=1$.展开上式,并利用 $\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2=1, \beta\bar{\beta}=|\beta|^2=1$ 进行化简,得 $\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+1=0$.将 $\beta=-\alpha-1, \bar{\beta}=-\bar{\alpha}-1$ 代入上式并化简,得 $\alpha+\bar{\alpha}+1=0$.将上式两边同乘以 α,得 $\alpha^2+\alpha+1=0$.所以 $\alpha^3=1$.同理 $\beta^3=1$.

例 2 设 z 是虚数,$\omega=z+\frac{1}{z}$ 是实数,且 $-1<\omega<2$.

(1) 求 $|z|$ 的值及 z 的实部的取值范围.

(2) 设 $u=\frac{1-z}{1+z}$,求证 u 是纯虚数.

解 (1) z 是虚数,ω 是实数,从而 $z+\frac{1}{z}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$,

则 $(z-\bar{z})(1-\frac{1}{|z|^2})=0$,故 $|z|=1$.

又 $-1<\omega<2$,

则 $-1<\omega=z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z<2$,

即 $-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}z<1$.

(2) 由(1)知，$|z|=1\Leftrightarrow\frac{z-1}{z+1}$ 是纯虚数 $\Leftrightarrow -\frac{z-1}{z+1}=\frac{1-z}{1+z}$ 是纯虚数.

例 3 设 z_1 和 z_2 是非零复数且 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$,求证$(\frac{z_1}{z_2})^2$ 必为实数.

证明 因 $z_1\neq 0,z_2\neq 0$,且 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$,则 $|\frac{z_2}{z_1}-1|=|\frac{z_2}{z_1}+1|$.设 $A=(\frac{z_2}{z_1}-1)/(\frac{z_2}{z_1}+1)$,则 $|A|=1$ 且 $A\neq\pm 1\Leftrightarrow\frac{A-1}{A+1}=\cdots=-\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数 $\Leftrightarrow$ $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数.故$(\frac{z_1}{z_2})^2$ 必是实数.

例 4 给定实数 a,b,c.已知复数 z_1,z_2,z_3 满足：

$$\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1,\\ \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1.\end{cases}$$

求 $|az_1+bz_2+cz_3|$ 的值. （1999 年全国高中联赛题）

解法 1 记 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.设$\frac{z_1}{z_2}=e^{i\theta},\frac{z_2}{z_3}=e^{i\varphi}$,则$\frac{z_3}{z_1}=e^{-i(\theta+\varphi)}$.

由题设可得 $e^{i\theta}+e^{i\varphi}+e^{-i(\theta+\varphi)}=1$.

两边取虚部，有

$\sin\theta+\sin\varphi-\sin(\theta+\varphi)=0$,

$2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta+\varphi}{2}=0$,、

$\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}=0$.

因此得 $\theta=2k\pi$ 或 $\varphi=2k\pi$ 或 $\theta+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

故有 $z_1=z_2$ 或 $z_2=z_3$ 或 $z_3=z_1$.

如果 $z_1=z_2$,代入已知等式得

$1+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1,(\frac{z_1}{z_3})^2=-1,\frac{z_1}{z_3}=\pm i$.

于是，我们有

$|az_1+bz_2+cz_3|=|z_1|\cdot|a+b\pm ci|=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

类似地，如果 $z_2=z_3$,则

$|az_1+bz_2+cz_3|=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$;

如果 $z_3=z_1$,则

$|az_1+bz_2+cz_3|=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$.

所求的值为$\sqrt{(a+b)^2+c^2}$或$\sqrt{a^2+(b+c)^2}$或$\sqrt{(c+a)^2+b^2}$.

解法 2 由$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1$得 $z_1^2z_3+z_2^2z_1+z_3^2z_2=z_1z_2z_3$, ①

及$\overline{\frac{z_1}{z_2}}+\overline{\frac{z_2}{z_3}}+\overline{\frac{z_3}{z_1}}=1$. ②

由于 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$,所以$\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$,$\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$,$\overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$,

于是②式可化为$\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}=1$,

即 $z_2^2z_3+z_3^2z_1+z_1^2z_2=z_1z_2z_3$. ③

由①、③,得 $z_1^2z_3+z_2^2z_1+z_3^2z_2=z_2^2z_3+z_3^2z_1+z_1^2z_2$,

即 $(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)=0$,所以 $z_1=z_2$ 或 $z_2=z_3$ 或 $z_3=z_1$.

以下同解法 1.

例 5 设复数 z 满足$\left|\arg\left(\frac{z+1}{z+2}\right)\right|=\frac{\pi}{6}$,求 $\arg z$ 的取值范围.

解 令 $\arg\left(\frac{z+1}{z+2}\right)=\theta$,则 $z+1=\lambda(z+2)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,$\lambda\geqslant0$.

如图 18-2,设 $A(-2,0)$,$B(-1,0)$.则$\overrightarrow{BZ}=\lambda\cdot\overrightarrow{AZ}\cdot(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时,向量$\overrightarrow{AZ}$逆时针旋转θ角后与$\overrightarrow{BZ}$平行,故

$$\angle AZB=\frac{\pi}{6}.$$

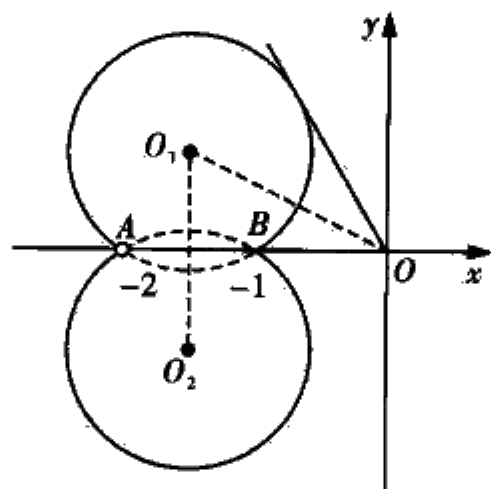


图 18-2

从而 z 的轨迹的一部分是以 $O_1\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$为圆心,半径为 1 的圆的一段优弧$\overset{\frown}{AB}$(含 B,不含 A),当 $\theta=-\frac{\pi}{6}$ 时,由对称性知,z 的轨迹的另一部分是以$O_2\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$为圆心,半径为 1 的圆的一段优弧$\overset{\frown}{AB}$(含 B,不含 A).其中易计算得

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3},\alpha=\frac{\pi}{6};$$

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3},\beta=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以 $\arg z$ 的取值范围是

$$\left(\frac{5\pi}{6}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{7\pi}{6}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

注 一般地,辐角方程 $\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=\theta$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{Z_1Z}=\lambda\cdot\overrightarrow{Z_2Z}\cdot(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\lambda>0.$

表示的轨迹是以 Z_1Z_2 为弦所对的一段圆弧.

例 6 n 是正整数,$a_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为复数,且对集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任一非空子集 I,均有

$\left|\prod\limits_{j\in I}(1+a_j)-1\right|\leqslant\frac{1}{2}$.证明:$\sum\limits_{i=1}^{n}|a_j|\leqslant3.$ (2005 年国家队选拔赛题)

证明 设 $1+a_j=r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}$, $|\theta_j|\leqslant\pi,j=1,2,\cdots,n$,则题设条件变为

$$\left|\prod_{j\in I}r_j\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{j\in I}\theta_j}-1\right|\leqslant\frac{1}{2}.\qquad①$$

先证如下引理:设 r、θ 为实数,$r>0$, $|\theta|\leqslant\pi$, $|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|\leqslant\frac{1}{2}$,则$\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant\frac{3}{2}$, $|\theta|\leqslant\frac{\pi}{6}$, $|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|\leqslant|r-1|+|\theta|$.

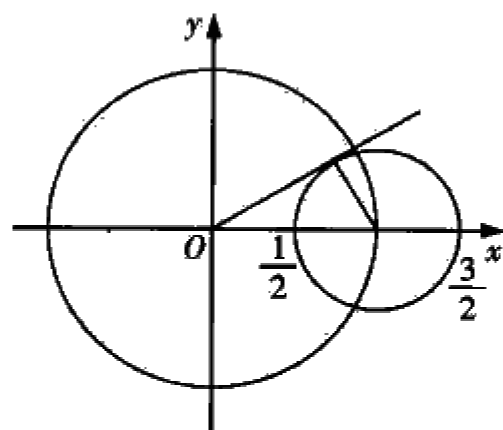


图 18 - 3

引理的证明:如图 18 - 3,由复数的几何意义,有

$$\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant\frac{3}{2},|\theta|\leqslant\frac{\pi}{6}.$$

又由

$$\begin{aligned}|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|&=|r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)-1|\\&=|(r-1)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+[(\cos\theta-1)+\mathrm{i}\sin\theta]|\\&\leqslant|r-1|+\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}\\&=|r-1|+\sqrt{2(1-\cos\theta)}\\&=|r-1|+2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\\&\leqslant|r-1|+|\theta|,\end{aligned}$$

得引理的另一部分.

由 ① 及引理,对 $|I|$ 用数学归纳法知

$$\frac{1}{2}\leqslant\prod_{j\in I}r_j\leqslant\frac{3}{2},\ \left|\sum_{j\in I}\theta_j\right|\leqslant\frac{\pi}{6},\qquad ②$$

由 ① 及引理知

$$|a_j|=|r_j e^{i\theta_j}-1|\leqslant|r_j-1|+|\theta_j|,$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|a_j|&\leqslant\sum_{j=1}^{n}|r_j-1|+\sum_{j=1}^{n}|\theta_j|\\&=\sum_{r_j\geqslant1}|r_j-1|+\sum_{r_j<1}|r_j-1|+\sum_{\theta_j\geqslant0}|\theta_j|+\sum_{\theta_j<0}|\theta_j|.\end{aligned}$$

由 ② 知

$$\sum_{r_j\geqslant1}|r_j-1|=\sum_{r_j\geqslant1}(r_j-1)\leqslant\prod_{r_j\geqslant1}(1+r_j-1)-1\leqslant\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2},$$

$$\sum_{r_j<1}|r_j-1|=\sum_{r_j<1}(1-r_j)\leqslant\prod_{r_j<1}(1-(1-r_j))^{-1}-1\leqslant2-1=1,$$

$$\sum_{j=1}^{n}|\theta_j|=\sum_{\theta_j\geqslant0}\theta_j-\sum_{\theta_j<0}\theta_j\leqslant\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

综上,有

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j|\leqslant\frac{1}{2}+1+\frac{\pi}{3}<3.$$

【解题思维策略分析】

1. 灵活运用复数的基础知识解题

例 7 试问:当且仅当实数 $x_0,x_1,\cdots,x_n(n\geqslant2)$ 满足什么条件时,存在实数 $y_0,y_1,\cdots,y_n$,使得 $z_0^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$ ①

成立.其中 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$,i 为虚数单位,$k=0,1,2,\cdots,n$.证明你的结论.

(1997 年全国高中联赛题)

解 易知 ① 等价于

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k^2-x_0^2=\sum_{k=1}^{n}y_k^2-y_0^2,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_ky_k=x_0y_0.\end{cases}\qquad ②$$

若存在实数 $y_0,y_1,\cdots,y_n$ 使 ② 成立,则 $x_0^2y_0^2=\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2$.

由柯西不等式可得 $x_0^2y_0^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{n}x_k^2)(\sum_{k=1}^{n}y_k^2)$. ③

如果 $x_0^2 > \sum_{k=1}^{n}x_k^2$,则由 ② 可得 $y_0^2 > \sum_{k=1}^{n}y_k^2$,

从而 $x_0^2y_0^2 > (\sum_{k=1}^{n}x_k^2)\cdot(\sum_{k=1}^{n}y_k^2)$,

此与 ③ 矛盾.于是得 $x_0^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}x_k^2$. ④

当 $x_0 = \sum_{k=1}^{n}x_k^2$ 时,我们可取 $y_k = x_k, k = 0,1,2,\cdots,n$.显然能使 ② 成立.

当 $x_0 < \sum_{k=1}^{n}x_k^2$ 时,我们记 $a = \sum_{k=1}^{n}x_k^2 - x_0 > 0$,

显然 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零,不妨设 $x_n \neq 0$.我们取

$$\begin{cases} y_k = 0, k = 0,1,2,\cdots,n-2, \\ y_{n-1} = \dfrac{ax_n}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}}, \\ y_n = \dfrac{-ax_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}}. \end{cases}$$

显然,也能使 ② 成立.

综上所述,所求的条件为 $x_0^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}x_k^2$.

例 8 设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为复数,满足 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| = 1$.求证:上述 n 个复数中,必存在若干复数,它们的和的模不小于$\frac{1}{6}$. (1986 年 CMO 试题)

证明 对任一复数 $z = a + bi(a,b \in \mathbf{R})$,有

$|z| \leqslant |a| + |b|$.

从而 $1 = \sum_{i=1}^{n}|z_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_i| + \sum_{i=1}^{n}|b_i|$. ①

又 $|\sum_{i=1}^{n}z_i| = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n}b_i)^2} \geqslant \max\{|\sum_{i=1}^{n}a_i|, |\sum_{i=1}^{n}b_i|\}$. ②

比较 ①、②,为了便于沟通,可将 ① 式右边改写为

$$\sum_{a_i\geqslant 0}|a_i| + \sum_{a_i<0}|a_i| + \sum_{b_i\geqslant 0}|b_i| + \sum_{b_i<0}|b_i|$$

$$= |\sum_{a_i\geqslant 0}a_i| + |\sum_{a_i<0}a_i| + |\sum_{b_i\geqslant 0}b_i| + |\sum_{b_i<0}b_i|.$$

于是上述四项中，必有一项不小于$\frac{1}{4}$.不妨设$\left|\sum_{a_i\geqslant 0}a_i\right|\geqslant\frac{1}{4}$.

从而$\left|\sum_{a_i\geqslant 0}z_i\right|\geqslant\left|\sum_{a_i\geqslant 0}a_i\right|\geqslant\frac{1}{4}>\frac{1}{6}$.

注 此题也可以从另一角度出发思考问题.①

$$\left|\sum_{i=1}^{n}z_i\right|=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}\geqslant\max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|,\left|\sum_{i=1}^{n}b_i\right|\right\}.$$

不妨设$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\geqslant\left|\sum_{i=1}^{n}b_i\right|$，于是$\left|\sum_{i=1}^{n}z_i\right|\geqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|$.

考虑到直接应用上式可能缩小过头，为了弥补这一点，得到如下的想法：

用直线$y=x$及$y=-x$把复平面分成四个区域，由于

$$|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1,$$

所以在上述四个区域中，至少有一个区域中的所有复数的模的和不小于$\frac{1}{4}$.为了简化问题，不妨设此区域为包含x轴正方向的区域(由于是取模，若不是此区域可进行旋转).

设这些复数为z_{i_t}，且$z_{i_t}=a_t+\mathrm{i}b_t(a_t>0)$，同时

$$\sum_{t=1}^{k}|z_{i_t}|\geqslant\frac{1}{4}(1\leqslant k\leqslant n,k\in\mathbf{N}),$$

并且

$$\left|\sum_{t=1}^{k}z_{i_t}\right|=\left[\left(\sum_{t=1}^{k}a_t\right)^2+\left(\sum_{t=1}^{k}b_t\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant\left|\sum_{t=1}^{k}a_t\right|=\sum_{t=1}^{k}a_t\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{t=1}^{k}\sqrt{a_t^2+b_t^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{t=1}^{k}|z_{i_t}|\geqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}>\frac{1}{6}.$$

从而使问题彻底解决.

例9 若z是复数，$|z|=1$且$u=z^4-z^3-3z^2\mathrm{i}-z+1$.求$|u|$的最值，并求取得最值时的复数$z$.

分析 u的次数较高，使得进一步运算成为障碍.由$|z|=1$，得$\frac{1}{z}=\bar{z}$，再结合复数的模的性质，有$|u|=\left|z^2\left(z^2-z-3\mathrm{i}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)\right|=|(z^2+\bar{z}^2)-(z+\bar{z})-3\mathrm{i}|$，这为进一步的运算提供了可能.

① 刘诗雄主编.奥数教程·高二年级[M].上海:华东师范大学出版社,2002:100～101

解 由 $|z|=1$，得 $\overline{z}=\frac{1}{z}$，所以 $|u|=\left|z^2\left(z^2-z-3\mathrm{i}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)\right|=|(z^2+\overline{z}^2)-(z+\overline{z})-3\mathrm{i}|$.

设 $z=x+y\mathrm{i},x,y\in\mathbf{R}$，则 $x^2+y^2=1$，且 $z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=(2x^2-1)+2xy\mathrm{i}$，于是 $|u|=|2(2x^2-1)-2x-3\mathrm{i}|=|(4x^2-2x-2)-3\mathrm{i}|$.

记 $t=4x^2-2x-2$. 由 $x\in[-1,1]$，易知 $t\in\left[-\frac{9}{4},4\right]$，且 $|u|=|t-3\mathrm{i}|=\sqrt{t^2+9}$.

故当 $t=0$ 即 $z=1$ 或 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，$|u|_{\min}=3$；

当 $t=4$ 即 $z=-1$ 时，$|u|_{\max}=5$.

2. 灵活运用复数运算的几何意义解题

例 10 设复数 z 满足等式 $|z-\mathrm{i}|=1$ 且 $z\neq 0,z\neq 2\mathrm{i}$，又复数 ω 使得 $\frac{\omega}{\omega-2\mathrm{i}}\cdot\frac{z-2\mathrm{i}}{z}$ 为实数，问 ω 在复平面上所对应的点 z 的集合是什么图形，并说明理由.

解 因 $\frac{\omega}{\omega-2\mathrm{i}}\cdot\frac{z-2\mathrm{i}}{z}=\frac{(\omega-\mathrm{i})+\mathrm{i}}{(\omega-\mathrm{i})-\mathrm{i}}\cdot\frac{(z-\mathrm{i})-\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})+\mathrm{i}}$，记 $A=\frac{\omega-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}},B=\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，则上式为 $\frac{A-1}{A+1}\cdot\frac{B-1}{B+1}$. 由 $|z-\mathrm{i}|=1$ 且 $z\neq 0,z\neq 2\mathrm{i}$ 知 $|B|=1$ 且 $B\neq\pm 1\Leftrightarrow\frac{B-1}{B+1}$ 为纯虚数，所以由题设知 $\frac{A-1}{A+1}$ 为纯虚数 $\Leftrightarrow|A|=1$ 且 $A\neq\pm 1\rightleftharpoons\omega\neq 0,\omega\neq 2\mathrm{i}$，所以 ω 在复平面上所对应的点 z 的集合是以 $(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，但除去两点 $(0,0)$ 及 $(0,2)$.

例 11 是否存在非零复数 a,b,c 及自然数 h，使得只要整数 k,l,m 满足 $|k|+|l|+|m|\geqslant 1996$，$|1<a+lb+mc|>\frac{1}{h}$ 就必定成立？

（1996 年国家队选拔赛题）

解 不存在.

事实上，如果存在非零复数 a,b,c 和自然数 h，满足题中要求.

当复数 a,b 所对应的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在复平面上的夹角为 0 或 π 时，容易证明存在整数 k,l 和 m，其中 $m=0$，使得

$$\begin{cases}|k|+|l|+|0|\geqslant 1996\\|ka+lb+0\cdot c|<\frac{1}{h}\end{cases}$$

同时成立，矛盾.

当复数 a,b 所对应的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在复平面上的夹角既不等于 0，也不等于 π 时，我们

在复平面上以 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 所在直线为坐标轴,且分别以 $|a|$、$|b|$ 为单位长,构造一个斜坐标系.过坐标轴的每个整点作另一条坐标轴的平行线,两组平行线彼此相交,将复平面划分成网格平面.这些网格是彼此全等的平行四边形.

考察复数 c 所对应的向量 c 所在的直线.显然,对每个整数 m,mc 都对应这条直线上的一点,称为 c—整点.易见,c—整点都位于某个平行四边形中(包括周界).将每个含有 c—整点的平行四边形都平移到位于第一象限且以原点为顶点的平行四边形 p 上,并使二者重合.这时,每个 c—整点也都随同所在的平行四边形移到 p 中,记其象点为 c'—整点.不难看出,若 c 整点对应的复数为 mc,其所在的平行四边形的左下方顶点对应的复数为 $\lambda a+\mu b$,其中 λ,μ 都是整数,则其象点 c'—整点对应的复数为 $mc-\lambda a-\mu b$.

将所有 c'—整点所在的平行四边形 p 用平行于其边的平行线划分成有限多个小平行四边形,使每个小平行四边形的长对角线的长度都小于 $\frac{1}{h}$.c'—整点有无穷多个分布在有限多个小平行四边形中,由抽屉原理知必有无穷多个 c'—整点落在同一个小平行四边形中.显然,这些 c'—整点两两之间的距离都小于 $\frac{1}{h}$.

将这样选出的无穷多个 c'—整点所对应的复数记为

$m_ic-\lambda_ia-\mu_ib,i=1,2,\cdots$.

由于第 1 个 c'—整点与后面的每点的距离都小于 $\frac{1}{h}$,因此有

$$|(m_1-m_i)c+(\lambda_i-\lambda_1)a+(\mu_i-\mu_1)b|<\frac{1}{h}, \qquad ①$$

$i=2,3,\cdots$ 由于这表示不同点对之间的距离,故三数组$(\lambda_i-\lambda_1,\mu_i-\mu_1,m_1-m_i)$两两不同且有无穷多组.因为满足

$$|\lambda_i-\lambda_1|+|\mu_i-\mu_1|+|m_1-m_i|<1996$$

的只有有限多组,故至少有一组使

$$|\lambda_i-\lambda_1|+|\mu_i-\mu_1|+|m_1-m_i|\geqslant 1996,$$

且使 ① 式成立.矛盾.

综上所述,符合题中条件的非零复数 a,b,c 和自然数 h 不存在.

例 12 如图 18-4,平面上由边长为 1 的正三角形构成一个(无穷的)三角形网格,三角形的顶点称为格点,距离 1 的格点称为相邻格点.

A、B 两只青蛙进行跳跃游戏."一次跳跃"是指青蛙从所在的格点跳至相邻的格点."A、B 的一轮跳跃"是指它们按下列规则进行的先 A 后 B 的跳跃:

规则(I):A 任意跳一次,则 B 沿与 A 相同的跳跃方向跳跃一次,或沿与之相反的方

向跳跃两次.

规则(Ⅱ):当 A、B 所在的格点相邻时,它们可执行规则(Ⅰ)完成一轮跳跃,也可以由 A 连跳两次,每次跳跃均保持与 B 相邻,而 B 则留在原地不动.

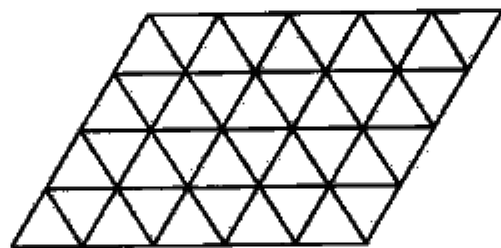


图 18 - 4

若 A、B 的起始位置为两个相邻的格点,问能否经过有限轮跳跃,使 A、B 恰好位于对方的起始位置上?

(2008 年国家队集训测试题)

解法 1 不可能.

由已知,设这些格点由 1 和 $\omega=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 生成.记 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 A、B 在复平面上的位置,不妨设开始时,$\boldsymbol{A}=0,\boldsymbol{B}=1$,注意到题设中的操作对 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 的改变量为:

(1)$\Delta(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$;

(2)$\Delta(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=3\omega^{k},k\in\mathbf{Z}$;

(3)$\Delta(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\sqrt{3}\mathrm{i}\omega^{k},k\in\mathbf{Z}$.

若经过有限轮跳跃,可使 A、B 恰好位于对方的起始位置上,设此时 $\Delta(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$ 出现了 a 次,$\Delta(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=3$ 出现了 b 次,$\Delta(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=3\omega$ 出现了 c 次,$\Delta(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=3\omega^2$ 出现了 d 次,$\Delta(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\sqrt{3}\mathrm{i}$ 出现 e 次,$\Delta(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\sqrt{3}\mathrm{i}\omega$ 出现了 f 次,$\Delta(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\sqrt{3}\mathrm{i}\omega^2$ 出现了 g 次(这里 a、b、c、d、e、f、g 为非负整数),由此得到

$$\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}d-3b-\frac{3}{2}f-\frac{3}{2}g=2,$$

两边乘 2 得:左边是 3 的倍数,右边不是,矛盾!

因此不可能从 $\boldsymbol{A}=0,\boldsymbol{B}=1$ 变成 $\boldsymbol{A}=1,\boldsymbol{B}=0$.

解法 2 不可能.

不妨设 B 在 A 右方与之相邻的格点上.现为每个格点赋值如下:

先取 A 初始所在格点,此格点赋值为 1,以后赋值规则如下:任意一个格点赋值为它左边相邻格点处值乘以 ω,又是它斜左下方与之相邻格点处值乘以 ω^2(其中 $\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$).

开始时,$A=1,B=\omega$,而由规则知,任意一轮跳跃不改变 A 所在格点的值与 B 所在格点的值的比值.若最终 A、B 能交换位置,则 $\frac{1}{\omega}=\frac{\omega}{1}$,矛盾!所以不能做到.

【模拟实战】

习题 A

1. 设复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(0<\theta<\pi)$，$\omega=\dfrac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$，已知 $|\omega|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\arg\omega<\dfrac{\pi}{2}$，求 θ.
2. $a\in\mathbf{R}$，复数 $\omega=1+a\mathrm{i}$，若复数 z 满足 $\bar{\omega}z-\omega=0$. 问 a 取何值时，$|z^2-z+2|$ 有最小值，并求出这个最小值.
3. 设 $0<\theta<2\pi$，复数 $z=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，$u=a^2+a\mathrm{i}$，且 zu 是纯虚数，$a\in\mathbf{R}$.
   (1) 求复数 u 的辐角主值(用 θ 的代数式表示)；
   (2) 记 $\omega=z^2+u^2+2zu$，试问：ω 可能是正实数吗?为什么?
4. 设复数 z 满足 $|z|=1$. 试求 $|z^3-3z-2|$ 的最大值与最小值.
5. 已知 $x^2+y^2\leqslant1$，$a^2+b^2\leqslant2$，$x,y,a,b\in\mathbf{R}$. 求证：$|b(x^2-y^2)+2axy|\leqslant\sqrt{2}$.
6. 对 $n\in\mathbf{N}^*$，令 S_n 为 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}$ 的最小值，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，且 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=17$. 若存在 n，使 S_n 也是整数，求一切 n 的值.
7. 设 $z=x+y\mathrm{i}$ 是复数，其中 x,y 是有理数，$|z|=1$，求证：对于任意整数 n，$|z^{2n}-1|$ 是有理数.
8. 复平面上点 A,B 对应的复数分别为 $z_1=2$，$z_2=-3$，点 P 对应的复数为 z，$\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ 的辐角主值为 φ. 当点 P 在以原点为圆心，1 为半径的上半圆周(不包括两个端点)上运动时，求 φ 的最小值.

习题 B

1. 已知复数 z 和 ω 满足以下两个条件：
   (1) $z+\omega+3=0$；
   (2) $|z|,2,|\omega|$ 成等差数列.
   问 $\cos(\arg z-\arg\omega)$ 有无最大值?若有，把它求出来.
2. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点为 F，B 为椭圆上一动点，$\triangle FAB$ 为正三角形，且 F、A、B 依逆时针排序，求点 A 的轨迹.

3. 已知复数 z 满足 $\arg(z+a+a\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$，且 $\arg(z-a-a\mathrm{i})=\frac{5\pi}{4}(a\in\mathbf{R}^{+})$，求 $\arg(z-b+b\mathrm{i})(a>b>0)$ 的取值范围.
4. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是平面上任意 n 点.求到诸 A_k 点($k=1,2,\cdots,n$)的距离平方和为常数的动点 P 的轨迹.
5. 设 A,B,C 分别是复数 $z_0=a\mathrm{i},z_1=\frac{1}{2}+b\mathrm{i},z_2=1+c\mathrm{i}$ 对应的不共线的三点(a,b,c 都是实数).求证:曲线 $z=z_0\cdot\cos^4 t+2z_1\cdot\cos^2 t\cdot\sin^2 t+z_2\cdot\sin^4 t(t\in\mathbf{R})$ 与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线只有一个公共点,并求出此点.
6. 设 O 为复平面内的原点，Z_1 和 Z_2 为复平面内的两个动点，且满足:

   (1) Z_1、Z_2 点对应的复数的辐角分别是定值 θ 和 $-\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$;

   (2) $\triangle OZ_1Z_2$ 的面积为定值 S.

   求 $\triangle OZ_1Z_2$ 的重心 Z 的轨迹方程及 Z 点所对应的复数模的最小值.

第十九章　复数与三角

【基础知识】

复数的三角形式及棣模佛定理：$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 等沟通了复数与三角间的关系，复数的幅角主值与反正切有内在的联系，因此，三角问题或反三角问题有时可以借助于复数来处理.

【典型例题与基本方法】

例 1　已知复数 $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$，$u = \cos\beta + i\sin\beta$，且 $z + u = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$. 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值.

解　由题设，得

$$z + u = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\beta + i\sin\beta) = (\cos\alpha + \cos\beta) + i(\sin\alpha + \sin\beta)$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

根据复数相等的充要条件，得

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = \frac{4}{5}, & ① \\ \sin\alpha + \sin\beta = \frac{3}{5}. & ② \end{cases}$$

①、② 两式的左边分别进行和差化积，得

$$\begin{cases} 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{4}{5}, & ③ \\ 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{3}{5}. & ④ \end{cases}$$

④ ÷ ③，得 $\tan\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{4}$.

所以　$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{2\tan\frac{\alpha + \beta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha + \beta}{2}} = \dfrac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \dfrac{4}{7}$.

例 2 求 $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$ 的值.

解 设 $z=\cos\frac{\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}$，则 $\bar{z}=\cos\frac{\pi}{7}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}$，$\bar{z}=\frac{1}{z}$，$z^7=-1$，即 $\cos\frac{\pi}{7}=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{z^2+\bar{z}^2}{2}$，$\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{z^3+\bar{z}^3}{2}$，且 $-z^4=-\frac{z^7}{z^3}=-\frac{-1}{z^3}=\bar{z}^3$.

从而 $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

$$=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos(\pi-\frac{3\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{\pi}{7})$$

$$=-(-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7})$$

$$=-\frac{1}{2}[-(z^2+\bar{z}^2)+(z^3+\bar{z}^3)+(z+\bar{z})]=-\frac{1}{2}[(z-z^2+z^3)+(\bar{z}-\bar{z}^2+\bar{z}^3)]$$

$$=-\frac{1}{2}[\frac{z(1+z^3)}{1+z}+\frac{\bar{z}(1+\bar{z}^3)}{1+\bar{z}}]=-\frac{1}{2}(\frac{z+z^4}{1+z}+\frac{1-z^4}{z+1})=-\frac{1}{2}.$$

例 3 解方程 $8\cos^3x-6\cos x+\sqrt{2}=0$.

解 设 $z=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，则 $\cos x=\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$，代入原方程，得

$(z+\frac{1}{z})^3-3(z+\frac{1}{z})+\sqrt{2}=0$.

展开化简，得 $z^3+\frac{1}{z^3}+\sqrt{2}=0$. 即 $zx^6+\sqrt{2}z^3+1=0$.

即 $z^3=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$，$\cos3x+\mathrm{i}\sin3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

依两复数相等，得 $\begin{cases}\cos3x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin3x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$

$3x=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}$，所以 $x=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

故原方程的解为 $x=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

例 4 求角 $\theta=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ 的大小.

解 因 $\arctan\frac{1}{5}$ 和 $\arctan\frac{1}{239}$ 分别是复数 $z_1=5+\mathrm{i}$ 和 $z_2=239+\mathrm{i}$ 的辐角主值.

又由$\dfrac{z_1^4}{z_2}=\dfrac{(5+\mathrm{i})^4}{239+\mathrm{i}}=\dfrac{476+480\mathrm{i}}{239+\mathrm{i}}=\dfrac{114244}{239^2+1}+\dfrac{114244}{239^2+1}\mathrm{i}$,

知$\theta=\arg(\dfrac{z_1^4}{z_2})=\arctan(\dfrac{114244}{239^2+1}\cdot\dfrac{239^2+1}{114244})=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$.

【解题思维策略分析】

1. 善于把三角函数式转化为复数或其各种表示形式

例 5 化简$\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x}$.

解 设$z=\cos x+\mathrm{i}\sin x$,则$z\bar{z}=1$,$z^n\cdot\bar{z}^n=(z\cdot\bar{z})^n=1$,$z^n=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx$,$\bar{z}^n=\cos nx-\mathrm{i}\sin nx$.

则$\cos nx=\dfrac{z^n+\bar{z}^n}{2}$,$\sin nx=\dfrac{z^n-\bar{z}^n}{2\mathrm{i}}$,$\sin 2nx=\dfrac{z^{2n}-\bar{z}^{2n}}{2\mathrm{i}}$,

即$\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)x$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}[(z-\bar{z})+(z^3-\bar{z}^3)+(z^5-\bar{z}^5)+\cdots+(z^{2n-1}-\bar{z}^{2n-1}]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}[(z+z^3+z^5+\cdots+z^{2n-1})-(\bar{z}+\bar{z}^3+\bar{z}^5+\cdots+\bar{z}^{2n-1})]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\frac{z(1-z^{2n})}{1-z^2}-\frac{\bar{z}(1-\bar{z}^{2n})}{1-\bar{z}^2}]=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\frac{z(1-z^{2n})}{z\bar{z}-z^2}-\frac{\bar{z}(1-\bar{z}^{2n})}{z\bar{z}-\bar{z}^2}]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\frac{1-z^{2n}}{\bar{z}-z}-\frac{1-\bar{z}^{2n}}{z-\bar{z}})=\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{z^{2n}-2+\bar{z}^{2n}}{z-\bar{z}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{(z^n-\bar{z}^n)^2}{z-\bar{z}}$$

$$=(\frac{z^n-\bar{z}^n}{2\mathrm{i}})^2\cdot\frac{2\mathrm{i}}{z-\bar{z}}=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

类似有$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x$

$$=\frac{1}{2}[(z+\bar{z})+(z^3+\bar{z}^3)+(z^5+\bar{z}^5)+\cdots+(z^{2n-1}+\bar{z}^{2n-1})]$$

$$=\frac{1}{2}[(z+z^3+z^5+\cdots+z^{2n-1})+(\bar{z}+\bar{z}^3+\bar{z}^5+\cdots+\bar{z}^{2n-1})]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1-z^{2n}}{\bar{z}-z}+\frac{1-\bar{z}^{2n}}{z-\bar{z}}]=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{2n}-\bar{z}^{2n}}{z-\bar{z}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{2n}-\bar{z}^{2n}}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{2\mathrm{i}}{z-\bar{z}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2nx}{\sin x}=\frac{\sin nx\cdot\cos nx}{\sin x}.$$

于是

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x}=\tan nx.$$

例 6 证明三角恒等式 $\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cos(n-2k)\theta, n\in\mathbf{N}^*$.

分析 由复数的指数形式易知 $\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$,利用二项式定理展开上式右边即证.

证明 由复数的指数形式及二项式定理得

$$\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(e^{i\theta})^{n-k}(e^{-i\theta})^k$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(n-2k)\theta} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cos(n-2k)\theta.$$

最后一步成立是因为由欧拉公式,和是实数,故每一项仅剩下实部.

事实上,用 $C_n^k = C_n^{n-k}$ 及 $\sin(-x) = -\sin x$,虚部都抵消了.

注 对 $n = 2,3,4$ 的情形,利用 $\cos(-x) = \cos x$,此恒等式简化为 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos2\theta}{2}$, $\cos^3\theta = \frac{3\cos\theta+\cos3\theta}{4}$, $\cos^4\theta = \frac{3+4\cos2\theta+\cos4\theta}{8}$.这些公式是很有用的.

例 7 证明三角恒等式:

(1) $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} - = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ $(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N})$;

(2) $\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}(n\in\mathbf{N})$.

证明 当 $n = 1$ 时,第 2 个结论显然成立.

当 $n\geqslant 2$ 时,由棣模佛定理,得

$(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n} = \cos2n\theta + i\sin2n\theta$.

上式左边依二项式定理展开得

$$\cos^{2n}\theta + C_{2n}^1\cos^{2n-1}\theta\sin\theta i - C_{2n}^2\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta i - C_{2n}^3\cos^{2n-3}\theta\sin^3\theta i + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}C_{2n}^{2n-1}\cos\theta\sin^{2n-1}\theta i + (-1)^n\sin^{2n}\theta = \cos2n\theta + i\sin2n\theta \quad (*)$$

在(*)式中,由虚部相等得

$$\cos\theta\sin\theta[C_{2n}^1\cos^{2n-2}\theta - C_{2n}^3\cos^{2n-4}\theta\sin^2\theta + C_{2n}^5\cos^{2n-6}\theta\sin^4\theta + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}C_{2n}^{2n-1}\sin^{2n-2}\theta]$$
$$= \cos\theta\sin\theta[C_{2n}^1(1-\sin^2\theta)^{n-1} - C_{2n}^3(1-\sin^2\theta)^{n-2}\sin^2\theta + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}C_{2n}^{2n-1}\sin^{2n-2}\theta]$$
$$= \sin2n\theta.$$

由于当 $\theta = \frac{\pi}{2n},\frac{2\pi}{2n},\cdots\frac{(n-1)\pi}{2n}$ 时,$\sin2n\theta = 0$,且当 $n\geqslant 2$时,对上述 θ 有 $\cos\theta\sin\theta\neq$

0,所以 $x=\sin^2\frac{\pi}{2n},\sin^2\frac{2\pi}{2n},\cdots,\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$ 是方程

$C_{2n}^1(1-x)^{n-1}-C_{2n}^3(1-x)^{n-2}x+\cdots+(-1)^{n-1}C_{2n}^{2n-1}x^{n-1}=0$ 的根,于是有

$$C_{2n}^1(1-x)^{n-1}-C_{2n}^3(1-x)^{n-2}x+\cdots+(-1)^{n-1}C_{2n}^{2n-1}x^{n-1}=A\cdot\left(x-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\left(x-\sin^2\frac{2\pi}{2n}\right)\cdots\left(x-\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi\right).\quad ①$$

同样地,在(*)式中,由实部相等得

$(1-\sin^2\theta)^n-C_n^2(1-\sin^2\theta)^{n-1}\sin\theta+\cdots+(-1)^n\sin^2\theta=\cos2n\theta$,当 $\theta=\frac{\pi}{4n},\frac{3\pi}{4n},\cdots,\frac{(2n-1)\pi}{4n}$ 时,$\cos2n\theta=0$,所以 $x=\sin^2\frac{\pi}{4n},\sin^2\frac{3\pi}{4n},\cdots,\sin^2\frac{2n-1}{4n}\pi$ 是方程 $(1-x)^n-C_{2n}^2(1-x)^{n-1}x+\cdots+(-1)^nx^n=0$ 的根,于是有

$$(1-x)^n-C_{2n}^2(1-x)^{n-1}x+\cdots+(-1)^nx^n$$
$$=B\cdot\left(x-\sin^2\frac{\pi}{4n}\right)\left(x-\sin^2\frac{3\pi}{4n}\right)\cdots\left(x-\sin^2\frac{2n-1}{4n}\pi\right).\quad ②$$

比较①、②两式中的最高次幂的系数,得

$A=(-1)^{n-1}(C_{2n}^1+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1})$,

$B=(-1)^n(1+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n})$.

则有

$(-1)^{n-1}A+(-1)^nB=C_{2n}^0+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^{2n}=2^{2n}$,

$(-1)^{n-1}A+(-1)^nB=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3\cdots+C_{2n}^{2n-1}-C_{2n}^{2n}=0$.

解得 $A=(-1)^{n-1}\cdot2^{2n-1}$, ③

$B=(-1)^n\cdot2^{2n-1}$. ④

在①、②两式中,由常数项相等,得

$$C_{2n}^1=2n=(-1)^{n-1}A\sin^2\frac{\pi}{2n}\sin^2\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi,$$

$$C_{2n}^0=1=(-1)^nB\sin^2\frac{\pi}{4n}\sin^2\frac{3\pi}{4n}\cdots\sin^2\frac{2n-1}{4n}\pi.$$

将③、④两式分别代入上面的两式,得

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n-1}{2n}\pi=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$$

$$\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\cdots\sin\frac{2n-1}{4n}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2^n}.$$

2. 善于把反三角函数式转化为复数的幅角主值问题处理

例 8 设 $\arctan a+\arctan b+\arctan c+\frac{\pi}{2}=0$,试比较下列每组中两个数的大小:

(1) $ab+bc+ca$ 与 1;

(2) $a+b+c$ 与 abc.

解 把 $\arctan a$,$\arctan b$ 和 $\arctan c$ 分别视为复数 $z_1=1+ai$,$z_2=1+bi$ 和 $z_3=1+ci$ 的辐角主值,设 $z=z_1z_2z_3$,$z=(1+ai)(1+bi)(1+ci)=(1-ab-bc-ca)+(a+b+c-abc)i$.

依复数乘法的几何意义,原式化为 $\arg z=-\frac{\pi}{2}$,由此式知,复数 z 的实部为零,虚部为负值.

于是有(1) $ab+bc+ca=1$;(2) $a+b+c<abc$.

例 9 化简:

$$\arctan\frac{1+|x|-\sqrt{1-x^2}}{1+|x|+\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\arccos|x|\ (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

解 由题意得 $|x|\in[0,1]$,$\frac{1+|x|-\sqrt{1-x^2}}{1+|x|+\sqrt{1-x^2}}=\theta$,

则 $2\theta+\varphi\in[0,\pi]$.

令 $z=(1+|x|+\sqrt{1-x^2})+(1+|x|-\sqrt{1-x^2})i$,$\omega=|x|+\sqrt{1-x^2}i$,则 $\arg(z^2\cdot\omega)=2\theta+\varphi$.

易得 $z^2\cdot\omega=4(1+|x|)i$,所以 $\arg(z^2\cdot\omega)=\frac{\pi}{2}$.故

原式 $=\theta+\frac{\varphi}{2}=\frac{2\theta+\varphi}{2}=\frac{\pi}{4}$.

【模拟实战】

习题 A

1. 化简 $\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)^8\cdot(1+i\tan\theta)^5}{(\cos\theta+i\sin\theta)^2\cdot(\tan\theta+i)}$.

2. 设 $-1\leqslant x\leqslant 1$,求证 $\sin(4\arcsin x)=4x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}$.

3. 求证:$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

4. 计算 $\sec\frac{2\pi}{9}+\sec\frac{4\pi}{9}+\sec\frac{6\pi}{9}+\sec\frac{8\pi}{9}$.

5. 对于 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$，求证下列恒等式：

(1) $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left|\cos\frac{k\pi}{n}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n[1-(-1)^n]$；

(2) $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

6. 设正整数 $n(n>2)$ 不是 2 的整数次幂，求证：存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cos\frac{2k\pi}{n}=0$.

7. 求证：$\tan\theta+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\tan\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\tan\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$

$$=\begin{cases}n\tan n\theta, & n\text{ 为奇数},\\ -n\cot n\theta, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

第二十章　复数与方程

【基础知识】

由于复数的引入，代数方程的有关问题出现了新的内容，在复数范围内，对于一元 n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0(a_n\neq 0)$，则有下述一些结论：

1. **代数基本定理**　复系数的一元 n 次方程有且仅有 n 个根（k 重根按 k 个根计算）.

2. **韦达定理**　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是该方程的 n 个复根，则它们与方程的系数之间成立如下关系：

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n},\\ x_1x_2+x_2x_2+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n},\\ \cdots\\ \sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_j\leqslant n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}=(-1)^j\dfrac{a_{n-j}}{a_n},\\ \cdots\\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}.\end{cases}$$

3. **实系数方程虚根成对定理**　若 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是实数，则对方程的任意复根 x，其共扼复数 $\overline{x}$ 也是该方程的根.

对于复系数的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，我们可将原来的实数范围内的一元二次方程的求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant 0)$ 中的 $\sqrt{b^2-4ac}$ 改为 b^2-4ac 的平方根，则求根公式依然成立.

对于二项方程 $x^n-a=0$，可令 $a=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(r\geqslant 0,\theta\in\mathbf{R})$，利用复数开方，即得该方程的 n 个根为 $\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n})$，这里 $k=0,1,\cdots,n-1$.

一般地，对于低次方程，可以利用复数相等的充要条件，转化为实数问题求解. 有

时也可以采用以模为突破口，先求模 $|z|$，再求复数 z.

【典型例题与基本方法】

例 1 已知 a、b、c、d 取某些实数值时，方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有 4 个非实数根，其中 2 个根的积为 $13+\mathrm{i}$，另 2 个根的和为 $3+4\mathrm{i}$，这里 i 为虚数单位，求 b.

（第 13 届美国邀请赛题）

解 设 x_1、x_2、x_3、x_4 是方程的 4 个根. 由题意可约定 $x_3=\overline{x_1}$，$x_4=\overline{x_2}$，则有 $x_1x_2=13+\mathrm{i}$，$x_3+x_4=3+4\mathrm{i}$. 故

$$\begin{aligned}b&=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\\&=(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4\\&=(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})+(13+\mathrm{i})+(13-\mathrm{i})\\&=51.\end{aligned}$$

例 2 方程 $x^{10}+(13x-1)^{10}=0$ 有 10 个复数根 $r_1,\overline{r_1},r_2,\overline{r_2},r_3,\overline{r_3},r_4,\overline{r_4},r_5,\overline{r_5}$，其中 $\overline{r_i}$ 是 r_i 的共轭复数（$i=1,2,3,4,5$），求 $\frac{1}{r_1\overline{r_1}}+\frac{1}{r_2\overline{r_2}}+\frac{1}{r_3\overline{r_3}}+\frac{1}{r_4\overline{r_4}}+\frac{1}{r_5\overline{r_5}}$ 的值.

（第 12 届美国邀请赛题）

解 由 $x^{10}+(13x-1)^{10}=0$，得

$$\left(\frac{x}{13x-1}\right)^{10}=-1.$$

记 $y^{10}=-1$ 的 10 个复数根为 $\omega_1,\overline{\omega_1},\omega_2,\overline{\omega_2},\omega_3,\overline{\omega_3},\omega_4,\overline{\omega_4},\omega_5,\overline{\omega_5}$，则

$$\frac{x}{13x-1}=\omega_i \quad 或 \quad \overline{\omega_i}(i=1,2,3,4,5).$$

它们都是一次方程，各有一个根，所以不妨设 $\frac{r_i}{13r_i-1}=\omega_i$，则 $\frac{\overline{r_i}}{13\overline{r_i}-1}=\overline{\omega_i}$，由此推知

$$r_i=\frac{\omega_i}{13\omega_i-1},\overline{r_i}=\frac{\overline{\omega_i}}{13\overline{\omega_i}-1}.$$

于是

$$\frac{1}{r_i\cdot\overline{r_i}}=\frac{(13\omega_i-1)(13\overline{\omega_i}-1)}{\omega_i\cdot\overline{\omega_i}}=170-13(\omega_i+\overline{\omega_i}).$$

从而由韦达定理得

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i\overline{r_i}}=5\times170-13\sum_{i=1}^{5}(\omega_i+\overline{\omega_i})=850.$$

注 一般地，方程 $x^{2n}+(ax+b)^{2n}=0(a、b\in\mathbf{R},ab\neq0)$ 有 $2n$ 个复数根 r_i、$\overline{r_i}$（i

$= 1,2,\cdots,n)$,则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i\bar{r}_i}=\frac{n(a^2+1)}{b^2}$.

例 3　已知实系数方程 $x^3+2(k-1)x^2+9x+5(k-1)=0$ 有一个模为 $\sqrt{5}$ 的虚根,求 k 的值,并解此方程.

解　由实系数方程虚根成对定理,知原方程有一个实根和两个模为 $\sqrt{5}$ 的虚根,它们互为共轭虚数,设这三个根为 $a+bi,a-bi,c(a,b,c\in\mathbf{R},b\neq 0)$,则

$$a^2+b^2=5. \quad ①$$

再由韦达定理,得 $\begin{cases}(a+bi)+(a-bi)+c=-2(k-1),\\(a+bi)(a-bi)+c(a+bi)+c(a-bi)=9,\\(a+bi)(a-bi)c=-5(k-1).\end{cases}$

综合 ①,整理得 $\begin{cases}2a+c=-2(k-1), & ②\\ac=2, & ③\\c=-k+1. & ④\end{cases}$

由 ②,④ 知 $c=1-k,a=\frac{1}{2}(1-k)$,并将其代入 ③,可得 $k=-1$ 或 3.

再求原方程的解:当 $k=-1$ 时,原方程的解为 $1+2i,1-2i,2$;当 $k=3$ 时,原方程的解为 $-1+2i,-1-2i,-2$.

例 4　设 α 是复系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$ 的一个根.

(1) 求证: $|\alpha|\leqslant 1+\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|$;

(2) 若 $|a_k|\leqslant 1(k=1,2,\cdots,n)$,则 $|\alpha|>\frac{|a_0|}{1+|a_0|}$.

证明　(1) 设 $M=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|$,当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时,结论显然成立.

当 $|\alpha|>1$ 时,由 $f(\alpha)=0$,即 $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0=0$,　(*)

及 $a_n\neq 0$,得

$$\begin{aligned}|\alpha|^n&=\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\alpha^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\alpha+\frac{a_0}{a_n}\right|\\&\leqslant M(|\alpha|^{n-1}+\cdots+|\alpha|+1)\\&=M\cdot\frac{|\alpha|^n-1}{|\alpha|-1}<M\cdot\frac{|\alpha|^n}{|\alpha|-1}.\end{aligned}$$

所以 $|\alpha|<1+M$.

(2) 由(*)式,及 $|a_k|\leqslant 1(k=1,2,\cdots,n)$,得

$$|a_0| = |a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k\alpha^k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha|^k,$$

若 $|\alpha| \leqslant r = \dfrac{|a_0|}{1+|a_0|}$,则

$$1+|a_0| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\alpha|^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\alpha|^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} < \frac{1}{1-r} = 1+|a_0|,$$
矛盾.

故 $|\alpha| > r$.

例 5 设方程 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 的系数都是实数且满足条件 $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant 1$.已知 λ 为此方程的复根且 $|\lambda| \geqslant 1$.求证 $\lambda^{n+1} = 1$.

(1992 年 CMO - 7 试题)

解法 1 因 λ 为方程的根,故有

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

将上式两端同乘以 $\lambda - 1$,得到

$$\begin{aligned}0 &= (\lambda - 1)(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) \\ &= \lambda^{n+1} + (a_{n-1} - 1)\lambda^n + (a_{n-2} - a_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_0 - a_1)\lambda - a_0,\end{aligned}$$

由此可得

$$\lambda^{n+1} = (1 - a_{n-1})\lambda^n + (a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0)\lambda + a_0 \quad ①$$

其中右端的系数都是非负实数,因此有

$$\begin{aligned}|\lambda|^{n+1} &= |(1 - a_{n-1})\lambda^n + (a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0)\lambda + a_0| \\ &\leqslant (1 - a_{n-1})|\lambda|^n + (a_{n-1} - a_{n-2})|\lambda|^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_0)|\lambda| + a_0.\end{aligned} \quad ②$$

由已知 $|\lambda| \geqslant 1$,故由 ② 式又有

$$\begin{aligned}|\lambda|^{n+1} &\leqslant (1 - a_{n-1})|\lambda|^n + (a_{n-1} - a_{n-2})|\lambda|^n + \cdots + (a_1 - a_0)|\lambda|^n \\ &\quad + a_0|\lambda|^n = |\lambda|^n.\end{aligned} \quad ③$$

由此即得 $|\lambda|^{n+1} \leqslant 1$,从而得到 $|\lambda| = 1$.这样一来,不等式 ②,③ 都变为等式.因而有如下的辐角关系:

$$\begin{aligned}\arg(1 - a_{n-1})\lambda^n &= \arg(a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1} = \cdots = \arg(a_1 - a_0)\lambda \\ &= \arg a_0 = 0.\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{cases}(1 - a_{n-1})\lambda^n \geqslant 0, \\ (a_{n-i} - a_{n-i-1})\lambda^{n-i} \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n-1.\end{cases} \quad ④$$

由 ④ 和 ① 式得知

$$\lambda^{n+1}=(1-a_{n-1})\lambda^{n}+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+\cdots+(a_{1}-a_{0})\lambda+a_{0}\geqslant 0.$$

从而有

$$\lambda^{n+1}=|\lambda^{n+1}|=|\lambda|^{n+1}=1.$$

解法 2 令 $\alpha=\frac{\lambda}{|\lambda|}$,于是 $|\alpha|=1$ 且 $\lambda=|\lambda|\alpha$,由于 λ 为方程的根,故有

$$|\lambda|^{n}\alpha^{n}+a_{n-1}|\lambda|^{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_{1}|\lambda|\alpha+a_{0}=0. \qquad ⑤$$

令 $b_{n}=|\lambda|^{n}, b_{n-i}=a_{n-i}|\lambda|^{n-i}, i=1,2,\cdots,n$,则由 $|\lambda|\geqslant 1$ 及 $0<a_{0}\leqslant a_{1}\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant 1$ 知有 $0<b_{0}\leqslant b_{1}\leqslant\cdots\leqslant b_{n-1}\leqslant b_{n}$,而由⑤式有

$$b_{n}\alpha^{n}+b_{n-1}\alpha^{n-1}++b_{1}\alpha+b_{0}=0. \qquad ⑥$$

将⑥式两端同乘以 $\alpha-1$,得到

$$\begin{aligned}0&=(\alpha-1)(b_{n}\alpha^{n}+b_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+b_{1}\alpha+b_{0})\\&=b_{n}\alpha^{n+1}+(b_{n-1}-b_{n})\alpha^{n}+\cdots+(b_{0}-b_{1})\alpha-b_{0}\\&=(b_{n}-b_{n-1})(\alpha^{n+1}-\alpha^{n})+(b_{n-1}-b_{n-2})(\alpha^{n+1}-\alpha^{n-1})+\cdots+(b_{1}-b_{0})(\alpha^{n+1}-\alpha)+b_{0}(\alpha^{n+1}-1).\end{aligned} \qquad ⑦$$

令 $\beta=\frac{1}{\alpha}$,则⑦式化为

$$(b_{n}-b_{n-1})(1-\beta)+(b_{n-1}-b_{n-2})(1-\beta^{2})+\cdots+(b_{1}-b_{0})(1-\beta^{n})+b_{0}(1-\beta^{n+1})=0. \qquad ⑧$$

注意,⑧式中的系数都是非负实数,因为 $|\beta|=1$,故有

$$\mathrm{Re}(b_{i}-b_{i-1})(1-\beta^{n+1-i})\geqslant 0, i=0,1,\cdots,n,$$

其中 $b_{-1}=0$.由⑧取实部又有

$$\mathrm{Re}(b_{n}-b_{n-1})(1-\beta)+\cdots+\mathrm{Re}(b_{1}-b_{0})(1-\beta^{n})+\mathrm{Re}b_{0}(1-\beta^{n+1})=0,$$

所以有 $\mathrm{Re}(b_{i}-b_{i-1})(1-\beta^{n+1-i})=0, i=0,1,\cdots,n.$ ⑨

因为 $b_{0}>0$,故由 $\mathrm{Re}b_{0}(1-\beta^{n+1})=0$,得到 $\mathrm{Re}(1-\beta^{n+1})=0$.又因 $|\beta|=1$,故得 $\beta^{n+1}=1$,从而 $\alpha^{n+1}=1$.

另一方面,因为已知方程的所有系数都是正实数,故 λ 不是正实数,从而 $\alpha\neq 1$,$\beta\neq 1$.但 $|\beta|=1$,故 $\mathrm{Re}(1-\beta)\neq 0$.但由⑨式又有

$$(b_{n}-b_{n-1})\mathrm{Re}(1-\beta)=0.$$

故得 $b_{n}=b_{n-1}$,亦即有 $|\lambda|^{n}=a_{n-1}|\lambda|^{n-1}$.因此有 $a_{n-1}=|\lambda|\geqslant 1$.

但由已知条件又有 $a_{n-1}\leqslant 1$,故有 $a_{n-1}=1$.因而 $|\lambda|=1$,从而得到

$$\lambda^{n+1}=|\lambda|^{n+1}\cdot\alpha^{n+1}=\alpha^{n+1}=1.$$

【解题思维策略分析】

1. 借助方程处理问题

例6 已知 $\alpha^{2005}+\beta^{2005}$ 可表示成以 $\alpha+\beta$、$\alpha\beta$ 为变元的二元多项式,求这个多项式的系数之和.

(2005 年西部奥林匹克题)

解 在 $\alpha^k+\beta^k$ 的展开式中,令 $\alpha+\beta=1,\alpha\beta=1$,其所求系数之和为 S_k,则 α、β 是方程 $x^2-x+1=0$ 的根.解得

$$\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3},\beta=\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3},$$

从而
$$\begin{aligned}\alpha^k+\beta^k&=(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})^k+(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})^k\\&=(\cos\frac{k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{3})+(\cos\frac{k\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{3})\\&=2\cos\frac{k\pi}{3}.\end{aligned}$$

取 $k=2005$,得 $S_k=1$.

例7 设 n 是给定的自然数.求所有的正数对 (a,b),使得 x^2+ax+b 是 $ax^{2n}+(ax+b)^{2n}$ 的因式.

(1992 年上海市高三竞赛题)

解 设 x_0 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的根.

由 $b>0$ 知 $x_0\neq0$,且 x_0 也是方程 $ax^{2n}+(ax+b)^{2n}=0$ 的根.

从而,$ax_0^{2n}+(-x_0^2)^{2n}=0$,得 $x_0^{2n}=-a$.

解得

$x_0=\sqrt[2n]{a}[\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+\mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}](k=0,1,2,\cdots,2n-1)$,且 x_0 必为虚数,否则 $-a=x_0^{2n}\geqslant0$,矛盾.

另一方面,$x_0=\frac{-a\pm\sqrt{4b-a^2}\cdot\mathrm{i}}{2}$,故

$$\sqrt[2n]{a}\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}=-\frac{a}{2}<0.$$

从而得 $\frac{\pi}{2}<\frac{(2k+1)\pi}{2n}<\frac{3\pi}{2}$.

故 $n<2k+1<3n$.

由此可见,当 $n=1$ 时,无解;

当 $n\geqslant2$ 时,

$$a = [2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}]^{\frac{2n}{2n-1}},$$

$$b = x_0\overline{x_0} = |x_0|^2 = a^{\frac{1}{n}} = [2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}]^{\frac{2}{2n-1}},$$

其中 $n < 2k+1 < 3n, k \in \mathbf{N}$.

注 "算两次"是一种重要的数学方法.本题从两种不同角度计算 x_0 的值,经比较得出问题的结论.

2. 关注运算的几何意义处理问题

例 8 关于 x 的二次方程 $x^2 + z_1x + z_2 + m = 0$ 中,z_1, z_2, m 均为复数,且 $z_1^2 - 4z_2 = 16 + 20i$.设这个方程的两个根为 α, β,满足 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{7}$,求 $|m|$ 的最大值和最小值.

解 由韦达定理得 $\alpha + \beta = -z_1, \alpha\beta = z_2 + m$.

因为 $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = z_1^2 - 4z_2 - 4m$.

所以 $|\alpha - \beta|^2 = |4m - (z_1^2 - 4z_2)| = 28$.

即 $|m - (4+5i)| = 7$.

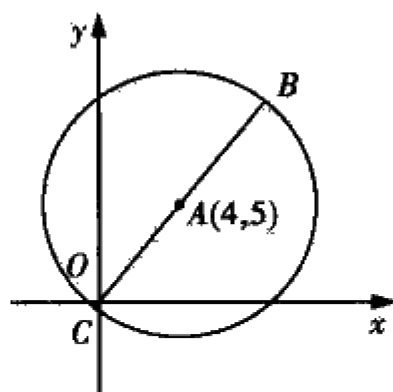


图 20 - 1

这表示复数 m 在以 $A(4,5)$ 为圆心,7 为半径的圆周上,且原点 O 在 $\odot A$ 内.如图 20 - 1,连结 OA 并延长交 $\odot A$ 于两点 B 与 C.易解得

$$|m|_{max} = |OB| = |OA| + |AB| = \sqrt{41} + 7.$$

$$|m|_{min} = |OC| = |CA| - |AO| = 7 - \sqrt{41}.$$

例 9 设 z_1、z_2、z_3 是 3 个模不大于 1 的复数,ω_1、ω_2 是方程 $(z-z_1)(z-z_2) + (z-z_2)(z-z_3) + (z-z_3)(z-z_1) = 0$ 的两个根.证明:对 $j = 1,2,3$,都有

$\min\{|z_j - \omega_1|, |z_j - \omega_2|\} \leqslant 1$. (2008 年国家队集训测试题)

证明 由对称性,只需证明:$\min\{|z_1 - \omega_1|, |z_1 - \omega_2|\} \leqslant 1$.

不妨设 $z_1 \neq \omega_1, \omega_2$,令

$f(z) = (z-z_1)(z-z_2) + (z-z_2)(z-z_3) + (z-z_3)(z-z_1)$,由

$f(z) = 3(z-\omega_1)(z-\omega_2)$,

得 $3(z_1-\omega_1)(z_1-\omega_2) = (z_1-z_2)(z_1-z_3)$,

因此,若 $|z_1 - z_2|\cdot|z_1 - z_3| \leqslant 3$,结论成立.

另一方面,由 $\omega_1 + \omega_2 = \frac{2}{3}(z_1+z_2+z_3), \omega_1\omega_2 = \frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{3}$,又

$$\frac{1}{z-\omega_1} + \frac{1}{z-\omega_2} = \frac{2z - (\omega_1+\omega_2)}{(z-\omega_1)(z-\omega_2)} = \frac{3(2z - (\omega_1+\omega_2))}{f(z)},$$

所以

$$\frac{1}{z_1-\omega_1}+\frac{1}{z_1-\omega_2}=\frac{3\left(2z_1-\frac{2}{3}(z_1+z_2+z_3)\right)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}=\frac{2(2z_1-z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)},$$

因此,当$\left|\frac{2z_1-z_2-z_3}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right|\geqslant 1$时,结论成立.

下设$|z_1-z_2|\cdot|z_1-z_3|>3$,$\left|\frac{2z_1-z_2-z_3}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right|<1$.

如图20-2,考虑以$A(z_1)$、$B(z_2)$、$C(z_3)$为顶点的三角形.记m_a和h_a分别是三角形ABC的边BC上的中线和高,则$bc>3$,$2m_a<bc$.

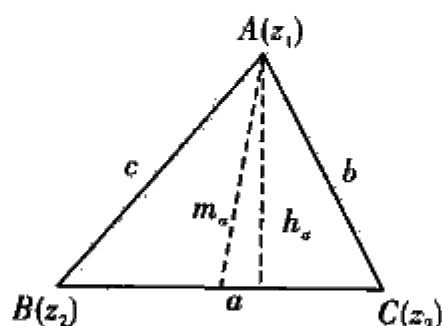


图20-2

由于$b,c<2$,所以$m_a<b$,$m_a<c$,由此推出$\angle B$、$\angle C$都小于90°.

又因为$b^2+c^2-a^2\geqslant 2bc-a^2>6-4>0$,所以$\angle A<90°$,即$\triangle ABC$为锐角三角形.所以,$\triangle ABC$为单位圆内的锐角三角形.平移$\triangle ABC$使$B$、$C$在单位圆周内(或圆周上),延长$C$交单位圆于$D$,则由$\angle D\leqslant\angle A<\frac{\pi}{2}$得$\sin A\geqslant\sin D$,所以$2k=\frac{BC}{\sin A}\leqslant\frac{BC}{\sin D}=2$.即$\triangle ABC$外接圆半径$R\leqslant 1$,于是$2m_a<bc=2Rh_a\leqslant 2m_a$,矛盾!因此这种情况不可能发生.

综上所述,原命题成立.

【模拟实战】

习题A

1. 设$a\geqslant 0$,在复数集$\mathbf{C}$中解方程$z^2+2|z|=a$.
2. 已知关于x的二次方程$a(1+\mathrm{i})x^2+(1+a^2\mathrm{i})x+a^2+\mathrm{i}=0$有实根,求实数$a$的值.
3. 设$n\in\mathbf{N}^*$,求证:方程$z^{n+1}-z^n-1=0$有模为1的复根的充要条件是$n+2$可被6整除.
4. 已知复平面内$\triangle ABC$的顶点A,B,C对应的复数分别为$3+2\mathrm{i}$,$3\mathrm{i}$,$2-\mathrm{i}$,动点P对应的复数是z,若关于z的方程$|\bar{z}|^2+\alpha z+\bar{\alpha}\bar{z}+\beta=0$表示$\triangle ABC$的外接圆,求复数$\alpha,\beta$.

5. 如果复数 $|\omega|=1$,求证:方程 $\left(\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\right)^n=\omega\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 的所有根都是不相等的实数.

6. 设实系数方程 $x^3-x^2-ax-b=0$ 有三个正实根,求证:方程 $x^3-x^2+bx+a=0$ 必有一个正实根和两个互为共轭的虚根.

7. 设 a,b,c 为实数,方程 $x^2-(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ 有一个形如 $\alpha+\beta\mathrm{i}$ $(\alpha>0,\beta\neq0,\beta\in\mathbf{R})$ 的虚根.求证:

(1) a,b,c 都是正实数;

(2) 存在一个以 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 为边长的三角形.

8. 关于 x 的方程 $x^3+tx+s=0\left(t\in\mathbf{R},s\in\mathbf{C},\arg s=\frac{\pi}{6}\right)$ 有 3 个复数根,它们在复平面上对应的点是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形的 3 个顶点.求 s、t 的值.

第二十一章　复数与几何

【基础知识】

复数的几何意义构建了代数与几何之间的相互联系.利用复数研究几何问题的关键在于怎样选取恰当的坐标系,进而建立几何元素的复数表示,并借助复数的运算来探究平面几何问题的解决方案.

1. 两点间的距离

复平面上,任意两点 Z_1,Z_2 间的距离为 $|z_1-z_2|$.

2. 定比分点公式

设 Z 分有向线段 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 成定比 λ,即 $\frac{zz_1}{zz_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$,则 $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ 是定比分点 Z 的复数表示.特别地,当 $\lambda=1$ 时即得中点公式.

依照定比分点公式,易得平面上三点 Z_1,Z_2,Z_3 共线的充要条件是:存在三个不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3=0.\end{cases}$

推论　若 Z_1,Z_2,Z_3 不共线,且存在实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3=0,\end{cases}$$

则 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

3. 点到直线的距离

设点 Z_3 到由点 Z_1,Z_2 决定的直线 l 的距离为 d,则 $d=|z_3-z_1|\cdot|\sin\varphi|$,这里 φ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 到 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 所成的角.注意到

$$\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|\sin\varphi=\operatorname{Im}\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)=\frac{\operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1)}{|z_2-z_1|^2},$$

于是 $d=\frac{1}{|z_2-z_1|}\operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1)$ 的绝对值.

由此可知,由 Z_1,Z_2,Z_3 构成的三角形的面积

$S_{\triangle z_1z_2z_3}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1)$ 的绝对值.

4. 两直线的夹角

设 Z_0,Z_1,Z_2 为复平面上的三点,则 $\angle Z_1Z_0Z_2=\arg\left(\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right)$.由此可知,四边形 $Z_1Z_2Z_3Z_4$ 为圆内接四边形的充要条件是 $\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}:\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}=\lambda(\lambda>0)$.

5. 相似

设 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 与 $\triangle W_1W_2W_3$ 为复平面上的两个三角形.则这两个三角形直接相似的充要条件是 $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_2-\omega_1}$. (*)

事实上,(*)式等价于 $\begin{cases}\frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}=\frac{|\omega_3-\omega_1|}{|\omega_2-\omega_1|},\\ \arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)=\arg\left(\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\right),\end{cases}$

因而(*)蕴含 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 与 $\triangle W_1W_2W_3$ 直接相似.

6. 平行与垂直

$Z_1Z_2 /\!/ Z_3Z_4$ 的充要条件是 $\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=k(k\in\mathbf{R})$.

$Z_1Z_2\perp Z_3Z_4$ 的充要条件是 $\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=k\mathrm{i}(k\in\mathbf{R})$.

7. 向量旋转

将向量 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 绕 Z_1 按逆时针方向旋转 θ,再伸缩 r 倍($r>0$),得向量 $Z_1Z=\overrightarrow{Z_1Z_2}\cdot re^{\mathrm{i}\theta}$.特别地,当 $\theta=\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$ 时,表明向量 $\overrightarrow{Z_1Z}$ 与 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 所夹的角分别是 $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$;当 $r=1$ 时,表示线段 $|Z_1Z|$ 与 $|Z_1Z_2|$ 相等.

【典型例题与基本方法】

例1 平面上有5个点 A,B,C,U,V 分别表示复数 a,b,c,u,v.如果 $\triangle AUV$, $\triangle VBU$, $\triangle UVC$ 彼此直接相似,求证:$\triangle ABC$ 也与它们直接相似.

证明 在复平面上考虑问题,由题设可以写出以下 的等式

$$\frac{v-a}{u-a}=\frac{u-v}{b-v}=\frac{c-u}{v-u},$$

运用等比定理,得出

$$\frac{v-a}{u-a}=\frac{(v-a)+(u-v)+(c-u)}{(u-a)+(b-v)+(v-u)},$$

即 $$\frac{v-a}{u-a}=\frac{c-a}{b-a},$$

这正说明 $\triangle AUV \backsim \triangle ABC$.

例 2 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心，D 是边 AB 的中点，E 是 $\triangle ACD$ 的重心，求证：如果 $AB=AC$，则 $OE\perp CD$. (1983 年英国奥林匹克题)

证明① 如图 21－1，以 O 为原点，过 O 且平行于 BC 的直线为实轴建立复平面．设圆半径为 1，$\angle BOx=\theta$.

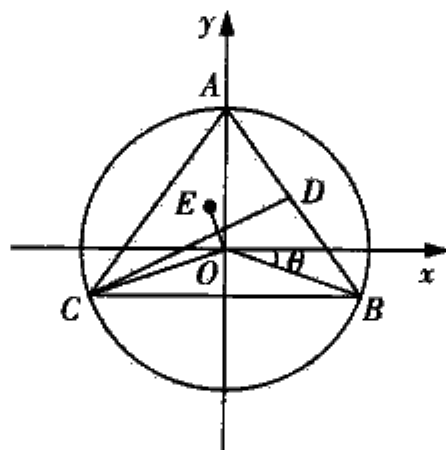


图 21－1

因为 $AB=AC$，所以

$z_A=\mathrm{i}$,

$z_B=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$,

$z_C=-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$.

于是 $$z_D=\frac{1}{2}(z_A+z_B)=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}(1-\sin\theta)\mathrm{i},$$

$$z_E=\frac{1}{3}(z_A+z_C+z_D)=-\frac{1}{6}\cos\theta+\frac{1}{2}(1-\sin\theta)\mathrm{i}.$$

由于 $$\frac{z_D-z_C}{z_E-z_O}=\frac{\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\sin\theta)\mathrm{i}}{-\frac{1}{6}\cos\theta+\frac{1}{2}(1-\sin\theta)\mathrm{i}}$$

$$=\frac{3\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+\mathrm{i}\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{-\frac{1}{3}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+\mathrm{i}\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}$$

$$=-3\mathrm{i}\cot(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$$

是纯虚数，故 $OE\perp CD$.

例 3 如图 21－2 所示，菱形 $ABCD$ 的内切圆 O 与各边分别切于点 E、F、G、H，在 $\overset{\frown}{EF}$ 与 $\overset{\frown}{GH}$ 上分别作 $\odot O$ 的切线交 AB 于 M，交 BC 于 N，交 CD 于 P，交 DA 于 Q．求证：$MQ\,/\!/\,NP$. (1995 年全国高中联赛题)

证明 如图 21－2 建立复平面．设内切圆半径为 1，$\angle DOH=\theta$(定值)，$\angle DOQ=\theta_1$，$\angle DOM=\pi-\theta_2$，则 $\angle POQ=\theta$，$\angle DOP=\theta-\theta_1$．同理，$\angle BON=\theta-\theta_2$，则

① 茹双林．复数法证明平面几何问题[J]．中等数学，1997(4)：6～11

$$z_Q=\frac{1}{\cos(\theta-\theta_1)}(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$

$$z_M=\frac{1}{\cos(\theta-\theta_2)}[\cos(\pi-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\pi-\theta_2)]$$

$$=\frac{1}{\cos(\theta-\theta_2)}(-\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

$$z_P=\frac{1}{\cos\theta_1}[\cos(\theta-\theta_1)-\mathrm{i}\sin(\theta-\theta_1)],$$

$$z_N=\frac{1}{\cos\theta_2}[-\cos(\theta-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta-\theta_2)].$$

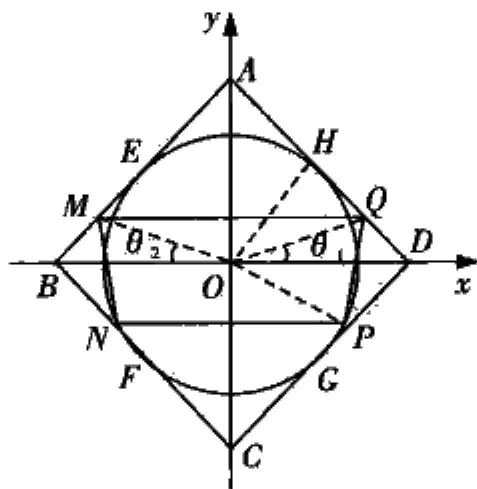


图 21－2

于是 $z_Q-z_M=\frac{1}{\cos(\theta-\theta_1)\cos(\theta-\theta_2)}\{[\cos\theta_1\cos(\theta-\theta_2)+\cos\theta_2\cos(\theta-\theta_1)]+\mathrm{i}[\sin\theta_1\cos(\theta-\theta_2)-\sin\theta_2\cos(\theta-\theta_1)]\}$,

上式虚部 $=\sin\theta_1\cos\theta\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta\sin\theta_2-\sin\theta_2\cos\theta\cos\theta_1-\sin\theta_2\sin\theta\sin\theta_1$

$=\cos\theta\sin(\theta_1-\theta_2)$.

同理，有

$$z_P-z_N=\frac{1}{\cos\theta_1\cos\theta_2}\{[\cos\theta_1\cos(\theta-\theta_2)+\cos\theta_2\cos(\theta-\theta_1)]+\mathrm{i}\cos\theta\sin(\theta_1-\theta_2)\},$$

从而 $\frac{z_Q-z_M}{z_P-z_N}=\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\cos(\theta-\theta_1)\cos(\theta-\theta_2)}\in\mathbf{R}$，故 $MQ\parallel NP$.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=30°$，O 是外心，I 是内心，边 AC 上的点 D 与 BC 上的点 E，使得 $AD=BE=AB$. 求证：$OI\perp DE$，$OI=DE$. （1988 年国家队选拔赛题）

分析 利用向量旋转，要证 $OI\perp DE$ 且 $OI=DE$，只需证明 $\overrightarrow{ED}=\mathrm{i}\cdot\overrightarrow{OI}$ 或 $\overrightarrow{DE}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\cdot\overrightarrow{OI}$ 或 $\overrightarrow{DE}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\cdot\overrightarrow{OI}$.

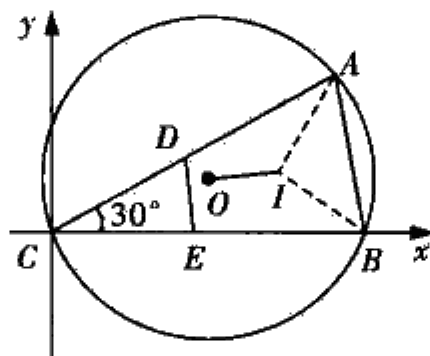


图 21－3

证法 1 如图 21－3，设 $\odot O$ 的半径为 1，则 $AB=1$，以 C 为原点，CB 所在直线为 x 轴正向建立复平面，则 $z_B=2\sin A$，$z_E=2\sin A-1$.

$z_A=2\sin B(\cos C+\mathrm{i}\sin C)$，$\overrightarrow{BE}=-1$.

于是 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BE}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}$，有 $\overrightarrow{AB}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}$.

则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}=\mathrm{e}^{-150°\mathrm{i}}$,

故 $z_D=\overrightarrow{AD}+z_A=\mathrm{e}^{-150°\mathrm{i}}+2\sin B\mathrm{e}^{30°\mathrm{i}}$.

即 $\overrightarrow{ED}=\mathrm{e}^{-150°\mathrm{i}}+2\sin B\mathrm{e}^{30°\mathrm{i}}-(2\sin A-1)$

$= (\sqrt{3}\sin B - 2\sin A + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + i(\sin B - \frac{1}{2})$.

而 $z_O = e^{i(90^\circ - A)}, z_I = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}e^{15^\circ i}$,

则$\overrightarrow{OI} = (4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos15^\circ - \sin A) + i(4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin15^\circ - \cos A)$.

即 $i \cdot \overrightarrow{OI} = (\cos A - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin15^\circ) + i(4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos15^\circ - \sin A)$.

又 $\angle A + \angle B = 150^\circ$,则可用分析法证明(见注):

$$\cos A - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin15^\circ = \sqrt{3}\sin B - 2\sin A + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

及 $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos15^\circ - \sin A = \sin B - \frac{1}{2}$.

从而$\overrightarrow{ED} = i \cdot \overrightarrow{OI}$.

故 $OI \perp DE$ 且 $OI = DE$.

注 $\cos A - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin15^\circ = \sqrt{3}\sin B - 2\sin A + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos A - 4\sin\frac{A}{2}\sin(75^\circ - \frac{A}{2})\sin15^\circ = \sqrt{3}\sin(150^\circ - A) - 2\sin A + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos A - \sin A\sin30^\circ + (1 - \cos A)(1 - \cos30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{3}{2}\sin A - 2\sin A + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

及 $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos15^\circ - \sin A = \sin B - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos15^\circ - 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos15^\circ(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} - \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -2\cos15^\circ\sin15^\circ = -\frac{1}{2}$.

证法2 如图21-3,连结 IA, IB, ID, IE, OA, OB,则$\angle AOB = 60^\circ$,且$\triangle AOB$为等边三角形.又 I 为内心,且 $AD = AB = BE$,所以$\triangle DAI \cong \triangle BAI \cong \triangle BEI$,

从而 $\angle EIB = \angle DIA = \angle AIB = \frac{1}{2}(180^\circ + \angle C) = 105^\circ, ID = IB, IE = IA$.

以 I 为复平面的原点,设 A, B 的复数为z_1, z_2,则$\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB}e^{\frac{7\pi}{6}i} = z_2 e^{\frac{7\pi}{6}i}, \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA}\cdot e^{\frac{-7\pi}{6}i}$
$= z_1 e^{\frac{-7\pi}{6}i}$,

因而$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{IE}-\overrightarrow{ID}=z_1e^{\frac{-7\pi}{6}i}-z_2e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

又$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}=(z_1-z_2)e^{\frac{\pi}{3}i}$,所以

$$\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BO}=z_2+(z_1-z_2)e^{\frac{\pi}{3}i}=z_1e^{\frac{\pi}{3}i}+z_2(1-e^{\frac{\pi}{3}i}).$$

于是 $\overrightarrow{IO}\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}=z_1e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}+z_2(1-e^{\frac{\pi}{3}i})\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}=z_1e^{\frac{-7\pi}{6}i}-z_2e^{\frac{7\pi}{6}i}$,

即$\overrightarrow{IO}\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}=\overrightarrow{DE}$,故 $DE\perp IO$ 且 $DE=IO$.

注 选择恰当的复平面原点,可使复数运算简捷.

例 5 在$\triangle ABC$中,已知$\angle A=60°$,过该三角形的内心I作直线平行于AC交AB于F.在BC边上取点P使得$3BP=BC$.求证:$\angle BFP=\frac{1}{2}\angle B$. (第 32 届 IMO 预选题)

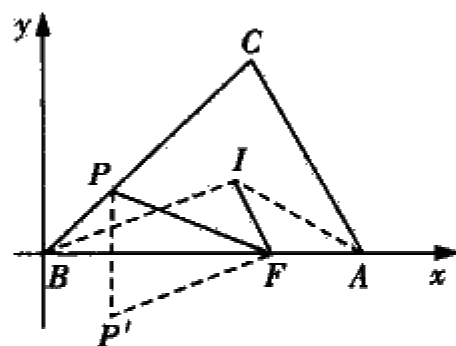


图 21 - 4

分析 如图 21 - 4,只需证 $\arg(\overrightarrow{PF})=\arg\overrightarrow{P'F}=\frac{\angle B}{2}$.

证明 设$|BI|=a$.则内切圆半径

$$r=a\sin\frac{B}{2},z_F=a(\cos\frac{B}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\frac{B}{2}).$$

$$|BC|=a\cos\frac{B}{2}+r\cot\frac{C}{2}=\frac{a}{\sin\frac{C}{2}}\sin\frac{B+C}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{2\sin\frac{C}{2}},$$

则 $z_P=\frac{1}{3}z_C=\frac{\sqrt{3}a}{6\sin\frac{C}{2}}(\cos B+i\sin B)$,

即$\overrightarrow{P'F}=z=z_F-\overline{z_P}=z_F-\frac{\sqrt{3}a}{6\sin\frac{C}{2}}(\cos B-i\sin B)$,

则 $\tan[\arg(\overrightarrow{P'F})]=\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Re}z}=\frac{\sin B}{4\sin\frac{C}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{B}{2})-\cos B}$

$$=\frac{\sin B}{1+\cos B}=\tan\frac{B}{2},$$

即 $\arg(\overrightarrow{P'F})=\frac{\angle B}{2}$.

故 $\angle BFP=\frac{1}{2}\angle B$.

例 6 设 A、B、C 分别对应复数 $z_0=ai,z_1=\frac{1}{2}+bi,z_2=1+ci$ 对应的不共线

的三点(a、b、c 都是实数).证明:曲线 $z = z_0 \cdot \cos^4 t + 2z_1 \cdot \cos^2 t \cdot \sin^2 t + z_2 \cdot \sin^4 t (t \in \mathbf{R})$ 与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线只有一个公共点,并求出此点.

(2003 年全国高中联赛题)

证明 设 $z = x + yi(x, y)$,则

$x + yi = a\cos^4 t \cdot i + 2(\frac{1}{2} + bi)\cos^2 t \cdot \sin^2 t + (1 + ci)\sin^4 t$.

实虚部分离,可得

$x = \cos^2 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t = \sin^2 t$,

$y = a(1-x)^2 + 2b(1-x)x + cx^2 (0 \leqslant x \leqslant 1)$,

即 $y = (a + c - 2b)x^2 + 2(b - a)x + a$. ①

因为 A、B、C 三点不共线,故 $a + c - 2b \neq 0$.可见所给曲线是抛物线段,如图 21 - 5,AB 和 BC 的中点分别是 $D(\frac{1}{4}, \frac{a+b}{2})$ 和 $E(\frac{3}{4}, \frac{b+c}{2})$.

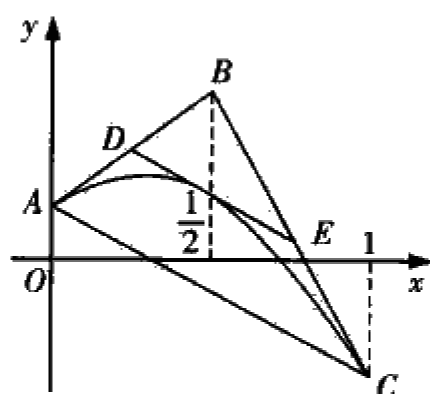


图 21 - 5

所以,直线 DE 的方程为

$y = (c - a)x + \frac{1}{4}(3a + 2b - c)$. ②

由①、②联立得

$(a + c - 2b)(x - \frac{1}{2})^2 = 0$.

由于 $a + c - 2b \neq 0$,故 $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$.于是 $x = \frac{1}{2}$.注意到 $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$,所以抛物线与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线 DE 有且只有一个公共点,此点的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{a+c+2b}{4})$,其对应的复数为

$z = \frac{1}{2} + \frac{a+c+2b}{4} \cdot i$.

【解题思维策略分析】

1. 利用图形中的特殊点作为复平面原点

例 7 对于任意三角形,求证:

(1) 三边上的高共点(垂心);

(2) 外心、垂心、重心共线,并且外心到重心的距离等于重心到垂心的距离的一半.

证明 设在复平面上,$\triangle ABC$ 的外心为原点 O,如图 21 - 6,且不妨设 $\triangle ABC$ 内接

于单位圆,用该点的字母表示该点对应的复数,则

$|A| = |B| = |C| = 1,$

即 $\bar{A} = \frac{1}{A}, \bar{B} = \frac{1}{B}, \bar{C} = \frac{1}{C}.$

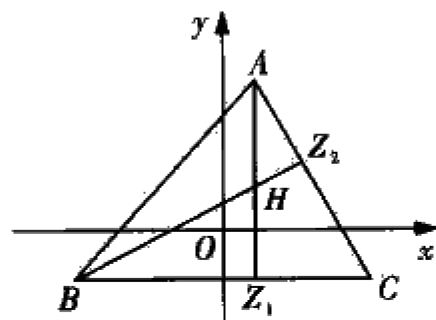


图 21 - 6

从顶点 A,B,C 向对边引垂线,垂足分别为 Z_1,Z_2,Z_3. 因为 $AZ_1 \perp BC$,

所以 $\operatorname{Re}\left(\frac{Z_1 - A}{C - B}\right) = 0,$

即 $\operatorname{Re}[(Z_1 - A)\overline{(C - B)}] = 0.$

化简得 $Z_1 - BC \cdot \overline{Z_1} = A - \frac{BC}{A}.$

设 AZ_1 与 BZ_2 交于点 H,同理可得

$$H - BC \cdot \overline{H} = A - \frac{BC}{A}, \tag{①}$$

$$H - CA \cdot \overline{H} = B - \frac{CA}{B}. \tag{②}$$

由 ①,② 解得

$H = A + B + C.$

因 H 是 A、B、C 的对称式,可见 CZ_3 也过点 H,故 $\triangle ABC$ 三条高交于点 H.

由于复数 $O, \frac{1}{3}(A + B + C), A + B + C$ 分别对应 $\triangle ABC$ 的外心、重心、垂心,故它们显然共线,且外心到重心的距离等于重心到垂心的距离的一半.

注 以三角形的外心作为复平面原点,则 $\triangle ABC$ 的九点圆的圆心对应的复数为 $\frac{1}{2}(A + B + C)$;在 $\triangle ABC$ 中,令 $BC = a, CA = b, AB = c$,则 $\triangle ABC$ 的内心对应的复数为 $\frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$.

例 8 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为 $\odot O$ 的内接四边形,H_1,H_2,H_3,H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_3A_4A_1$, $\triangle A_4A_1A_2$, $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心.求证:H_1,H_2,H_3,H_4 四点在同一个圆上,并定出该圆的圆心位置. (1992 年全国高中联赛题)

证明 设在复平面上,$\odot O$ 的圆心为原点.因 H_1 为 $\triangle A_2A_3A4$ 的垂心,则

$H_1 = A_2 + A_3 + A_4 = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) - A_1,$

同理,有

$H_k = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) - A_k, k = 2,3,4.$

设 $\odot O$ 的半径为 R, $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$,则

$|H_k - A| = |A_k| = R(k = 1,2,3,4)$.

这说明 $H_k(k = 1,2,3,4)$ 在以 A 点为圆心,半径为 R 的圆周上.

例9 如图21－7,$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形,现固定 $\triangle ABC$,而将 $\triangle ADE$ 绕 A 点在平面上旋转.试证:不论 $\triangle ADE$ 旋转到什么位置,线段 EC 上必存在点 M,使得 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.(1987年全国高中联赛题)

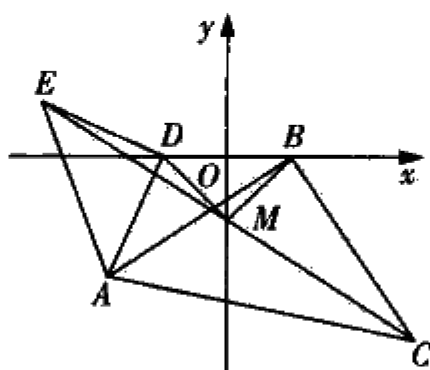


图21－7

证法1 由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 不全等,所以不管 $\triangle ADE$ 在什么位置上,B 与 D 都不重合.为方便起见,取 B,D 所对应的复数为实轴上的一对相反数:

$$B = a, D = -a(a \in \mathbf{R}).$$

其余的点,就用该点的字母表示该点的复数,如图21－7.由题设知

$$E - D = (A - D)(-\mathrm{i}),$$
$$C - B = (A - B)\mathrm{i},$$

即

$$E + a = (A + a)(-\mathrm{i}),$$
$$C - a = (A - a)\mathrm{i}.$$

相加,得

$$E + C = -2a\mathrm{i}.$$

故存在 EC 的中点

$$M = \frac{E + C}{2} - a\mathrm{i},$$

与 $B = a, D = -a$ 组成等腰直角三角形.

证法2 把复平面的原点置于 A 点,C 置于正实轴上,因此 $A = 0$.不妨设 $C = \sqrt{2}$,则 A、B、C 对应的复数分别为 $O, \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}, \sqrt{2}$.先设 E 在 AC 上,且设 E 对应的复数为 λ,则 $0 < \lambda < \sqrt{2}$,且点 D 对应的复数为 $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$.

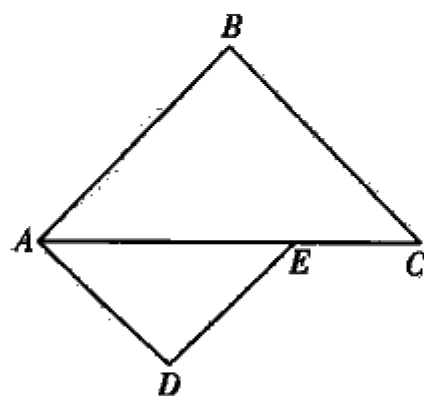


图21－8

当 $\triangle ADE$ 绕 A 旋转任一角度 θ 之后,点 E 对应的复数为 $\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,而点 D 对应的复数变为 $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{(\theta-\frac{\pi}{4})\mathrm{i}}$.取 EC 的中点 M,则点 M 对应的复数为 $\frac{1}{2}(\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \sqrt{2})$.考察点 B、M、D 所对应的复数仍用该点的字母表示,易见

$$M(1+\mathrm{i}) = M\cdot\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})\mathrm{i}} + e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = D\cdot\mathrm{i}+B.$$

由此得出 $(B-M)\cdot\mathrm{i} = D-M$.

上式表示 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

例 10 设 D 是 $\triangle ABC$ 内的一点,满足 $\angle DAC = \angle DCA = 30°$,$\angle DBA = 60°$,$E$ 是边 BC 的中点,F 是边 AC 的三等分点,满足 $AF = 2FC$.求证:$DE\perp EF$.

(2007 年女子奥林匹克题)

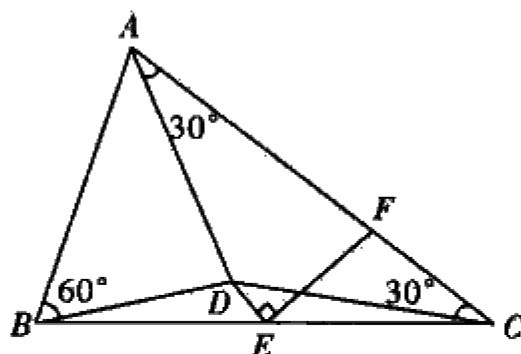


图 21－9

证明 把复平面原点置于 B 点,D 点置于正实轴上.

注意到 $\omega = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,则可令 $B=0, D=1, A=-\omega^2 k$.

经计算可得(用点的字母表示该点对应的复数):

$$C = 1-\omega^2-\omega k,$$

$$E = \frac{B+C}{2} = \frac{1-\omega^2-\omega k}{2},$$

$$F = \frac{2C+A}{3} = \frac{2-2\omega^2-2\omega k-\omega^2 k}{3},$$

于是

$$E-D = \frac{1+\omega^2+\omega k}{2},$$

$$F-E = \frac{1-\omega^2-(\omega+2\omega^2)k}{6},$$

所以

$$\frac{F-E}{E-D} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\omega^2-1+(\omega+2\omega^2)k}{1+\omega^2+\omega k} = \frac{\omega-\omega^2}{3}\cdot\frac{k+1}{k-1} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{k+1}{k-1},$$

因此 $DE\perp EF$,即 $\angle DEF = 90°$.

2. 关注复数运算的几何意义处理问题

例 11 如图 21－10,给定凸四边形 $ABCD$,$\angle B+\angle D < 180°$,P 是平面上的动点,令

$$f(P) = PA\cdot BC + PD\cdot CA + PC\cdot AB.$$

(1) 求证:当 $f(P)$ 达到最小值时,P、A、B、C 四点共圆;

(2)(略) (2008 年全国高中联赛题)

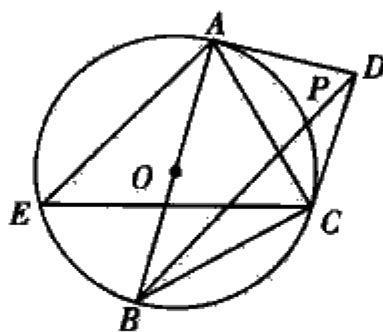


图 21－10

证明 (1) 引入复平面,仍用 A、B、C 等代表 A、B、C 等所对

应的复数.

由三角形不等式,对于复数 z_1、z_2 有

$$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|,$$

当且仅当 z_1 与 z_2(复向量)同向时,上式等号成立.

有 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}|\geqslant|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}|$.

故 $|(A-P)(C-B)|+|(C-P)(B-A)|$

$$\geqslant|(A-P)(C-B)+(C-P)(B-A)| \quad ①$$

$$=|-P\cdot C-A\cdot B+C\cdot B+P\cdot A|$$

$$=|(B-P)(C-A)|=|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|.$$

故 $|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{PD}|\cdot|\overrightarrow{CA}|$

$$\geqslant|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{PD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|$$

$$=(|\overrightarrow{PB}|+|\overrightarrow{PD}|)\cdot|\overrightarrow{AC}|$$

$$\geqslant|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|. \quad ②$$

式①取等号的条件是:

复数 $(A-P)(C-B)$ 与 $(C-P)(B-A)$ 同向.

故存在实数 $\lambda>0$,使得

$$(A-P)(C-B)=\lambda(C-P)(B-A),$$

$$\frac{A-P}{C-P}=\frac{B-A}{C-B}.$$

所以,$\arg\frac{A-P}{C-P}=\arg\frac{B-A}{C-B}$.

向量 $\overrightarrow{PC}$ 旋转到 $\overrightarrow{PA}$ 所成的角等于 $\overrightarrow{BC}$ 旋转到 $\overrightarrow{AB}$ 所成的角,从而,P、A、B、C 四点共圆.

式②取等号的条件显然为 B、P、D 共线且点 P 在 BD 上.

故当 $f(P)$ 达最小值时,点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上,P、A、B、C 四点共圆.

例 12 设 P 是锐角三角形 ABC 内一点,AP、BP、CP 分别交边 BC、CA、AB 于点 D、E、F,已知 $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.求证:$P$ 是 $\triangle ABC$ 的重心.

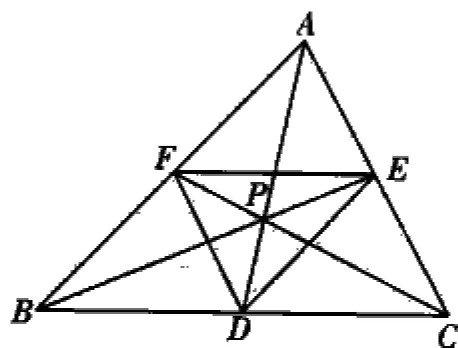


图 21－11

(2007 年西部奥林匹克题)

证明 本题的结论对 $\triangle ABC$ 为一般的三角形都成立.我们采用复数方法予以证明.

如图 21－11,设 P 为复平面上的原点,并直接用 X 表示点 X 对应的复数,则存在正实数 α、β、γ,使得 $\alpha A+\beta B+\gamma C=0$,且 $\alpha+\beta+\gamma=1$.

由于 D 为 AP 与 BC 的交点，可解得 $D=-\frac{\alpha}{1-\alpha}A$.

同样地，$E=-\frac{\beta}{1-\beta}B$，$F=-\frac{\gamma}{1-\gamma}C$.

利用 $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$ 可知 $\frac{D-E}{A-B}=\frac{E-F}{B-C}$，于是

$$\frac{\gamma BC}{1-\gamma}+\frac{\beta AB}{1-\beta}+\frac{\alpha CA}{1-\alpha}-\frac{\alpha AB}{1-\alpha}-\frac{\beta BC}{1-\beta}-\frac{\gamma CA}{1-\gamma}=0.$$

化简得

$$(\gamma^2-\beta^2)B(C-A)+(\alpha^2-\gamma^2)A(C-B)=0.$$

这时，若 $\gamma^2\neq\beta^2$，则 $\frac{B(C-A)}{A(C-B)}\in\mathbf{R}$，因此，$\dfrac{\frac{C-A}{C-B}}{\frac{B-A}{P-B}}\in\mathbf{R}$，这要求 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，与 P 在 $\triangle ABC$ 内矛盾，所以 $\gamma^2=\beta^2$，进而 $\alpha^2=\gamma^2$，得 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$. 即 P 为 $\triangle ABC$ 的重心. 命题获证.

例 13 锐角三角形 ABC 外接圆在 A 和 B 处的切线相交于 D，M 是 AB 的中点，证明：$\angle ACM=\angle BCD$.（2007 年国家队集训题）

证明 用复数法.

设 $\triangle ABC$ 外接圆为复平面上的单位圆，点 A、B、C、D、M 分别用复数 a、b、c、a、m 表示，则 $\angle ACM=\angle BCD\Leftrightarrow H=\frac{b-c}{d-c}:\frac{m-c}{a-c}\in\mathbf{R}$，$d=\frac{2ab}{a+b}$，$m=\frac{a+b}{2}$.

故 $H=\dfrac{(b-c)(a-c)}{c^2-\frac{2cab}{a+b}-\frac{ac+bc}{2}+ab}=\overline{H}\Rightarrow H\in\mathbf{R}$.

例 14 考虑在同一平面上半径为 R 与 $r(R>r)$ 的两个同心圆. 设 P 是小圆周上的一个定点，B 是大圆周上的一个动点. 直线 BP 与大圆周相交于另外一点 C. 过点 P 且与 BP 垂直的直线 l 与小圆周相交于另一点 A（如果 l 与小圆相切于 P，则 $A=P$）.

(1) 求表达式 $BC^2+CA^2+AB^2$ 所取值的集合；

(2) 求线段 AB 的中点的轨迹.

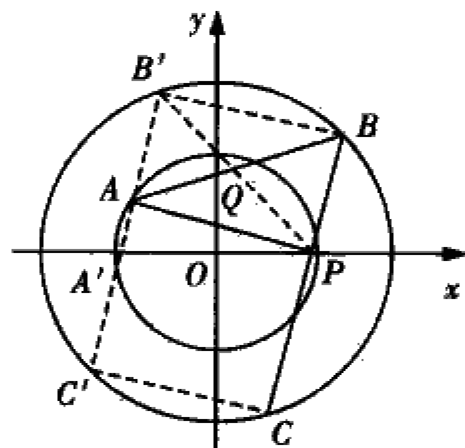


图 21 - 12

解 (1) 如图 21 - 12，作矩线 $BCC'B'$，显然 $B'C'$ 过点 A. 设 $B'C'$ 与小圆的另一交点为 A'，由于 O 到 BC 的距离等于 O 到 AA' 的距离，所以

$z_B+z_{C'}+z_A+z_{A'}=0$，即 $z_A+z_B+z_C=-z_{A'}$．有

$BC^2+CA^2+AB^2$

$=(z_C-z_B)(\overline{z_C}-\overline{z_B})+(z_A-z_C)(\overline{z_A}-\overline{z_C})+(z_B-z_A)(\overline{z_B}-\overline{z_A})$

$=4R^2+2r^2-(z_B\cdot\overline{z_A}+z_A\cdot\overline{z_B}+z_C\cdot\overline{z_B}+z_B\cdot\overline{z_C}+z_A\cdot\overline{z_C}+z_C\cdot\overline{z_A})$

$=6R^2+3r^2-(z_A+z_B+z_C)(\overline{z_A}+\overline{z_B}+\overline{z_C})$

$=6R^2+2r^2$．(定值)

当 A 与 P 重合时，容易验证 $BC^2+CA^2+AB^2$ 也等于 $6R^2+2r^2$．

故表达式的取值集合为 $\{6R^2+2r^2\}$．

(2) 显然 $PBB'A$ 也为矩形，故 AB 中点 Q 也是 PB' 的中点，所以，$z_{B'}+z_P=2z_Q$，则 $z_{B'}=2z_Q-z_P$．

又 B' 在大圆上，有 $|z_{B'}|=R$，则

$|2z_Q-z_P|=R$，即 $\left|z_Q-\dfrac{z_P}{2}\right|=\dfrac{R}{2}$．

这表明，轨迹是以线段 OP 的中点为圆心，以 $\dfrac{R}{2}$ 为半径的一个圆周．

【模拟实战】

习题 A

1. 设 O、H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，请以 O 为复平面原点，推导垂心 H 所对应的复数．
2. 求证：复平面上三点 z_1、z_2、z_3 共线的充分必要条件是：$\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1\in\mathbf{R}$ 或 $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\in\mathbf{R}$．
3. 设 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正向绕行的(顶点 Z_1,Z_2,Z_3 依逆时针方向排列)．求证：$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正三角形的充要条件是 $z_1+\omega z_2+\omega^2z_3=0$，其中 ω 是三次单位根 $e^{\frac{2}{3}\pi}$．
4. 设 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的任一点，记 $BC=a,CA=b,AB=c,PA=u,PB=v,PC=\omega$，求证：$\dfrac{u}{a}+\dfrac{v}{b}+\dfrac{\omega}{c}\geqslant\sqrt{3}$．
5. 若凸四边形对边中点的连线叫做四边形的中位线，两条中位线之和等于周长之半．求证：此四边形为平行四边形．
6. 如图 21－13，正方形 $ABCD$ 的一边 AB 在直线 $y=x+4$ 上，顶点 C、D 在抛物线 $y^2=$

x 上,求正方形 $ABCD$ 的面积.

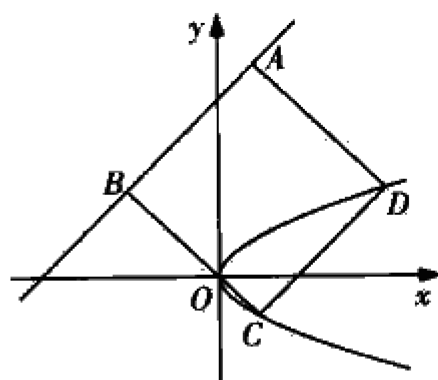


图 21－13

7. 设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 内部一点,使 $\angle ADB = \angle ACB + 90°$,且 $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.计算比值:$\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.
8. 在矩形 $ABCD$ 外接圆的弧 AB 上取一个不同于顶点 A、B 的点 M.点 P、Q、R、S 是 M 分别在直线 AD、AB、BC 与 CD 上的投影.证明:直线 PQ 与 RS 互相垂直.

习题 B

1. 设 $\triangle ABC$ 的三条中线交于 O 点.证明:$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$.
2. 如图 21－14,证明:设点 O 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上,且不与顶点重合.则 $OC \cdot AB < OA \cdot BC + OB \cdot AC$. (1983 年捷克竞赛题)

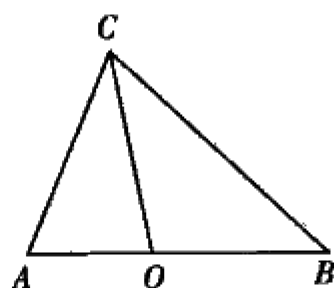


图 21－14

3. 正 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A、B 分别沿着 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 同时以相同的角速度按顺时针方向运动.证明:点 C 沿着某一圆周作等速运动. (1961 年全俄奥林匹克题)
4. 如图 21－15,在 $\triangle ABC$ 的三边上向外作 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$,使 $\angle PBC = \angle CAQ = 45°$,$\angle BCP = \angle QCA = 30°$,$\angle ABR = \angle RAB = 15°$.求证:$\angle PRQ = 90°$,$QR = PR$. (第 17 届 IMO 题)

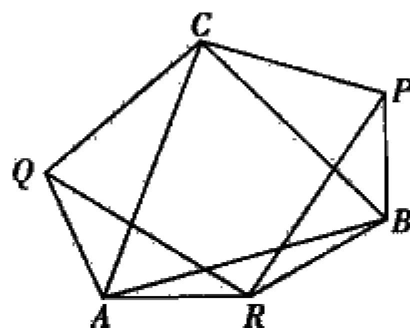


图 21－15

5. **(伯恩斯坦定理)** 如果 a,b,c,d 顺次是凸四边形 $ABCD$ 的边长,m 和 n 是它的对角线长,则 $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(A + C)$.
6. 设 $ABCD$ 为凸四边形,$AC = BD$.在它的边 AB,BC,CD,DA 上分别作中心为 O_1,O_2,O_3,O_4 的等边三角形,求证:$O_1O_3 \perp O_2O_4$.
7. 在 $\triangle ABC$ 中,$2AB = BC + CA$.求证:此三角形的内心、外心、BC 的中点以及 AC 的中

点四点共圆.

8. 正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC 和 CE 分别被内分点 M、N 分成如下的比例：$\frac{AM}{AC}=\frac{CM}{CE}=r$. 若 B、M、N 三点共线，试求比值 r.

9. 已知 P 为正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆上任一点.

(1) 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}|PA_k|$ 的最大值和最小值；

(2) 当 P 不限制在圆周上时，$\sum\limits_{k=1}^{n}|PA_k|$ 的最小值是多少？

第六篇 多项式问题

第二十二章 多项式的因式分解与求值

【基础知识】

设 $n \in \mathbf{N}, a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{C}$(或 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{Z}$), $a_n \neq 0$,则称 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为复(或实或整)系数一元 n 次多项式,其中 $a_0, \cdots, a_n$ 称为多项式的系数.

若多项式 $f(x)$ 的次数为 n,则记为 $\deg f(x) = n$.

单独的一个非零复数,约定为零次多项式;系数都是零的多项式,称为零多项式.

一元多项式有如下基本定理:

定理 1(多项式恒等定理) 对于两个 n 次多项式,

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

$\Leftrightarrow a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \cdots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$.

定理 2 对于多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$, $g(x) \neq 0$,必存在多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$,使得 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 或 $r(x) = 0$,且 $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$.

定理 2 称为**带余除法定理**,若 $r(x) = 0$,则称多项式 $f(x)$ 能被多项式 $g(x)$ 整除,记为 $g(x) \mid f(x)$.类似于数的整除性,关于多项式的整除性,有以下性质:

(1) 若 $h(x) \mid g(x)$, $g(x) \mid f(x)$,则 $h(x) \mid f(x)$.

(2) 若 $h(x) \mid f(x)$,则对任何多项式 $g(x)$, $h(x) \mid f(x) \cdot g(x)$.

(3) 若 $h(x) \mid f(x)$, $h(x) \mid g(x)$,则对任何多项式 $u(x)$ 及 $v(x)$,有 $h(x) \mid [u(x) \cdot$

$f(x)+v(x)\cdot g(x)]$.

(4) $g(x)\mid f(x), f(x)\mid g(x) \Leftrightarrow f(x)=cg(x)$（$c$ 为非零常数）.

定理 3（余数定理） 多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余数为 $f(a)$.

注 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的余数为 $f\left(\frac{b}{a}\right)$.

定理 4（因式定理） 多项式 $f(x)$ 有因式 $x-a$ 的充要条件是 $f(a)=0$.

注 $f(x)$ 有因式 $ax-b$ 的充要条件是 $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$.

定理 5 整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 有因式 $b_mx^m+\cdots+b_0$（$b_i\in\mathbf{Z}$, $m<n$）的充分必要条件是 b_m 是 a_n 的约数，b_0 为 a_0 的约数.

下面，我们再介绍一下多元多项式的有关概念.

设 k_{ij} 是非负整数（$i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,n$），$a_i\in\mathbf{C}$（或 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{Z}$）（$i=1,2,\cdots,s$），则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1^{k_{11}}x_2^{k_{12}}\cdots x_n^{k_{1n}}+a_2x_1^{k_{21}}x_2^{k_{22}}\cdots x_n^{k_{2n}}+\cdots+a_sx_1^{k_{s1}}x_2^{k_{s2}}\cdots x_n^{k_{sn}}$ 为复（或实或整）系数 n 元多项式. a_i 叫做系数，每一项指数的和分别叫做各项的次数，所有各项的次数中最大的数叫做这个 n 元多项式的次数. 如果各项的次数都相同，称为齐次多项式.

如果 n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，对于任意 i,j 且 $1\leqslant i<j\leqslant n$,

(1) 都有 $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$（即任意两个变数交换，多项式形式不变），则称此 n 元多项式为对称多项式；

(2) 都有 $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=-f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$（即任意两个变数交换，多项式添上"－"后形式不变），则称此 n 元多项式为交代多项式；

(3) 如果可将变数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 按一定顺序轮换，则称此 n 元多项式为轮换多项式.

对称式、交代式和轮换式之间有如下性质：

(1) 两个同变数的对称式的和、差、积、商（能整除）仍是对称式.

(2) 两个同变数的交代式的和、差仍是交代式，它们积、商（能整除）则是对称式.

(3) 两个同变数的轮换式的和、差、积、商（能整除）仍是轮换式.

(4) 同变数的对称式与交代式的和、商（能整除）则是交代式.

(5) 多个变数的交代式，必有其中任意两变数之差的因式.

【典型例题与基本方法】

利用 $x=10$ 时对 $f(x)$ 的数值进行质因数分解去寻求有理整式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的有理因式是值得我们注意的.

例 1 将多项式 $f(x)=x^8+x^7+1$ 在整数范围内分解因式.

（1978 年全国高中联赛题）

解 令 $x=10$,则 $f(10)=10^8+10^7+1=110000001=3\cdot37\cdot880991$.

由于 3,37,990991 是三个质数,将 $x=10$ 代回时,有 $3=10-7=x-7,37=30+7=40-3$,即 $37=3x+7$ 或 $43-x$.注意到定理 5,但 $f(x)$ 的常数项为 1,故 $f(x)$ 的因式的常数项也应为 1,因此,$x-7,3x+7$ 或 $4x-3$ 都不可能是 $f(x)$ 的一次因式.

注意 $3\cdot37=111$,$f(x)$ 有可能有二次因式 x^2+x+1.当 990991 用 $x=10$ 代回时,有

$$\begin{aligned}990991&=9\cdot10^5+9\cdot10^4+9\cdot10^2+9\cdot10+1\\&=(10-1)\cdot10^5+(10-1)\cdot10^4+(10-1)\cdot10^2+(10-1)\cdot10+1\\&=10^6-10^4+10^3-10+1\\&=x^6-x^4+x^3-x+1\end{aligned}$$

经检验,$x^2+x+1,x^6-x^4+x^3-x+1$ 确为 $f(x)$ 的因式.故

$$f(x)=(x^2+x+1)\cdot(x^6-x^4+x^3-x+1).$$

注 这种因式分解的方法的步骤可归结如下:

(1) 令 $x=10$ 代入原式,进行数的质因数分解.

(2) 把所得的质因数用 x 的代数式换回.

(3) 用所有出现的 x 的因式试除已知多项式,探求因式的特征,再因式分解.

(4) 有些多项式在 $x=10$ 的值作因数分解后,还须将因数重新组合,从而得出原式可能出现的因式.例如,对于 x^2-4,用 $x=10$ 代入后得 $x^2-4=10^2-4=3\cdot2^5$,它有多种组合因数的方式,然而只有一种 $12\cdot8$ 才是所需要的.

(5) 有些多项式的系数是分数时,应先提出来.

(6) 最后还需要进行检验.

例 2 分解因式 $f(x,y,z)=x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$.

解 因 $f(x,y,z)$ 是关于 x,y,z 的交代式,所以必有因式 $x-y,y-z,z-x$,于是有因式 $(x-y)(y-z)(z-x)$.又 $f(x,y,z)$ 是四次齐次式,所以它还有一个一次对称式的因式,故可设

$$f(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)\cdot k(x+y+z).$$

比较原式与所设式的项 x^3y 的系数,得 $k=-1$.

故 $f(x,y,z)=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.

注 此例也可以运用微积分知识分解因式.

记已知式为 $g(x)$,y,z 看作常数,对 x 求导,有

$$g'(x)=3x^2(y-z)-y^3+z^3.$$

对 x 积分得 $g(x)=x^3(y-z)-(y^3-z^3)x+c_1$,而 $c_1=g(0)=y^3z-z^3y$,

于是 $g(x)=x^3(y-z)-(y^3-z^3)x+yz(y^2-z^2)=(y-x)\cdot h(x)$.

其中 $h(x)=x^3-xy^2-xyz-xz^2+y^2z+yz^2$.

又对 y 求导,有 $h'(y)=-2xy-xz+2yz+z^2=2y(z-x)-xz+z^2$.

再对 y 积分,得 $h(y)=y^2(z-x)+z(z-x)y+c_2$,而 $c_2=h(0)=x^3-xz^2$.于是 $h(x)=(z-x)(y^2+yz-xz-x^2)=(z-x)(y-x)(x+y+z)$.

故 $f(x)=-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$

例 3 用微积分方法分解因式$[(a-c)^2+(b-d)^2](a^2+b^2)-(ad-bc)^2$.

解 由于已知式中变量 c 的次数最低,所以视已知式为关于 c 的函数$f(c)$,对其求导,有 $f'(c)=-2(a-c)(a^2+b^2)+2b(ad-bc)=2a(ac-b^2+bd-a^2)$.又对 c 积分,得 $f(c)=(ac-b^2+bd-a^2)^2+c_0$,

而 $c_0=f(a)=(b-d)^2(a^2+b^2)-a^2(b-d)^2-(-b^2-bd)^2=0$.

因此,原式 $=(ac-b^2+bd-a^2)^2$.

例 4 分解因式 $f(x,y,z)=(y^2-z^2)(1+xy)(1+xz)+(z^2-x^2)(1+yz)(1+xy)+(x^2-y^2)(1+yz)(1+xz)$.

解 $f(x,y,z)$ 是一个关于 x,y,z 的六次非齐次轮换式.当 $y=z$ 时,原式 $=0$.又根据轮换性,所以原多项式有因式$(y-z)(z-x)(x-y)$,这是一个三次齐次轮换式,那么另一个因式是一个三次非齐次轮换式,故可设 $f(x_1,y,z)=(y-z)(z-x)(x-y)\cdot[k_1(x^3+y^3+z^3)+k_2(x^2y+y^2z+z^2x)+k_3(xy^2+yz^2+zx^2)+k_4xyz+k_5(x^2+y^2+z^2)+k_6(xy+yz+zx)+k_7(x+y+z)+k_8]$.

比较所设式与原式中 x 的最高次幂的系数得$k_1=k_2=k_3=k_5=0$,于是,上式化为 $f(x,y,z)=(y-z)(z-x)(x-y)\cdot[(k_4xyz+k_6(xy+yz+zx)$

$+k_7(x+y+z)+k_8]$.

再比较上式与原式中 x^3y^2 项的系数得 $k_6=0$,比较 x^3y 的系数得$k_7=1$,比较 x^2y 的系数得 $k_8=0$,再令 $z=1,y=2,x=3$,得 $k_4=1$.故

$f(x,y,z)=(y-z)(z-x)(x-y)(xyz+x+y+z)$.

例 5 对于非负整数 n,有 $23\mid(5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1})$.

证明 考虑取 $23=x$,令 $f(x)=5(x+2)^n+2^n(x-5)$.

注意到 $f(0)=0$,则 $x\mid f(x)$.

故 $23\mid(5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1})$.

例 6 设 a,b,c 是三个不同的实数,$p(x)$ 是实系数多项式.已知:(1)$p(x)$ 除以 $x-a$ 得余数 a;(2)$p(x)$ 除以 $x-b$ 得余数 b;(3)$p(x)$ 除以 $x-c$ 得余数 c.求多项式 $p(x)$ 除以$(x-a)(x-b)(x-c)$ 所得的余式. (1990 年意大利竞赛题)

解 由 $p(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数为 a,故可设

$p(x)=(x-a)\cdot Q_1(x)+a.$ ①

于是 $p(b)=(b-a)\cdot Q_1(b)+a=b$.又注意到 $a\neq b$,

所以 $Q_1(b)=1$,即有 $Q_1(x)=(x-b)\cdot Q_2(x)+1$,

将上式代入①,得 $p(x)=(x-a)(x-b)\cdot Q_2(x)+x$. ②

又由条件(3),有 $p(c)=(c-a)(c-b)\cdot Q_2(c)+c=c$,

得 $Q_2(c)=0$,即 $Q_2(x)=(x-c)\cdot Q_3(x)$.

又将上式代入②,得 $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdot Q_3(x)+x$.

因此,$p(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 所得余式为 x.

注 也可设 $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdot Q(x)+r(x)$ 来解.

例 7 设 $p(x,y)$ 是两个变量 x,y 的多项式,对各个 x,y 有 $p(x,y)=p(y,x)$(例如多项式 $x^2-2xy+y^2$ 就满足这个条件).已知 $x-y$ 是 $p(x,y)$ 的因子,证明:$(x-y)^2$ 是 $p(x,y)$ 的因子. (第 8 届加拿大奥林匹克题)

证明 由 $p(x,y)$ 有因子 $x-y$,即可设

$p(x,y)=(x-y)\cdot Q(x,y)$.

于是,$(x-y)\cdot Q(x,y)=p(x,y)=p(y-x)=(y-x)\cdot Q(y,x)$.

这表明,对一切 x,y,有 $(x-y)\cdot[Q(x,y)+Q(y,x)]=0$.

这样,对于一切 x,y(显然 $x\neq y$),就有 $Q(x,y)+Q(y,x)=0$.

而且,因为 $Q(x,y)$ 是多项式,所以对一切 x,有

$Q(x,x)=0$,即 $x-y$ 是 $Q(x,y)$ 的因式.

故 $(x-y)^2$ 是 $p(x,y)$ 的因子.

例 8 证明:对任何整数 x 和 y,代数式

$x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$ 的值不会等于 33.

(第 9 届莫斯科奥林匹克题)

证明 将所给代数式分解因式得

$(x-2y)(x-y)(x+y)(x+2y)(x+3y)$.

如果 $y=0$,那么这个代数式为 x^5.显然不可能存在整数 x,使 $x^5=33$.

如果 $y\neq 0$,那么这个代数式的五个因式的值两两不同,但 33 的因数只有 -33,-11,-3,-1,1,3,11,33.如果把 33 分解成五个不同的因数的乘积,显然这五个因数中不能包含 ± 33,也不能包含 ± 11,由此可见,33 不可能分解成五个不同因数的乘积,故此时代数式的值不可能等于 33.

例 9 a,b,c 取何值时,多项式 x^4+ax^2+bx+c 被 $(x-1)^3$ 除尽?

(基辅奥林匹克题)

解 多项式 x^4+ax^2+bx+c 除以 $x-1$ 得商式

$P_1(x) = x^3 + x^2 + (a+1)x + a + b + 1$ 及余式 $Q_1(x) = a + b + c + 1$.

由题设,知 $Q_1(x) = a + b + c + 1 = 0$. ①

又 $P_1(x)$ 除以 $x - 1$ 得商式

$P_2(x) = x^2 + 2x + (a+3)$ 及余式 $Q_2(x) = 2a + b + 4$.

由题设,知 $Q_2(x) = 2a + b + 4 = 0$. ②

再由 $P_2(x)$ 除以 $x - 1$ 得商式

$P_3(x) = x + 3$ 及余式 $Q_3(x) = a + b$.

由题设,知 $Q_3(x) = a + 6 = 0$,即 $a = -6$.

将 $a = -6$ 代入②,得 $b = 8$.

又将 $b = 8, a = -6$ 代入①,得 $c = -3$.

故 $a = -6, b = 8, c = -3$ 为所求.

例 10 设 $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$,其中 a,b,c,d 为常数,且 $p(1) = 1993$, $p(2) = 3986, p(3) = 5979$.试计算 $\frac{1}{4}[p(11) + p(-7)]$. (1993 年澳门奥林匹克题)

解 令 $Q(x) = p(x) - 1993x$,则 $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$.

从而 $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$.

于是,由 $p(x) = Q(x) + 1993x$,可得

$$\frac{1}{4}[p(11) + p(-7)] = \frac{1}{4}[Q(11) + 1999 \cdot 11 + Q(-7) + 1993 \cdot (-7)]$$

$$= \frac{1}{4}[Q(11) + Q(-7)] + 1993.$$

但 $Q(11) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot (11 - r)$,

$Q(-7) = (-8) \cdot (-9) \cdot (-10) \cdot (-7 - r)$,

所以 $Q(11) + Q(-7) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 18 = 12960$.

故 $\frac{1}{4}[p(11) + p(-7)] = 3240 + 1993 = 5233$.

例 11 如果 $p(x)$ 是一个 n 次多项式,且对 $k = 0,1,2,\cdots,n$,有 $p(k) = \frac{k}{k+1}$.试确定 $p(n+1)$. (第 4 届美国奥林匹克题)

解 设 $Q(x) = (x+1) \cdot p(x) - x$.由已知条件可知,$Q(x)$ 是一个次数不大于 $n+1$ 的多项式,并且当 $x = 0,1,2,\cdots,n$ 时,都有 $Q(x) = 0$.

于是,有 $Q(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$,其中 a 为常数,即

$(x+1)p(x) - x = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$.

令 $x = -1$,得 $1 = a(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!$,

即 $a=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

于是 $p(x)=\frac{Q(x)+x}{x+1}=\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x}{x+1}$.

则 $p(n+1)=\frac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2}$.

故 $p(n+1)=\begin{cases}1, n\text{ 为奇数;}\\ \frac{n}{n+2}, n\text{ 为偶数.}\end{cases}$

【解题思维策略分析】

1. 注意对次数或序列运用数学归纳法

例 12 设 $\{a_n\}$ 是斐波那契数列,其定义如下:$a_1=a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, n\in$ **N**.证明:如果多项式 $p(x)$ 满足:当 $k=992,\cdots,1982$ 时,$p(k)=a_k$,则 $p(1983)=a_{1983}-1$.

证明 对 $n\in$ **N** 用数学归纳法证明更一般的结论:如果 n 次多项式满足,当 $k=n+2,n+3,\cdots,2n+2$ 时,$p(k)=a_k$,则 $p(2n+3)=a_{2n+3}-1$.

当 $n=1$ 时,有 $p(3)=2, p(4)=3$,从而 $p(x)\equiv x-1$,且 $p(5)=4=a_5-1$.

现在设结论对 $n-1$ 成立.下面证明它对 n 也成立.设多项式 $p(x)$ 的次数为 n,且当 $k=n+2,n+3,\cdots,2n+2$ 时,有 $p(k)=a_k$.

考虑多项式 $Q(x)=p(x+2)-p(x+1)$.

显然它的次数不大于 $n-1$,因为当 $k=n+1,n+2,\cdots,2n$ 时,

$Q(k)=p(k+2)-p(k+1)=a_{k+2}-a_{k+1}=a_k$.

所以 $Q(x)$ 满足,当 $k=n+1,n+2,\cdots,2n$ 时,$Q(k)=a_k$.由归纳假设,有

$Q(2n+1)=a_{2n+1}-1$.

但是,$Q(2n+1)=p(2n+3)-p(2n+2)$,

因此 $p(2n+3)=p(2n+2)+Q(2n+1)=a_{2n+2}+a_{2n+1}-1=a_{2n+3}-1$.

由数学归纳法原理,结论获证.

故 $p(1983)=a_{1983}-1$.

例 13 一个关于 x,y,z 的多项式 $P_m(x,y,z), m=0,1,2,\cdots$ 序列定义如下:$P_0(x,y,z)=1, P_m(x,y,z)=(x+z)(y+z)P_{m-1}(x,y,z+1)-z^2P_{m-1}(x,y,z)$, $m>0$. 证明:每一 $P_m(x,y,z)$ 是对称的,即 x,y,z 的任意排列,它的值不变.

(1985 年英国奥林匹克题)

证明 对 m 用数学归纳法. 当 $m=0$ 时结论显然成立. 设 $m=n-1$ 时, $P_m(x,y,z)$ 是对称的,并且

$$(x+y)P_m(x,z,y+1)-(x+z)P_m(x,y,z+1)=(y-z)P_m(x,y,z) \quad (*)$$

成立. 现在证明 $m=n$ 时也成立. 从 $P_{m-1}(x,y,z)$ 的对称性容易看出

$$P_n(x,y,z)=P_n(y,x,z).$$

我们只需证明 $P_n(x,y,z)=P_n(x,z,y)$ 就够了.

由 $(*)$ 和已知递推式,得

$$\begin{aligned}
&P_n(x,z,y)-P_n(x,y,z)\\
=&(y+z)\{(x+y)P_{n-1}(x,z,y+1)-(x+z)P_{n-1}(x,y,z+1)\}\\
&-(y^2-z^2)P_{n-1}(x,y,z)\\
=&(y+x)(y-z)P_{n-1}(x,y,z)-(y^2-z^2)P_{n-1}(x,y,z)\\
=&0.
\end{aligned}$$

为了证明 $(*)$ 式对 $m=n$ 时成立,要利用已建立的 P_n 的对称性.

$$\begin{aligned}
&(x+y)P_n(x,z,y+1)-(x+z)P_n(x,y,z+1)\\
=&(x+y)P_n(y+1,x,z)-(x+z)P_n(z+1,y,x)\\
=&(x+y)\{(y+x+1)(z+x)P_{n-1}(y+1,z,x+1)-x^2P_{n-1}(y+1,z,x)\}\\
&-(x+z)\{(z+x+1)(y+x)P_{n-1}(z+1,y,x+1)-x^2P_{n-1}(z+1,y,x)\}\\
=&(x+y)(x+z)[(y+x+1)P_{n-1}(x+1,z,y+1)-(z+x+1)P_{n-1}(x+1,\\
&y,z+1)]-x^2[(x+y)P_{n-1}(x,z,y+1)-(x+z)P_{n-1}(x,y,z+1)]\\
=&(x+y)(x+z)(y-z)P_{n-1}(x+1,y,z)-x^2(y-z)\cdot P_{n-1}(x,y,z)\\
=&(y-z)[(y+x)(z+x)P_{n-1}(z,y,x+1)-x^2P_{n-1}(z,y,x)]\\
=&(y-z)P_n(z,y,x)\\
=&(y-z)P_n(x,y,z).
\end{aligned}$$

即 $(*)$ 成立.

2. 注意对系数的讨论,灵活运用数论知识

例 14 设 p,q 是不同的素数,正整数 $n\geqslant 3$. 求所有整数 a,使得多项式 $f(x)=x^n+ax^{n-1}+pq$ 可以分解为两个正次数的整系数多项式之积.

(1994 年中国国家队集训选拔题)

证明 设 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$,其中 $g(x)$ 和 $h(x)$ 是正次数的整系数多项式.

由于 $f(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式,所以 $g(x)$ 和 $h(x)$ 也是首项系数为 1 的. 不妨设

$$g(x)=x^r+a_{r-1}x^{r-1}+\cdots+a_0,$$

$h(x) = x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \cdots + b_0$,

其中 $r, s \geqslant 1$,且 $a_0, a_1, \cdots, a_{r-1}, b_0, b_1, \cdots, b_{s-1}$ 是整数.

于是,$a_0 b_0 = pq$,因此 p 整除 a_0 或 b_0,但不同时整除 a_0 和 b_0.不妨设 $p \nmid b_0$,则 $p \mid a$.

设 $p \mid a_0, \cdots, p \mid a_{t-1}, p \nmid a_t$,于是 $g(x) \cdot h(x)$ 的 t 次项系数为

$a_t b_0 + a_{t-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{t-1} + a_0 b_t \equiv a_0 b_t \not\equiv 0 (\bmod p)$.

注意到 $f(x)$ 中次数小于 $n-1$ 的项的系数都是 p 的倍数,因此 $t \geqslant n-1$,所以 $r \geqslant t \geqslant n-1$,于是由 $r+s=n$ 及 $r \geqslant 1$ 得到,$r = n-1, s = 1$.

因此,$h(x) = x + b_0, p \nmid b_0$.

另一方面,$q \mid a_0 b_0$.如果 $q \mid b_0$,则同理可证 $s = n-1$,于是 $n = 2$,与 $n \geqslant 3$ 矛盾.因此,$q \nmid b_0$.

由于 $b_0 \mid pq$,所以 $b_0 = \pm 1$,即 $h(x) = x \pm 1$.

如果 $b_0 = 1$,则 $h(x) = x + 1$,因此,$f(-1) = 0$,即

$(-1)^n + a(-1)^{n-1} + pq = 0$,且 $a = (-1)^n pq + 1$.

如果 $b_0 = -1$,则 $h(x) = x - 1$,因此,$f(1) = 0$,即

$1 + a + pq = 0$,有 $a = -pq - 1$.

容易验证,当 $a = (-1)^n pq + 1$ 或 $a = -pq - 1$ 时,$f(x)$ 均可分解为两个正次数的整系数多项式之积.于是所求 a 的值为 $a = (-1)^n pq + 1$ 或 $-pq - 1$.

例 15 给出一个集合 M,它由 7 个连续的自然数所组成,而且存在一个 5 次多项式 $p(x)$,使得:(1) 多项式 $p(x)$ 的每个系数都是整数;(2) 在 M 中有包含它的最大数和最小数在内的 5 个数 k 满足 $p(k) = k$;(3) 存在 $k \in M$ 满足 $p(k) = 0$.

(1980 年英国奥林匹克题)

解 设 7 个连续自然数为 $a, a+1, a+2, \cdots, a+6$.

由条件(2)知,可构作多项式

$$p(x) = x + (x-a)(x-a-b)(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3), \quad (*)$$

其中 $b_1, b_2, b_3 \in \{a+1, a+2, \cdots, a+5\}$.

由条件(3)知,满足 $p(k) = 0$ 的 $k \in \{a+1, \cdots, a+5\}$.

若 $k = a+1$,则由($*$),知 $a + 1 + 1 \cdot (-5) \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = 0$,

其中 c_1, c_2, c_3 为 $-1, -2, -3, -4$ 中的三个.

令 $c_1 = -1, c_2 = -2, c_3 = -3$,则由

$a + 1 + 1 \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = 0$,得 $a < 0$,矛盾.

同理,$\{c_1, c_2, c_3\} \subsetneqq \{-1, -2, -3, -4\}$ 时,都有 $a < 0$,矛盾.

若 $k=a+2$,则由(*),知 $a+2+2\cdot(-4)\cdot c_1\cdot c_2\cdot c_3=0$,其中 $\{c_1,c_2,c_3\}\subsetneqq\{1,-1,-2,-3\}$.

取 $c_1=1,c_2=-1,c_3=-2$,则由

$a+2+2\cdot(-4)\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)=0$,

得 $a=14$.于是7个数为14,15,16,17,18,19,20.

故 $p(x)=x+(x-14)(x-20)(x-15)(x-17)(x-18)$ 满足

$p(16)=16+2\cdot(-4)\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)=0$,

$p(14)=14,p(20)=20,p(15)=15,p(17)=17,p(18)=18$.

例16 多项式 $(1-z)^{b_1}\cdot(1-z^2)^{b_2}\cdot(1-z^3)^{b_3}\cdot\cdots\cdot(1-z^{32})^{b_{32}}$ 中,b_i 为正整数($i=1,2,\cdots,32$),并且该多项式具有下列奇妙的性质:把它乘开之后,删去 z 的高于32次的那些项,恰留下 $1-2z$.试决定 b_{32}(答案可以表示为两个2的方幂之差).

(1988年美国奥林匹克题)

解 设 $f(z)=(1-z)^{b_1}\cdot(1-z^2)^{b_2}\cdot(1-z^3)^{b_3}\cdot\cdots\cdot(1-z^{32})^{b_{32}}$

$=1-2z+g(z)$,

其中 $g(z)$ 的每一项都高于32次.

比较两边 z 的系数,得 $b_1=2$,

$f(-z)=(1+z)^{b_1}(1-z^2)^{b_2}(1+z^3)^{b_3}\cdots(1-z^{32})^{b_{32}}=1+2z+g(-z)$.

$$f(z)\cdot f(-z)=(1-z^2)^{b_1+2b_2}\cdot(1-z^4)^{2b_4}\cdot(1-z^6)^{b_3+2b_6}\cdot(1-z^8)^{2b_8}\cdot(1-z^{10})^{b_5+2b_{10}}\cdot\cdots\cdot(1-z^{30})^{b_{15}+2b_{30}}\cdot(1-z^{32})^{2b_{32}}\cdot\cdots$$
$$=1-4z^2+g_1(z),$$

其中 $g_1(z)$ 的每一项的次数都高于32,并且都是偶数.

令 $w=z^2,f_1(w)=f(z)\cdot f(-z)$,则

$$f_1(w)=(1-w)^{b_1+2b_2}(1-w^2)^{2b_4}(1-w)^{b_3+2b_6}(1-w^4)^{2b_8}(1-w^5)^{b_5+2b_{10}}\cdots(1-w^{15})^{b_{15}+2b_{30}}(1-w^{16})^{2b_{32}}\cdots$$
$$=1-4w+g_2(w),$$

其中 $g_2(w)$ 的每一项关于 w 的次数都高于16.

比较上式两边 w 的系数,得 $b_1+2b_2=4$,

因而 $b_2=1$.

再重复以上步骤,设 $r=w^2,f_2(r)=f_1(w)f_1(-w)$,可得

$$f_2(r)=(1-r)^{b_1+2b_2+4b_4}\cdot(1-r^2)^{4b_8}\cdot(1-r^3)^{b_3+2b_6+4b_{12}}\cdot(1-r^4)^{4b_{16}}\cdot(1-r^5)^{b_5+2b_{10}+4b_{20}}\cdot(1-r^6)^{4b_{24}}\cdot(1-r^7)^{b_7+2b_{14}+4b_{28}}(1-r^8)^{4b_{32}}\cdots$$
$$=1-16r+g_3(r),$$

其中 $g_3(r)$ 的每一项关于 r 的次数都高于 8.

比较两边 r 的系数,得 $b_1+2b_2+4b_4=16$.

由 $b_1=2,b_2=1$ 得 $b_4=3$.

继续上面的过程,可依次得 $b_8=30,b_{16}=2^{12}-2^4=4080$.最后由

$$b_1+2b_2+4b_4+8b_8+16b_{16}+32b_{32}=2^{32},$$

得 $b_{32}=\dfrac{2^{32}-2^{16}}{32}=2^{27}-2^{11}$.

【模拟实战】

习题 A

1. 分解因式 $f(x,y,z)=(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$.
2. 分解因式 $f(x,y,z)=(y-z)^5+(x-z)^5+(x-y)^5$.
3. 求证:多项式 $f(x)=(a-x)^6-3a(a-x)^5+\frac{5}{2}a^2(a-x)^4-\frac{1}{2}a^4(a-x)^2$,当 $0<x<a$ 时,$f(x)<0$.
4. 设多项式 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,其中 a,b,c,d 皆为常数,若以 x^2+x+2 除之,余 $x+2$,以 x^2+x-2 除之,余 $3x+4$.求 a,b,c,d.(1992 年中国台湾竞赛题)
5. 已知 $a\neq b$,多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 和 $x-b$ 所得的余数分别为 c 和 d,求 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 所得的余式.
6. 用整数的质因数讨论下列多项式在整数范围内的因式分解:

   (1) $f(x)=x^4-3x^2+9$;

   (2) $f(x)=x^4-6x^3+7x^2+6x-80$.

习题 B

1. 设 $f(x),g(x),h(x)$ 为实系数多项式,且适合 $[f(x)]^2=x\cdot[g(x)]^2+x\cdot[h(x)]^2$.求证:$f(x)=g(x)=h(x)=0$.
2. 试证:四次多项式 x^4+2x^2+2x+2 不可能分解成两个具有整系数 a,b,c,d 的二次三项式 x^2+ax+b 和 x^2+cx+d 的乘积.
3. 已知多项式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数,并且 $bd+cd$ 是奇数.试证:这个多项式不能分解为两个整系数多项式. (1963 年北京市竞赛题)

4. 设多项式 $p(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$,其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个不同的整数.试证:$p(x)$ 不能分解为两个次数大于零的整系数多项式之积.

(1984 年上海市竞赛题)

5. 设 $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$,其中 n 是一个大于 1 的整数.求证:$f(x)$ 不能表示为两个多项式的乘积,其中一个多项式都具有整系数而且它们的次数都不低于一次.

(IMO - 34 试题)

第二十三章　多项式的根的性质及应用

【基础知识】

对于一元 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，若 $f(\alpha)=0$，则称 α 为 $f(x)$ 的根.

代数基本定理　任何一元 $n(\geqslant 1)$ 次复系数多项式至少有一个复数根.

根的个数定理　任何一元 $n(\geqslant 1)$ 次复系数多项式 $f(x)$ 有且只有 n 个复数根. 这里规定 k 重根算 k 个根.

推论 1　在复数范围内，n 次多项式 $f(x)$ 可唯一地分解为 $f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $f(x)$ 的 n 个复根.

推论 2　若有 $n+1$ 个不同的复数，使得两个复系数一元 n 次多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的值均相等，则 $f(x)=g(x)$.

推论 3　若 n 次多项式 $f(x)$ 有无数个不同的根，则 $f(x)$ 为零多项式.

韦达定理　若复系数一元 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\neq 0)$ 的 n 个复根是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n},\\ x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=(-1)^2\dfrac{a_{n-2}}{a_n},\\ \cdots\\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}.\end{cases}$$

这个定理的逆命题也成立.

实系数多项式虚根成对定理　若虚数 $a+bi$ 是实系数一元 n 次多项式 $f(x)$ 的根，那么它的共轭虚数 $a-bi$ 也是这个多项式的根，并且它们的重数相等.

推论　任何奇次实系数多项式至少有一个实数根. 任何偶次实系数多项式或者没有实根，或者有偶数个实数根.

整系数多项式有有理根判定定理　如果整系数一元 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+$

$a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有有理根$\frac{q}{p}$(其中 p,q 是互素的整数),那么 p 一定是 a_n 的约数,q 一定是 a_0 的约数.

有理系数多项式无理根成对定理 如果有理系数多项式有一无理根,则必有与它共轭的无理根,并且它们的重数相同.

有特殊根的定理 对于多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

(1) 多项式 $f(x)$ 有根 $1\Leftrightarrow a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$.

(2) 多项式 $f(x)$ 有根 $-1\Leftrightarrow a_0+a_2+\cdots=a_1+a_3+\cdots$

(3) 多项式 $f(x)$ 没有正根 $\Leftrightarrow$ 所有系数 a_i 都是正数,或都是负数.

(4) 多项式 $f(x)$ 没有负根 $\Leftrightarrow$ 所有偶数(或奇数)次项系数都是正数(或负数),同时所有奇数(或偶数)次项系数都是负数(或正数).

【典型例题与基本方法】

例 1 设多项式 $ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_{n-2}x^2-n^2bx+b$ 恰有 n 个正根.证明:它所有的根都相等.

(1984 年保加利亚竞赛题)

证明 由于原多项式有 n 个正根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,所以它的次数不小于 n,因此 $a\neq 0$,并且由韦达定理,有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1,$$

$$(-1)^n\left(\sum_{i=2}^{n}x_1x_2\cdots x_{i-1}\cdot x_{i+1}\cdots x_n+x_2x_3\cdots x_n\right)=n^2\frac{b}{a},$$

$$(-1)^nx_1x_2\cdots x_n=\frac{b}{a}.$$

由此,得到 $b\neq 0$,由平均值不等式,有

$$n^2=1\cdot\frac{(-1)^n\cdot n^2\frac{b}{a}}{(-1)^n\cdot\frac{b}{a}}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$\geqslant\left(n\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\right)\cdot\left(n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}}\right)=n^2.$$

这表明,只能 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$.

例 2 设多项式 $p(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{Z})$ 的一个根等于其他两根之乘积.证明:$2p(-1)$ 被 $p(1)+p(-1)-2[1+p(0)]$ 整除.

(1982 年加拿大奥林匹克题)

证明 根据韦达定理,多项式 $p(x)$ 的根 u,v 和 uv 满足

$u+v+uv=-a, uv(1+u+v)=b, u^2v^2=-c$.

由此得到,当 $a\neq 1$ 时, $b-c=uv(1+u+v+uv)=uv(1-a)$,

即 uv 是有理数.因为 $u^2v^2=-c$ 是整数,故 uv 也是整数.因此,

$(1-a)\mid(b-c)$,从而有 $(a-1)\mid[(a-1)-(b-c)]$.

但 $p(1)+p(-1)-2[1+p(0)]$

$=(1+a+b+c)+(-1+a-b+c)-2(1+c)=2(a-1)$,

$2p(-1)=2(-1+a-b+c)$.

故 $p(1)+p(-1)-2[1+p(0)]$ 整除 $2p(-1)$.

当 $a=1$ 时,有 $b=c$.

因此,有一个根为 -1,即 $2p(-1)=0$ 能被任何整数整除.

例 3 求所有的值 a,使得多项式 x^3-6x^2+ax+a 的根 x_1,x_2,x_3 满足 $(x_1-3)^2+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0$. (1983 年奥地利奥林匹克题)

解 作变量代换 $y=x-3$,则 $y_1=x_1-3, y_2=x_2-3$ 和 $y_3=x_3-3$ 是多项式

$$(y+3)^3-6(y+3)^2+a(y+3)+a=y^3+3y^2+(a-9)y+4a-27$$

的根.由韦达定理,有

$$\begin{cases}y_1+y_2+y_3=-3,\\ y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=a-9,\\ y_1y_2y_3=27-4a.\end{cases}$$

此时,由假设还有 $y_1^3+y_2^3+y_3^3=0$.

不难验证下列恒等式成立:

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3\equiv(y_1+y_2+y_3)^3-3(y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3)\cdot(y_1+y_2+y_3)+3y_1y_2y_3.$$

由此得到,a 合乎题目要求的必要且充分条件为

$$0=(-3)^3-3(a-9)(-3)+3(27-4a)=-27-3a,$$

所以 $a=-9$.

例 4 求一切实数 p,使得三次方程 $5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1=66p$ 的三个根均为自然数. (1995 年全国高中联赛题)

解 由观察易知 $x=1$ 为原三次方程的一个自然数根.由综合除法,原三次方程可降次为二次方程 $5x^2-5px+66p-1=0$. (*)

原三次方程的三个根均为自然数 $\Leftrightarrow$ 二次方程(*)的两个根均为自然数.设 u, $v(u\leqslant v)$ 为方程(*)的两个根,则由韦达定理得

$$\begin{cases}u+v=p, & ①\\ uv=\frac{1}{5}(66p-1). & ②\end{cases}$$

把①代入②得 $5uv = 66(u + v) - 1$. ③

可知 u, v 都不能被 2,3,11 所整除.

又由③得 $v = \dfrac{66u - 1}{5u - 66}$. ④

而 u, v 均为自然数,由④可知 $u > \dfrac{66}{5}$,即 $u \geqslant 14$.

又 $2 \nmid u$ 且 $3 \nmid u$,知 $u \geqslant 17$.

由 $v \geqslant u$ 及④可得 $\dfrac{66u - 1}{5u - 66} \geqslant u$,即 $5u^2 - 132u + 1 \leqslant 0$.

于是,$u \leqslant \dfrac{66 + \sqrt{66^2 - 5}}{5} < \dfrac{132}{5}$.故 $17 \leqslant u \leqslant 26$.

再由 $2 \nmid u$ 且 $3 \nmid u$ 知,u 只能取 17,19,23,25.

当 $u = 17$ 时,由④得 $v = \dfrac{1121}{19} = 59$.

当 $u = 19$ 时,由④得 v 并非自然数,应舍去.

当 $u = 23$ 时,由④得 v 并非自然数,应舍去.

当 $u = 25$ 时,由④得 v 并非自然数,应舍去.

所以,仅当 $p = u + v = 76$ 时,方程(*)的两根均为自然数,原方程的三根均为自然数.

例5 设 a, b, c 是多项式 $x^4 - ax^3 - bx + c$ 四个根中的三个根,求所有这样的三个数 a, b, c.

(前捷克斯洛伐克奥林匹克题)

解 设 $c = 0$,则 c 是方程 $x^4 - ax^3 - bx = 0$ 的根.因此,余下的是要求出所有形如 $x^3 - ax^2 - b$ 的多项式,使得 a 和 b 是它的根.如果记这个多项式的第三个根为 d,则由韦达定理,有 $a + b + d = a$ 即 $d = -b$,其次,

$$ab + ad + bd = ab - b(a + b) = -b^2 = 0,$$

即 $b = 0$.最后,经验证可知,所有形如 $(a, 0, 0)$ 的三个数满足题中的条件.现在设 $c \neq 0$,则多项式 $x^4 - ax^3 - bx + c$ 的 4 个根 a、b、c、d 没有一个为 0.由韦达定理,有 $a + b + c + d = a$,即 $d = -(b + c)$. ①

其次
$$\begin{aligned} & ab + ac + bc + ad + bd + cd \\ = {} & ab + ac + bc - (a + b + c)(b + c) \\ = {} & -b^2 - bc - c^2 \\ = {} & 0. \end{aligned}$$ ②

又
$$\begin{aligned} & abc + abd + acd + bcd \\ = {} & abc - (ab + ac + bc)(b + c) = -a(b^2 + bc + c^2) - b^2c - bc^2 \end{aligned}$$

$$= -bc(b+c) = b, \quad ③$$

即 $\quad -c(b+c)=1, c^2+bc+1=0. \quad ④$

最后，$abcd = -abc(b+c) = ab = c$，

即 $\quad a=\frac{c}{b}$.

因此，a,b,c 只可能有四组：

$$b_{1,2}=1, c_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, a_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$b_{3,4}=-1, c_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, a_{3,4}=\frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}.$$

每一组都满足题中条件.因此，三数组(a,b,c)要么有形式$(a,0,0)$，其中 a 是任意复数；要么是下面的三数组之一：

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},1,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

例 6 实数 a,b,c 和正数 λ 使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实数根 x_1,x_2,x_3，且满足

(1) $x_2-x_1=\lambda$；

(2) $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

求 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值. (2002 年全国高中联赛题)

解法 1 设 $x_1=m-\frac{\lambda}{2}, x_2=m+\frac{\lambda}{2}, x_3>\frac{1}{2}(x_2+x_1)=m$.

令 $x_3=m+t(\lambda>0, t>0)$.

由韦达定理知

$$\begin{cases} a=-(x_1+x_2+x_3)=-(3m+t), \\ b=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=3m^2+2mt-\frac{\lambda^2}{4}, \\ c=-x_1x_2x_3=-m^3-m^2t+\frac{\lambda^2}{4}m+\frac{\lambda^2}{4}t, \end{cases}$$

则 $2a^3-9ab=a(2a^2-9b)=27m^3+27m^2t-\frac{27}{4}m\lambda^2-\frac{9}{4}\lambda^2t-2t^3$,

$$27c=-27m^2-27m^2t+\frac{27}{4}m\lambda^2+\frac{27}{4}\lambda^2t.$$

于是，$s=\dfrac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\dfrac{9\lambda^2t-4t^3}{2\lambda^3}$（要取得最大值，$9\lambda^2-4t^2$ 应为正）

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\sqrt{(9\lambda^2-4t^2)(9\lambda^2-4t^2)\times 8t^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\sqrt{\left[\frac{2(9\lambda^2-4t^2)+8t^2}{3}\right]^3}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

当且仅当 $9\lambda^2-4t^2=8t^2\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda$ 时（此时 $9\lambda^2-4t^2>0$），如设 $m=0,\lambda=2$，此时 $x_1=-1,x_2=1,x_3=\sqrt{3}$。可知当 $a=-c=-\sqrt{3},b=-1$ 时，可取得最大值 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

解法 2 注意到原式的分子

$$2a^3+27c-9ab=27\left[\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)+c\right]$$

$$=27f\left(-\frac{a}{3}\right)=27\left(-\frac{a}{3}-x_1\right)\left(-\frac{a}{3}-x_2\right)\left(-\frac{a}{3}-x_3\right)$$

$$=(-a-3x_1)(-a-3x_2)(-a-3x_3).$$

而 $-a=x_1+x_2+x_3$，

则分子 $=(x_2+x_3-2x_1)(x_1+x_3-2x_2)(x_1+x_2-2x_3)$。

令 $x_2=x_1+2m,x_3=x_1+m+n$，其中 $m>0,n>0$，

则分子 $=(3m+n)(3m-n)2n=2n(9m^2-n^2)$。

原式 $=\dfrac{1}{4}\times\left[9\times\left(\dfrac{n}{m}\right)-\left(\dfrac{n}{m}\right)^3\right]$。

令 $\dfrac{n}{m}=t$，则原式 $=\dfrac{1}{4}(9t-t^3),t>0$。

设 $g(t)=9t-t^3$，对于 $(0,\sqrt{3}]$ 内的 $t_1>t_2$，有

$$g(t_1)-g(t_2)=(t_1-t_2)[9-(t_1^2+t_2^2+t_1t_2)]$$

$$>(t_1-t_2)[9-((\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})]=0.$$

所以 $g(t)$ 在 $(0,\sqrt{3}]$ 内为增函数，在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 内为减函数。

故在 $t=\sqrt{3}$ 时，$g(t)$ 取最大值为 $9\sqrt{3}-(\sqrt{3})^3=6\sqrt{3}$，易知等号可取到。

此时，原式有最大值 $\dfrac{1}{4}\times 6\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

解法 3 令 $x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+t(t>0)$. (*)

由韦达定理可知

$$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$$

$$=\frac{-2(x_1+x_2+x_3)^3-27x_1x_2x_3+9(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{\lambda^3}$$

$$=\frac{(x_1+x_2-2x_3)(x_2+x_3-2x_1)(x_3+x_1-2x_2)}{\lambda^3}$$

(上面两式分子中把 x_3 换成$\frac{x_1+x_2}{2}$ 时都为零,由对称性不难知上式成立)

$$=\frac{t(2t+3\lambda)(3\lambda-2t)}{2\lambda^3}\text{(式(*)代入求得)}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\lambda^3}\sqrt{t^2(9\lambda^2-4t^2)^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\sqrt{8t^2(9\lambda^2-4t^2)(9\lambda^2-4t^2)}$$

$$\leqslant\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\sqrt{\left(\frac{18\lambda^2}{3}\right)^3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

等号在 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$ 时取到,这时取 $x_2>x_1$,令 $x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_1)$,则有

$$a=-\frac{3}{2}(x_1+x_2)-\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_1),$$

$$b=\frac{(x_1+x_2)^2+\sqrt{3}(x_2^2-x_1^2)}{2}+x_1x_2,$$

$$c=\frac{-x_1x_2(x_1+x_2)-\sqrt{3}x_1x_2(x_2-x_1)}{2}.$$

此时,$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

故$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$的最大值是$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

解法 4 由韦达定理知

$$a=-(x_1+x_2+x_3),$$

$$b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1x_2+(x_1+x_2)x_3,$$

$$c=-x_1x_2x_3.$$

设$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=g(x_3)$.

对 $g(x_3)$ 求关于 x_3 的导数，有

$$g'_{(x_3)}=-6(x_1+x_2+x_3)^2-27x_1x_2+9x_3(x_2+x_1)+9x_1x_2+9(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2)$$

$$=-3[2x_3^2-2x_3(x_1+x_2)-(x_1+x_2)^2+6x_1x_2]. \quad ①$$

$g'_{(x_3)}=0\Leftrightarrow\ 2x_3^2-2x_3(x_1+x_2)-(x_1+x_2)^2+6x_1x_2=0.$

其解为 $\alpha_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\alpha_2=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda.$

$$g'_{(x_3)}=-3(x_3-\alpha_1)(x_3-\alpha_2). \quad ②$$

$\because\ x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2),\therefore\ x_3>\alpha_1.$

当 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)<x_3<\alpha_2$ 时，由②知 $g'_{(x_3)}>0$，即 $g(x_3)$ 单调上升；

当 $x_3>\alpha_2$ 时，由②知 $g'_{(x_3)}<0$，即 $g(x_3)$ 单调下降. 所以，$g(x_3)$ 在 $x_3=\alpha_2$ 时，达到极大值.

此时，$a=-\frac{3}{2}(x_1+x_2)-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda=-3x_1-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\lambda$, ③

$b=3x_1^3+(3+\sqrt{3})x_1\lambda+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\lambda^2$, ④ $c=-x_1^3-\frac{3+\sqrt{3}}{2}x_1^2\lambda-\frac{1+\sqrt{3}}{2}x_1\lambda^2$. ⑤

由 $f(x_3)=x_3^3+ax_3^2+bx_3+c$

$$=\left(x_3+\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)\left(x_3+\frac{a}{3}\right)+\frac{2}{27}a^3+c-\frac{1}{3}ab=0,$$

有 $2a^3+27c-9ab=-(3x_3+a)^3+3(a^2-3b)(3x_3+a)$

$$=-(3x_3+a)[(3x_3+a)^2-3(a^2-3b)]. \quad ⑥$$

当 $x_3=\alpha_2=x_1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\lambda$ 时，$3x_3+a=\sqrt{3}\lambda,a^2-3b=\frac{3}{2}\lambda^2.$

由⑥得 $2a^3+27c-9ab=-\sqrt{3}\lambda\left[(\sqrt{3}\lambda)^2-3\times\frac{3}{2}\lambda^2\right]=\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda^3$ 为其最大值.

故 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 为其最大值.

另解 将③,④,⑤,$x_3=\alpha_2=x_1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\lambda$ 代入 $g(x_3)$ 亦可得 $g_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

注 以上4种解法摘自《中等数学》2003年第1期李建泉文.

【解题思维策略分析】

1. 在运用根的性质时，充分结合其他知识与方法

例 7 证明：若多项式 x^4+ax^3+bx+c 的根均为实数，则 $ab\leqslant 0$.

（IMO－28 预选题）

证明 用反证法．若 $ab>0$，不妨设 $a>0,b>0$（否则用 $-x$ 代替 x，$-a$，$-b$ 分别代替 a,b）.

若 $c>0$，则 x^4+ax^3+bx+c 无非负根，但这时 $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j>0$，与 x^2 二次项的系数为 0 矛盾.

若 $c<0$，则 x^4+ax^3+bx+c 有一个或三个正数根，其余的根为负数．若有三个正根 x_2,x_3,x_4，则由 $x_1+x_2+x_3+x_4=-a<0$ 得 $-x_1\geqslant x_2+x_3+x_4$，从而 $-x_1(x_2+x_3+x_4)\geqslant(x_2+x_3+x_4)^2>x_2x_3+x_3x_4+x_4x_2$，这与二次项 x^2 系数为 0 矛盾．若仅有一个正根，设为 x_1，则 $x_1x_2x_3x_4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)=-b<0$，故 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}>0$，即 $\frac{1}{x_1}>-\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}$．而 $-x_1(x_2+x_2+x_3)=x_2x_3+x_3x_4+x_2x_4$，此两式相乘得 $-x_2-x_3-x_4\geqslant\left(-\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}\right)(x_2x_3+x_3x_4+x_2x_4)=2(-x_2-x_3-x_4)-\frac{x_3x_4}{x_2}-\frac{x_4x_2}{x_3}-\frac{x_2x_3}{x_4}$，这是一个矛盾式.

若 $c=0$，则 x^3+ax^2+b 有三个实根，且均小于 0，这与此时的一次项 x 的系数为 0 矛盾.

综上，$ab>0$ 不成立．故必有 $ab\leqslant 0$.

例 8 求最大的实数 λ，使得当实系数多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的所有根都是非负实数时，只要 $x\geqslant 0$，就有 $f(x)\geqslant\lambda(x-a)^3$，并问上式中等号何时成立.

（CMO－14 试题）

解 设 $f(x)$ 的三个根是 α,β,γ，并设 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$．显然，

$$x-a=x+\alpha+\beta+\gamma,$$
$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

当 $0\leqslant x\leqslant\alpha$ 时，由于 $-f(x)=(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)$，利用均值不等式可得

$$-f(x)\leqslant\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-3x}{3}\right)^3\leqslant\left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3,$$

即 $f(x) \geqslant -\dfrac{1}{27}(x+\alpha+\beta+\gamma)^3 = -\dfrac{1}{27}(x-a)^3$.

显然上式等号成立的充分必要条件是

$$\begin{cases}\alpha - x = \beta - x = \gamma - x, \\ \alpha+\beta+\gamma-3x = x+\alpha+\beta+\gamma,\end{cases}$$

即 $x=0, \alpha=\beta=\gamma$.

当 $\beta \leqslant x \leqslant \gamma$ 时，由于

$$-f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(\gamma-x) \leqslant \left(\frac{x+\gamma-\alpha-\beta}{3}\right)^3$$

$$\leqslant \left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 = \left(\frac{x-a}{3}\right)^3,$$

即 $f(x) \geqslant -\dfrac{1}{27}(x-\alpha)^3$.

显然，上式等号成立的充分必要条件是

$$\begin{cases}x-\alpha = x-\beta = \gamma - x, \\ \alpha = \beta = 0,\end{cases}$$

即 $\alpha=\beta=0, \gamma=2x$.

当 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$，或者 $x > \gamma$ 时，$f(x) > 0 \geqslant -\dfrac{1}{27}(x-\alpha)^3$.

综上所述，可知所求的 $\lambda = -\dfrac{1}{27}$，并且等号成立的充要条件是 $x=0, \alpha=\beta=\gamma$ 或者 $\alpha=\beta=0, \gamma=2x$.

例 9　设实系数多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的根为实数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ $(n \geqslant 2)$，试证：对于 $x \geqslant \max\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，

$$f(x+1) \geqslant \frac{2n^2}{\dfrac{1}{x-b_1}+\dfrac{1}{x-b_2}+\cdots+\dfrac{1}{x-b_n}}.$$（1991 年中国国家队选拔试题）

解　由 $n \geqslant 2$，有 $n^2 \geqslant 2n$，即 $-n^2+2n \leqslant 0$，亦即有 $n^2-2n(n-1) \leqslant 0$，它可视为一个二次三项式的判断式，则对任意 $t>0$，有

$$\frac{n(n-1)}{2}t^2 - nt + 1 \geqslant 0.$$

进而（注意到二项式定理），有

$$(1+t)^n \geqslant 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 \geqslant 2nt.$$

当 $x \geqslant \max\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 时，有

$$f(x+1) = (1+x-b_1)(1+x-b_2)\cdots(1+x-b_n).$$

由算术 - 几何平均值不等式,得

$$f(x+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}\geqslant n\cdot f(x+1)\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}}=n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+x-b_i)^n}{x-b_i}}.$$

又由 $(1+t)^n\geqslant 2nt$,有 $\frac{(1+x-b_i)^n}{x-b_i}\geqslant 2n$.

故 $f(x+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}\geqslant n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}2n}\geqslant 2n^2$.

于是 $f(x+1)\geqslant\frac{2n^2}{\frac{1}{x-b_1}+\frac{1}{x-b_2}+\cdots+\frac{1}{x-b_n}}$.

2. 注意构造性思维的运用

例 10 给定复系数多项式 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n$.

试证:存在复数 z_0,适合 $|z_0|\leqslant 1$ 且 $|f(z_0)|\geqslant|c_0|+|c_n|$. (CMO - 9 试题)

证明 当 $c_n\neq 0$ 时,构造多项式

$$g(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z-\left|\frac{c_0}{c_n}\right|\cdot c_n,$$

由代数基本定理,$g(z)$ 有 n 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,将其模排序为

$$|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|.$$

由根与系数关系知 $|z_1z_2\cdots z_n|=1$,故 $|z_1|\leqslant 1$ 且

$$f(z_1)=c_0z_1^n+c_1z_1^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_1+c_n=g(z_1)+\left|\frac{c_0}{c_n}\right|c_n+c_n$$

$$=c_n\left(\left|\frac{c_0}{c_n}\right|+1\right).$$

所以 $|f(z_1)|=|c_0|+|c_n|$.

当 $c_n=0$ 时,构造多项式 $g(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z-c_0$.

由代数基本定理,$g(z)$ 有 n 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,按模排序为 $|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|$.

由根与系数关系知 $|z_1z_2\cdots z_n|=1$,故 $|z_1|\leqslant 1$ 且

$$f(z_1)=c_0z_1^n+c_1z_1^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_1=g(z_1)+c_0=c_0.$$

所以 $|f(z_1)|=|c_0|=|c_0|+|c_n|$.

例 11 证明:多项式 $P(z)$ 是关于 $z\in\mathbf{C}$ 的偶函数的必要且充分条件是,存在多项式 $Q(z)$,使得 $P(z)\equiv Q(z)\cdot Q(-z)$, $z\in\mathbf{C}$. (1979 年罗马尼亚奥林匹克题)

证明 如果 $P(z)\equiv Q(z)\cdot Q(-z)$,则

$P(-z)\equiv Q(-z)\cdot Q(z)\equiv P(z)$,即 $P(z)$ 为偶函数.

反之,如果 $P(z)\equiv 0$,则取 $Q(z)\equiv 0$,于是 $P(z)\equiv Q(z)Q(-z)$.现在设非零多项式 $P(z)$ 为偶函数,对多项式 $P(z)$ 的非零根的个数 m 用数学归纳法证明,存在多项式 $Q(z)$,使得 $P(z)\equiv Q(z)Q(-z)$.

当 $m=0$ 时,多项式 $P(z)$ 有形式 $P(z)=az^n, a\neq 0$.由于 $P(z)$ 是偶函数,所以 $n=2k, k\in \mathbf{Z}^+$.取多项式 $Q(z)=bz^k$,其中 $b^2=(-1)^k a$.因为 $az^n=bz^k\cdot b(-z)^k$,所以多项式 $Q(z)$ 满足所说的恒等式.设结论对所有小于 m 的正整数成立,下面证明结论对 m 成立.事实上,如果 α 是多项式的非零根,则

$$p(-\alpha)=p(\alpha)=0,$$

因此 $P(z)=(z-\alpha)(z+\alpha)R(z)$.

其中 $R(z)$ 是偶函数,这是因为

$$R(-z)[(-z)^2-\alpha^2]\equiv P(-z)\equiv P(z)\equiv R(z)(z^2-\alpha^2),$$

由归纳假设,存在多项式 $S(z)$,使得

$$R(z)\equiv S(z)S(-z),\text{取 } Q(z)\equiv \mathrm{i}(z-\alpha)S(z),\text{则}$$

$$P(z)\equiv \mathrm{i}(z-\alpha)S(z)\cdot \mathrm{i}(-z-\alpha)S(-z)\equiv Q(z)Q(-z).$$

结论证毕.

【模拟实战】

习题 A

1. 确定这样的实数 a,它使多项式 x^2+ax+1 和 x^2+x+a 至少有一个公共根.
(第 3 届加拿大奥林匹克题)
2. 设 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,其中系数 a_i 是整数.如果 $p(0)$ 和 $p(1)$ 都是奇数,那么 $p(x)$ 没有整数根.
(第 3 届加拿大奥林匹克题)
3. 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 为 n 次整系数多项式.若 a_n, a_0 和 $f(1)$ 都为奇数,证明:$f(x)=0$ 无有理根.
(1987 年新加坡竞赛题)
4. 证明:如果多项式 x^2+px+1 的根为 α 和 β,而多项式 x^2+qx+1 的根为 γ 和 δ,则有 $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$.
(英国奥林匹克题)
5. 求所有以有理数 a,b,c 为根的三次多项式 x^3+ax^2+bx+c.
(1985 年土耳其竞赛题)

习题 B

1. 设 P、Q、R 都是实数多项式,它们之中既有二次多项式,也有三次多项式,并且满足

关系式 $P^2+Q^2=R^2$.证明:其中必有一个三次多项式的根全是实数.

(第 28 届俄罗斯奥林匹克题)

2. 已知两个复系数函数 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$ 与 $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^{n-i}$(其中 $a_0=b_0=1$),$\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}b_{2i}$ 和 $\sum_{i=1}^{[\frac{n+1}{2}]}b_{2i-1}$ 均为实数,$g(x)=0$的所有根的平方的相反数是$f(x)=0$的全部根.求证:$\sum_{i=1}^{n}(-1)^ia_i$ 为实数.

(《中等数学》2000 年 5 期奥林匹克训练题)

3. 设 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2-x+1=0$有 n 个正实数根,求证:$0<2^2a_2+\cdots+2^na_n\leqslant\left(\frac{n-2}{n}\right)^2+1$.

(《中等数学》1997 年 6 期奥林匹克问题)

第二十四章　条件多项式的求解

【基础知识】

给出某些条件，求出满足这些条件的多项式是多项式问题中的一类综合性问题．求解这类问题既需灵活运用多项式的知识，也需灵活运用有关代数技巧，诸如代数式的恒等变形技巧，不等式的放缩技巧等，以及各种证题方法的恰当运用．

【典型例题与基本方法】

1．从分析根的情况入手

例 1　当 $a^3-a-1=0$ 时，$a+\sqrt{2}$ 是某个整系数多项式的解，求最高次项系数为 1（且次数最低）的满足题设条件的整系数多项式．　（1997 年日本奥林匹克预赛题）

解　设 $x=a+\sqrt{2}$，则 $0=a^3-a-1=(x-\sqrt{2})^2-(x-\sqrt{2})-1$

$$=(x^3+5x+1)+\sqrt{2}(-3x^2-1).$$

从而 $x^3+5x-1=\sqrt{2}(3x^2+1)$．

上式两边平方得 $x^6+10x^4-2x^3+25x^2-10x+1=18x^4+12x^2+2$，

移项，整理得 $x^6-8x^4-2x^3+13x^2-10x-1=0$．

因此，所要求的多项式为 $x^6-8x^4-2x^3+13x^2-10x-1$．

例 2　求多项式 $P(x)$，使得 $P(0)=0$，且对一切实数 x，等式 $P(x^2+1)=[P(x)]^2+1$ 成立．　（普特南 32 试题）

解　在已知等式中取 $x=0$，因 $P(0)=0$，得 $P(1)=1$．在已知等式中取 $x=1$ 得 $P(2)=2$．同理有 $P(5)=5$，$P(26)=26$，$P(26^2+1)=26^2+1$，… 即多项式 $F(x)=P(x)-x$ 有无数多个根：$0,1,2,5,26,26^6+1,\cdots$ 因而多项式 $F(x)$ 为零多项式，即 $P(x)=x$．

另一方面，$P(x)=x$ 满足已知等式及 $P(x)=0$，故 $P(x)=x$ 为所求的唯一的多项式．

例 3　求所有满足 $P(0)=0$ 且 $P(x)\equiv\frac{1}{2}[P(x+1)+P(x-1)]$ $(x\in\mathbf{R})$ 的多项式 $P(x)$．　（1975 年美国纽约竞赛题）

解 推知多项式 $P(x)=ax$ 满足题中条件，其中 a 是常数．下面对 n 为非负整数时用数学归纳法证明，所欲求的多项式 $P(x)$ 满足条件 $P(n)=nP(1)$．

当 $n=0$ 和 $n=1$ 时，等式显然成立．

假设等式对 $n-1$ 和 n 成立，其中 $n\in\mathbf{N}$，则

$P(n+1)=2P(n)-P(n-1)=(n+1)P(1)$，即等式对 $n+1$ 也成立．

因此多项式 $F(x)=P(x)-P(1)x$ 有无数多个根 $x=0,1,2,\cdots$ 因而 $F(x)$ 应当为零多项式，于是所求的多项式具有 $P(x)=ax$ 的形式．

对于实系数多项式 $f(x)$，我们可推知如果 α 是其复根，则 α 的共轭复数 $\bar{\alpha}$ 也是其根．

例 4 试求具有下述性质的所有实系数多项式：$P(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，对 $P(x)$ 的任一根 α（实的或复的），$\frac{1}{\alpha}$ 及 $1-\alpha$ 也是 $P(x)$ 的根．

（第 19 届奥地利竞赛题）

解 若 α 是 $P(x)$ 的任一根，$\frac{1}{\alpha}$ 及 $1-\alpha$ 也是其根，则知

$1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{1-\alpha},1-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{\alpha}{1-\alpha}$ 也应是其根，所以 $\alpha\neq 0,1$．

由于 $P(x)$ 为 5 次多项式，则上述六个根 $\alpha,\frac{1}{\alpha},1-\alpha,1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{1-\alpha},\frac{\alpha}{1-\alpha}$ 必有两个相等．令这些根两两相等，可求出 $P(x)$ 的根只能取值于集合 $\{-1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\}$，并由题设知有三个实根同时出现．又因 $P(x)$ 为实系数多项式，虚根必成对出现，因此，可得 $P(x)$ 有以下七种可能：

$P_1(x)=(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-2)(x^2-x+1)$；

$P_2(x)=(x+1)^3(x-\frac{1}{2})(x-2)$；

$P_3(x)=(x+1)(x-\frac{1}{2})^3(x-2)$；

$P_4(x)=(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-2)^3$；

$P_5(x)=(x+1)^2(x-\frac{1}{2})^2(x-2)$；

$P_6(x)=(x+1)(x-\frac{1}{2})^2(x-2)^2$；

$$P_7(x)=(x+1)^2(x-\frac{1}{2})(x-2)^2.$$

例 5 求满足以下关系的全部实系数多项式 $P(x)$,

$(x^3+3x^2+3x+2)\cdot p(x-1)=(x^3-3x^2+3x-2)\cdot P(x)$,

上式对所有的实数 x 都成立. (2003 年越南奥林匹克题)

解 由 $(x^3+3x^2+3x+2)\cdot P(x-1)=(x^3-3x^2+3x-2)\cdot P(x)$, ①

知 $(x+2)(x^2+x+1)\cdot P(x-1)=(x-2)(x^2-x+1)\cdot P(x)$. ②

将 $x=-2$ 代入②式,得 $0=-28\cdot P(-2)$,即有 $P(-2)=0$;

将 $x=2$ 代入②式,得 $28\cdot P(1)=0$,即有 $P(1)=0$;

将 $x=-1$ 代入②式,得 $0=-9\cdot P(-1)$,即有 $P(-1)=0$;

将 $x=1$ 代入②式,得 $9\cdot P(0)=0$,即有 $P(0)=0$.

于是,可令 $P(x)=(x-1)x(x+1)(x+2)\cdot Q(x)$, ③

其中 $Q(x)$ 是关于 x 的实系数多项式.

从而,$P(x-1)=(x-2)(x-1)x(x+1)\cdot Q(x-1)$. ④

利用①,②,③,④得

$(x-2)(x-1)\cdot x\cdot(x+1)(x+2)\cdot(x^2+x+1)\cdot Q(x-1)$

$=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2-x+1)\cdot Q(x)$.

由于上式两边都是关于 x 的多项式,则

$(x^2+x+1)\cdot Q(x-1)=(x^2-x+1)\cdot Q(x)$. ⑤

注意到 x^2+x+1 与 x^2-x+1 互质,则 $Q(x)=(x^2+x+1)\cdot R(x)$, ⑥

其中 $R(x)$ 是关于 x 的实系数多项式.

同时,可得 $Q(x-1)=(x^2-x+1)\cdot R(x-1)$. ⑦

利用⑤,⑥,⑦得

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)\cdot R(x-1)=(x^2-x+1)\cdot(x^2+x+1)\cdot R(x)$.

但 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)\neq 0$,于是 $R(x-1)=R(x)$,因此 $R(x)$ 是常数.

由③,⑥得 $P(x)=c(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2+x+1)$,其中 c 是任意常数.

可直接验证,上述多项式满足题设条件,因此就是所求的多项式.

2. 从分析多项式的系数入手

例 6 求所有以有理数 a,b,c 为根的三次多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

(IMO - 26 预选题)

解 由韦达定理有 $\begin{cases}a+b-c=-a, & ①\\ ab+bc+ca=b, & ②\\ abc=-c. & ③\end{cases}$

若 $c=0$,则由①,②得 $a+b=-a$, $ab=b$.

故 $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$

若 $c\neq 0$,则由③有 $ab=-1$,由①有 $c=-2a-b$,代入②则有 $(b+1)(b^3-2b+2)=0$,而 $b^2-2b+2=0$ 无有理根,故 $b=-1$.

所求多项式为 $f_1(x)=x^3+x^2-2x$, $f_2(x)=x^3+x^2-x-1$.($f_3(x)=0$ 不合题意,舍去.)

例 7 求所有满足 $P(x^2)\equiv[P(x)]^2(x\in\mathbf{R})$ 的非零多项式 $P(x)$.

(1980 年罗马尼亚奥林匹克题)

解 当 $P(x)$ 为非零常数 a 时,即 $a=P(x^2)=[P(x)]^2=a^2$,从而 $a=1$,即 $P(x)=1$ 满足题设.当 $P(x)$ 为 $n(\geqslant 1)$ 次多项式时,设所求的多项式为 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,其中 $a_n\neq 0$,比较 $P(x^2)=a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_0$ 与 $[P(x)]^2=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)^2=a_n^2x^{2n}+\cdots$ 中的首项系数得 $a_n=1$.

设系数 $a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0$ 至少有一个不为 0,且设 $k(<n)$ 是使 $a_k\neq 0$ 的最大整数,于是再比较 $P(x^2)=x^{2n}+a_kx^{2k}+\cdots$ 与 $[P(x)]^2=x^{2n}+2x^n(a_kx^k+\cdots)+(a_kx^k+\cdots)^2=x^{2n}+2a_kx^{n+k}+\cdots$ 中的 x^{n+k} 项的系数得 $2a_k=0$,即 $a_k=0$,因此 $a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=a_0=0$,故 $P(x)=x^n$ 或 $P(x)=1$ 即为所求.

例 8 求所有满足 $P(x^2-2x)\equiv[P(x-2)]^2(x\in\mathbf{R})$ 的非零多项式 $P(x)$.

(1976 年保加利亚竞赛题)

解 此例只需令 $y=x-1$,则 $Q(y)=P(y-1)$, $[P(x-2)]^2=[P(y-1)]^2=[Q(y)]^2$, $P(x^2-2x)=P(y^2-1)=Q(y^2)$,变成例 5 的形式,从而 $P(x)=(x+1)^n$ 即为所求.

例 9 试求出所有的实系数多项式 $P(x)$,使得对满足 $ab+bc+ca=0$ 的所有实数 a,b,c 都有 $P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$.

(IMO-45 试题)

解 因对任给的 $a,b,c\in\mathbf{R}$,满足 $ab+bc+ca=0$,有

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c).\quad ①$$

则可在①式中令 $a=b=c=0$,得 $P(0)=0$;

在①式中令 $b=c=0$,得 $P(-a)=P(a)$ 对任意实数 a 成立.

因此 $P(x)$ 的所有奇次项系数为 0($P(x)$ 具有偶函数性质).

不妨设 $P(x)=a_nx^{2n}+\cdots+a_1x^2$, $a_n\neq 0$.

在①式中令 $b=2a$, $c=-\frac{2}{3}a$,有 $P(-a)+P(\frac{8}{3}a)+P(-\frac{5}{3}a)=2P(\frac{7a}{3})$.

即 $a_n[1+(\frac{8}{3})^{2n}+(\frac{5}{3})^{2n}-2(\frac{7}{3})^{2n}]\cdot a^{2n}+\cdots+a_1[1+(\frac{8}{3})^2+(\frac{5}{3})^2-2(\frac{7}{3})]a^2=$

0,对所有 $a \in \mathbf{R}$ 成立,故关于 a 的多项式的所有系数为 0.

当 $n \geqslant 3$ 时,由 $8^6 = 262144 > 235298 = 2 \cdot 7^6$ 知 $(\frac{8}{7})^{2n} \geqslant (\frac{8}{7})^6 > 2$.

从而 $\quad 1 + (\frac{8}{3})^{2n} + (\frac{5}{3})^{2n} - 2(\frac{7}{3})^{2n} > 0$.

因此 $n \leqslant 2$,于是可设 $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

下面验证 $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$ 满足要求.

设 $a, b, c \in \mathbf{R}$,且 $ab + bc + ca = 0$,则

$(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 - 2(a+b+c)^4$

$= \sum(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) - 2(a^2+b^2+c^2)^2$

$= \sum(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) - 2a^4 - 2b^4 - 2c^4 - 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$

$= -4a^2(ab+ca) - 4b^2(bc+ab) - 4c^2(ca+bc) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

$= 4a^2bc + 4b^2ca + 4c^2ab + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 2(ab+bc+ca)^2 = 0$.

即 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(a+b+c)^2$

$= \sum(a^2 - 2ab + b^2) - 2\sum a^2 - 4\sum ab = 0$.

因此 $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$ 满足要求.

3. 从分析次数入手

例 10 设 k 是正整数,求一切多项式 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$,其中 a_i 是实数,满足等式 $P(P(x)) = [P(x)]^k$. (1975 年加拿大奥林匹克题)

解 若 $P(x)$ 为零多项式,则它适合题意.

当 $P(x)$ 为非零多项式时,记 $\deg P(x) = n$,则 $\deg P(P(x)) = n^2$, $\deg[P(x)]^k = nk$,比较已知等式两边多项式的次数,可得 $n^2 = nk$.

(i) 若 $n = 0$,则 $P(x) \equiv c$(常数).当 $k = 1$ 时,c 可取任意非零实数;当 k 为正偶数时,$c = 1$;当 k 为大于 1 的奇数时,$c = \pm 1$.

(ii) 若 $n > 0$,则 $n = k$,记 $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0 (a_k \neq 0)$,则有

$a_k(a_k x^k + \cdots + a_0)^k + a_{k-1}(a_k x^k + \cdots + a_0)^{k-1} + \cdots + a_0 \equiv (a_k x^k + \cdots + a_0)^k$.

比较两边最高次项系数得 $a_k^{k+1} = a_k^k$,故 $a_k = 1$,于是上式变为

$a_{k-1}(a_k x^k + \cdots + a_0)^{k-1} + \cdots + a_0 \equiv 0$,

所以 $a_{k-1} = a_{k-2} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$,故 $P(x) = x^k$.

例 11 用以下规则归纳地选出多项式的集合 S.(1) $x \in S$;(2) 若 $f(x) \in S$,则 $x \cdot f(x) \in S$, $x + (1-x) \cdot f(x) \in S$.证明:$S$ 中没有两个不同的多项式,它们的图象在区域 $0 < x < 1$ 中相交. (1987 年美国奥林匹克题)

证明 我们先证,当 $0 < x < 1$ 时,对任意的 $f(x) \in S$,总有 $0 < f(x) < 1$.

对多项式的次数采用数学归纳法.

当 $f(x)$ 为一次多项式时,由题设 $f(x) = x$,显然由 $0 < x < 1$ 得 $0 < f(x) < 1$.

假设当 $f(x)$ 为 k 次多项式时,$0 < f(x) < 1$,当 $f(x)$ 为 $k+1$ 次多项式时,由选出多项式的规则,$k+1$ 次多项式为 $xf(x)$ 及 $x + (1-x)f(x)$,显然有 $0 < x \cdot f(x) < x < 1, 0 < x + (1-x) = 1$,即对 $k+1$ 次多项式其值 $\in (0,1)$.

因而,对 $0 < x < 1$,总有 $0 < f(x) < 1$ 成立.

我们再证:S 中没有两个不同的多项式,在 $0 < x < 1$ 上的图象相交.仍对次数用数学归纳法.

当 $f(x)$ 为一次多项式时,即 $f(x) = x$,显然不可能相交,假设 k 次多项式 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的图象在 $0 < x < 1$ 上不相交,即对任何 $x \in (0,1)$ 有 $f_1(x) \neq f_2(x)$,那么对 $k+1$ 次多项式,必有 $x \cdot f_1(x) \neq x \cdot f_2(x), x + (1-x) \cdot f_1(x) \neq x + (1-x)f_2(x)$.

又由于 $0 < f_1(x) < 1, 0 < f_2(x) < 1$,则 $x \cdot f_1(x) < x < x + (1-x)f_2(x), x \cdot f_2(x) < x < x + (1-x) \cdot f_1(x)$.

于是有 $xf_1(x) \neq x + (1-x)f_2(x), xf_2(x) \neq x + (1-x)f_1(x)$.

因此,$k+1$ 次多项式:$xf_1(x), xf_2(x), x + (1-x)f_1(x), x + (1-x)f_2(x)$ 的图象在 $0 < x < 1$ 上不相交,所以命题对 $k+1$ 成立.

故由数学归纳法原理知对 n 次多项式命题真.

4. 注意余式定理的灵活运用

例 12 求所有满足 $xP(x-1) \equiv (x-2)P(x)(x \in \mathbf{R})$ 的多项式 $P(x)$.

(1977 年民主德国竞赛题)

解 将0,2代入题中的恒等式,可知多项式有根0和1,即它被多项式 $x^2 - x$ 整除.其次,将 $P(x) = (x^2 - x)Q(x)$ 代入恒等式,可知多项式 $Q(x)$ 满足恒等式 $Q(x) \equiv Q(x-1)$,由此得到 $Q(0) = Q(1) = Q(2) = \cdots$ 因此 $Q(x) \equiv a$(常数),于是所求的多项式为 $P(x) = a(x^2 - x)$.

反之,容易验证,所有这样的多项式也都满足题中的恒等式.

例 13 求所有满足 $(x-1)P(x+1) - (x+2)P(x) \equiv 0(x \in \mathbf{R})$ 的多项式 $P(x)$.

(1976 年美国纽约竞赛题)

解 此例可类似于例 10 求得 $P(x) = a(x^2 - x)$.

【解题思维策略分析】

1. 注意各种方法的综合运用

例 14 多项式 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 只取值 $+1$ 或 -1,且方

程 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ ①

的根全是实的.求具有上述性质的多项式全体. （第 29 届普特南试题）

解 显然所求多项式不是零多项式和零次多项式.设所求多项式的次数为 n.

当 $n = 1$ 时,所求的所有可能的四个多项式是: $\pm(x+1)$、$\pm(x-1)$ 都是符合题意的.

当 $n \geqslant 2$ 时,设方程 ① 的根是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,则

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (x_1 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n)$.

由韦达定理有

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a_{n-2}}{a_n} = 1 - \frac{2a_{n-2}}{a_n} \text{ 及 } x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2 = \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^2 = 1.$$

又由平均值不等式得

$$\frac{1 - 2\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n} = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2} = 1,$$

即 $\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \leqslant \dfrac{1-n}{2}$, ②

其中等号当且仅当 $x_1^2 = x_2^2 = \cdots = x_n^2$ 成立,但是 a_{n-2}, a_n 都只取值 1 或 -1,故

$\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \geqslant -1$,从而 $-1 \leqslant \dfrac{1-n}{2} \Rightarrow n \leqslant 3$.

当 $n = 2$ 时,由 ② 得 $\dfrac{a_0}{a_2} \leqslant -\dfrac{1}{2}$,故 $\dfrac{a_0}{a_2} = -1$,即 a_0, a_2 异号,这时 $a_1 = 1$ 或 -1,所有可能的四个多项式是: $\pm(x^2 + x - 1)$, $\pm(x^2 - x - 1)$ 都是符合题意的.

当 $n = 3$ 时,则 ② 式等号成立,此时 a_1 与 a_3 异号,且 $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$, $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 = 1$, 从而方程 ① 的根是 $+1$ 或 -1.又因 $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} = \pm 1$,即 a_2 与 a_3 同号或异号,但 x_1, x_2, x_3 不能全为 1,也不能全为 -1,即方程 ① 的根或是 $1, 1, -1$,或是 $1, -1, -1$,从而 $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} = \pm 1$,知 a_3 与 a_0 同号或异号.这时,得到四个多项式: $\pm(x^3 + x^2 - x - 1)$, $\pm(x^3 - x^2 - x + 1)$ 都是符合题意的.

综上所述,所求的多项式全体有 12 个.

例 15 求所有满足 $P(x) \cdot P(2x^2) \equiv P(2x^3 + x)$ $(x \in \mathbf{R})$ 的实系数非零多项式 $P(x)$.

（IMO－21 预选题）

解 设非零多项式 $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ 满足题设中条件,则比

较原恒等式中 x^{3n} 和 x^0 的系数,得到 $a_n^2 = a_n, a_0^2 = a_0$,从而 $a_n = 1$.如果 $a_0 = 0$,则 $P(x) = x^k P_{1(x)}$,其中 $P_1(0) \neq 0, k \in \mathbf{N}$,又由 $x^k P_1(x) \cdot (2x^2)^k \cdot P_1(2x^2) \equiv (2x^3 + x)^k \cdot P_1(2x^3 + x)$ 有 $2^k x^{2k} \cdot P_1(x) \cdot P_1(2x^2) \equiv (2x^2 + 1)^k \cdot P_1(2x^3 + x) \Rightarrow P_1(0) = 0$,矛盾,因此 $a_0 = 1$.

设 $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ 是多项式 $P(x)$ 的根,由于 $P(2\alpha^3 + \alpha) = P(\alpha) \cdot P(2\alpha^2)$,从而 $2\alpha^3 + \alpha$ 也是其根.

其次,$|2\alpha^3 + \alpha| = |\alpha| \cdot |2\alpha^2 + 1| \geqslant |\alpha| \cdot (2|\alpha|^2 - 1)$,所以,如果 $|\alpha| = r > 1$,则 $|2\alpha^3 + \alpha| > |\alpha|$,从而非零多项式 $P(x)$ 有无数多个不同的根:$\beta_1 = \alpha, \beta_{j+1} = 2\beta_j^3 + \beta_j, j = 1, 2, \cdots$ 不可能.因此多项式 $P(x)$ 的根的模不大于 1,但由韦达定理,诸根的乘积为 1,所以没有模小于 1 的根,于是 $r = 1$,并由 $1 = |2\alpha^3 + \alpha|^2 = |2\alpha^2 + 1|^2 = 4\cos 2\varphi + 5$ 得到 $\varphi = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbf{Z}$,即 $\alpha = \pm i$.因为 β_j 是实系数的,所以 $P(x) = (x^2 + 1)^k, k \in \mathbf{Z}^+$.

最后,可验证知所有这种形式的多项式满足题意.

2. 注意多元问题的灵活处理

例 16 找出所有 n 次二元实系数多项式 $f(x,y)$,使得对任意实数 x, y,有 $f(x+1, y+1) = f(x,y)$.

解 我们要想办法将二元多项式问题归结为一元多项式问题处理,令

$$x = u + v, y = u - v. \quad ①$$

则 $$u = \frac{1}{2}(x + y), v = \frac{1}{2}(x - y). \quad ②$$

记 $$f(x,y) = f(u + v, u - v) = F(u,v). \quad ③$$

$F(u,v)$ 也是 n 次二元实系数多项式,那么利用①、③得

$$f(x+1, y+1) = f[(u+1) + v, (u+1) - v] = F(u+1, v). \quad ④$$

利用题目条件,有 $F(u+1, v) = F(u,v)$. ⑤

从上式,对于任意正整数 $n \geqslant 2$,有

$$F(u+n, v) = F[u + (n-1), v] = F[u + (u-2), v] = \cdots = F(u,v). \quad ⑥$$

由于 x, y 是任意实数,从②,u, v 可取任意实数.

任取两个实数 a, b,令 $g(u) = F(u,b) - F(a,b)$, ⑦

其中 a, b 固定不变,$g(u)$ 是 u 的一元实系数多项式,至多 n 次利用⑤、⑥,对于任意正整数 n,有

$$g(a+n) = F(a+n, b) - F(a,b) = 0. \quad ⑧$$

因此,多项式 $g(u)$ 有无限多个实根 $a+1, a+2, a+3, \cdots, a+n, \cdots$,从而多项式

$g(u)$ 恒等于零,再利用 ⑦,对于任意实数 u,有

$$F(u,b)=F(a,b). \quad ⑨$$

取 $a=0,b=v$,从 ⑨ 式,有 $F(u,v)=F(0,v)$. ⑩

其中 u,v 是任意两个实数,利用 ②,③,⑩,对于任意实数 x,y,有

$$f(x,y)=F(u,v)=F(0,v)=F[0,\frac{1}{2}(x-y)]. \quad ⑪$$

明显地,$F[0,\frac{1}{2}(x-y)]$ 是关于 $x-y$ 的一个实系数多项式.由于 $f(x,y)$ 是 n 次二元实系数多项式,有

$$f(x,y)=F[0,\frac{1}{2}(x-y)]=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-y)^k,$$

其中 a_n 是任意非零实数,$a_k(0\leqslant k\leqslant n-1)$ 是任意实数.

例 17 设 $f(x,y,z)$ 是关于 x,y,z 的多项式,且是关于 x 的 4 次式,它还满足

$$\begin{cases}f(x,z^2,y)+f(x,y^2,z)=0,\\ f(z^3,y,x)+f(x^3,y,z)=0.\end{cases}$$

求出一个这样的多项式 $f(x,y,z)$. (1995 年日本奥林匹克预赛题)

解 由题设条件,考虑设 $F(x,y,z)=f(x^3,y^2,z)$,则

$F(x,z,y)=-F(x,y,z),F(z,y,x)=-F(z,x,y)$.

据此,有 $F(y,x,z)=-F(z,x,y)=F(z,y,x)=-F(x,y,z)$.

因此,$F(x,y,z)$ 是 x,y,z 的交代式.

此外,还可证明下列等式成立:$F(x,y,z)=F(y,z,x)=F(z,x,y)$.

因 $F(x,y,z)$ 是交代式,故存在某对称式 $g(x,y,z)$,使得

$f(x^3;y^2,z)=F(x,y,z)=g(x,y,z)(x-y)(y-z)(z-x)$.

上式中将 y 换成 $-y$,则

$f(x^3,y^2,z)=F(x,-y,z)=g(x,-y,z)(x+y)(-y-z)(z-x)$,

可知 $f(x^3,y^2,z)$ 也被 $x+y$ 整除.同理,设 ω 是异于 1 的 $\omega^3=1$ 的根,用 $x\omega$ 及 $x\omega^2$ 替换 x,而 $f(x^3,y^2,z)$ 不变,可知 $f(x^3,y^2,z)$ 可被 $x\omega-y,x\omega^2-y,x\omega+y,x\omega^2+y$ 整除.因此,$f(x^3,y^2,z)$ 被 $(x-y)(x\omega-y)(x\omega^2-y)(x+y)(x\omega+y)(x\omega^2+y)=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=x^6-y^6$ 整除.

此外 $f(x^3,y^2,z)=F(x,y,z)=F(y,z,x)=f(y^3,z^2,x)$.

所以 $f(x^3,y^2,z)$ 可被 y^6-z^6 整除.同理它也可被 z^6-x^6 整除.

因此,存在对称式 $h(x,y,z)$,使得

$f(x^3,y^2,z)=h(x,y,z)(x^6-y^6)(y^6-z^6)(z^6-x^6)$.

所以 $(x^6-y^6)(y^6-z^6)(z^6-x^6)$ 是 $f(x^3,y^2,z)$ 的一个因子.这时,$f(x,y,z)$ 为

$(x^2-y^3)(y^3-z^6)(z^6-x^2)$ 是关于 x 的 4 次式，因此本题的一个答案是 $(x^2-y^3)(y^3-z^6)(z^6-x^2)$.

例 18 求满足下列条件的关于 x,y 的次数最低(但不低于 1 次)的多项式 $f(x,y)$:

$$\begin{cases} f(x,y)+f(y,x)=0, & ① \\ f(x,x+y)+f(y,x+y)=0. & ② \end{cases}$$

(1994 年日本奥林匹克预赛题)

解 若 $f(x,y)$ 的各项次数相同时，即对某非负整数 k，有 $f(x,y)=\sum\limits_{j=0}^{k}a_jx^jy^{k-j}$，则称 $f(x,y)$ 是关于 x,y 的 k 次齐式. 对任意二变元的 i 次齐式之和可表为 $f(x,y)=\sum\limits_{i=0}^{n}f_i(x,y)$，若 f 满足题设的两个条件，则各 $f_i(x,y)$ 也满足同样的条件. 因此，所要求的 $f(x,y)$ 是次数最低的齐次式.

由 ① 知 $f(x,y)$ 被 $x-y$ 整除，即 $f(x,y)=(x-y)h(x,y)$，其中 $h(x,y)$ 是关于 x,y 的齐次式，且 $h(x,y)=h(y,x)$，即为对称式.

由 ② 得 $-yh(x,x+y)-xh(y,x+y)=0$,

上式中以 $y-x$ 代 y 得 $-(y-x)h(x,y)-xh(y-x,y)=0$,

由此，$h(x,y)$ 被 x 整除，由对称性它也被 y 整除，所以

$f(x,y)=(x-y)h(x,y)=(x-y)xyg(x,y)$,

其中 $g(x,y)$ 也是齐次对称式.

将条件 ② 用于上式，有

$[x-(x+y)]x(x+y)g(z,x+y)+[y-(x+y)]y(z+y)g(y,x+y)=0$,

即 $g(x,x+y)+g(y,x+y)=0.$ ③

令 $y=-x$，代入上式，得 $g(x,0)+g(-x,0)=0.$ ④

今设 $g(x,y)$ 为 l 次齐式，即 $g(x,y)=\sum\limits_{j=0}^{l}c_jx^jy^{1-j}$.

由 ④ 知，$c_l+c_l(-1)^l=0$.

因此，l 为奇数或 $c_l=0$.

若 $c_l=0$，则 $g(x,y)$ 被 y 整除，由对称性知它也被 x 整除，故 $l\geqslant 2$，若 $g(x,y)=xy$ 及其常数倍，则不满足 ③，故 $l\geqslant 3$.

再考虑 $c_l\neq 0$ 及 l 为奇数的情况，一次对称式 $x+y$ 及其常数倍也不满足 ③.

综上知 $l\geqslant 3$，即 $g(x,y)$ 至少是 3 次齐次对称式，设

$g(x,y)=a(x^3+y^3)+bxy(x+y)$,

代入 ③，得 $ax^3+a(x+y)^3+bx(x+y)(2x+y)+ay^3+a(x+y)^3+by(x+$

$y)(x+2y)=0$,

即 $a[(x^3+y^3)+2(x+y)^3]+b(x+y)[(2x^2+xy)+(xy+2y^2)]=0$,

上式两边除以 $x+y$,得

$$a[x^2-xy+y^2+2(x+y)^2]+b(2x^2+2xy+2y^2)=0,$$

即 $(3a+2b)(x^2+xy+y^2)=0$.

由此得 $b=-3a/2$.因此,例如 $a=2,b=-3$ 便是其一个解,于是

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(x-y)xyg(x,y)\\&=(x-y)xy[(2x^3+y^3)-3xy(x+y)]\\&=(x-y)xy(x+y)[2(x^3-xy+y^2)-3xy]\\&=(x-y)xy(x+y)(2x^2-5xy+2y^2)\\&=(x-y)xy(x+y)(2x-y)(x-2y).\end{aligned}$$

【模拟实战】

习题 A

1. 求所有满足 $(x-1)\cdot p(x+1)-(x+2)\cdot P(x)\equiv 0, x\in\mathbf{R}$ 的多项式.

(1976 年纽约竞赛题)

2. 对每个 $n\in\mathbf{N}$,是否存在非零的 n 元整系数多项式 P 和 Q,使得 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\cdot P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv Q(x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2),x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$. (匈牙利奥林匹克题)

3. 设 $f(x)=a_5x^5+a_4x^4+\cdots+a_1x+a_0,g(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$ 和 $h(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$ 均为系数绝对值分别不超过 4,1 和 1 的整系数多项式,且 $f(10)=g(10)\cdot h(10)$.问是否有多项式 $f(x)$,使得 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$?

4. 设多项式 $R(x)$ 的次数小于 4,并且存在多项式 $P(x)$,使得

$$\begin{aligned}&7\sin^{31}t+8\sin^{13}t-5\sin^5t\cdot\cos^4t-10\sin^7t+5\sin^5t-2\\&\equiv P(\sin t)[\sin^4t-(1+\sin t)(\cos^2t-2)]+R(\sin t),\end{aligned}$$

这里 $t\in\mathbf{R}$,试求这样的 $R(x)$.

习题 B

1. 求出满足下列条件的所有含有两个变量的多项式:

(1) P 是 n 次齐次的,即对所有实数 t,x,y,有 $P(tx,ty)=t^n\cdot P(x,y)$;

(2) 对所有的实数 a,b,c 有 $P(a+b,c)+P(b+c,a)+P(c+a,b)=0$;

(3) $P(1,0)=1$.

2. (1) 是否存在关于变量 x,y,z 的多项式 $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$, 使恒等式 $(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=1$ 成立?

(2) 对于恒等式 $(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)^3R=1$, 上一问题中的多项式存在吗? (第16届全苏奥林匹克题)

3. 试求所有满足下列条件的实系数多项式 $f(x)$:

(1) $f(x)=a_0x^{2n}+a_2x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-2}x^2+a_{2n}, a_0>0$;

(2) $\sum\limits_{j=0}^{n}a_{2j}a_{2n-2j}\leqslant C_{2n}^{n}\cdot a_0a_{2n}$;

(3) $f(x)$ 的 $2n$ 个根都是纯虚数. (1997年中国国家队选拔赛题)

4. 给定实数 a, 设实系数多项式序列 $\{f_n(x)\}$ 满足

$$\begin{cases}f_0(x)=1,\\ f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_n(ax), n=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

(1) 求证: $f_n(x)=x^nf_n\left(\dfrac{1}{x}\right), n=0,1,2,\cdots$

(2) 求 $f_n(x)$ 的明显表达式. (CMO-14试题)

第二十五章　一类三元三次齐次多项式的性质及应用

【基础知识】

若用$\sum$表三元循环和，则有

$x+y+z=\sum x$，$x^2+y^2+z^2=\sum x^2$，

$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=\sum x^2(y+z)$，等等.

$(\sum x)^3=(x+y+z)^3=\sum x^3+3\sum x^2(y+z)+6xyz$，

$\sum x\cdot\sum x^2=(x+y+z)\cdot(x^2+y^2+z^2)=\sum x^3+\sum x^2(y+z)$，

$\sum x\cdot\sum xy=(x+y+z)\cdot(xy+yz+zx)=\sum x^2(y+z)+3xyz$，等等.

对于三元三次齐次多项式$f(x,y,z)$，我们有下述结论：

性质1　当$x+y+z\geqslant 0$时，$f(x,y,z)=\sum x^3-3xyz\geqslant 0$.　　(25－1)

事实上，由$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]，$$即证.

注　对于x,y,z^+，由平均值不等式，有

(1)$\sum x^3\geqslant 2\sum xy^2-\sum x^2y$；　　(25－1－1)

(2)$\sum x^2\cdot\sum x\geqslant 3\sum xy^2$　　(25－1－2)

　或$\sum x^2\cdot\sum x\geqslant 3\sum x^2y$；

(3)$(\sum x)^2\geqslant 3\sum xy$.　　(25－1－3)

性质2　当$x,y,z\geqslant 0$时，$f(x,y,z)=\sum x(x-y)(x-z)$

$$=\sum x^3-\sum x^2(y+z)+3xyz\geqslant 0.\qquad(25-2)$$

事实上，因$\sum x(x-y)(x-z)$是x,y,z的对称式，于是可假定有$x\geqslant y\geqslant z$，从而

$$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)$$
$$\geqslant x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)$$
$$\geqslant y(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)$$
$$=y(x-y)(x-y)\geqslant 0.$$

注 性质 2 即为 Schur 不等式：

设 x,y,z 为非负实数，则有 $\sum x^r(x-y)(x-z)\geqslant 0$.

性质 2 即为当 $r=1$ 时的情形 .

性质 3 在 $\triangle ABC$ 中，记 $BC=a,CA=b,AB=c$，则

$$f(a,b,c)=\sum a^3-2\sum a^2(b+c)+9abc\leqslant 0. \quad (25-3)$$

事实上，令 $a=y+z,b=z+x,c=x+y$，则

$$x=\frac{1}{2}(b+c-a)>0, y=\frac{1}{2}(c+a-b)>0, z=\frac{1}{2}(a+b-c)>0.$$

将 x,y,z 代入(25－2)式，即得(25－3)式.

性质 4 在 $\triangle ABC$ 中，记 $BC=a,CA=b,AB=c$，则

$$f(a,b,c)=\sum a^3-\sum a^2(b+c)+2abc<0. \quad (25-4)$$

事实上，由三角形性质，有 $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)>0$ 展开即证.

性质 5 设 a,b,c 为三角形三边的长，令

$$f(a,b,c)=A(a^3+b^3+c^3)+B(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)+Cabc$$
$$=A\cdot\sum a^3+B\cdot\sum a^2(b+c)+C\cdot abc,$$

(1) 若 $f(1,1,1)$，$f(1,1,0)$ 和 $f(2,1,1)$ 都非负，则 $f(a,b,c)\geqslant 0$. (25－5)

(2) 若 $f(1,1,1)>0$，而 $f(1,1,0)\geqslant 0$，$f(2,1,1)\geqslant 0$，则

$$f(a,b,c)>0. \quad (25-6)$$

(3) 若 $f(1,1,1,)=0$，而 $f(1,1,0)>0$，$f(2,1,1)\geqslant 0$，则

$$f(a,b,c)\geqslant 0. \quad (25-7)$$

其中(25－5)，(25－7) 的等号当且仅当 $a=b=c$ 时取得.

证明 假设三角形中 a 边最大，不失一般性，可设 $a=x+y+z,b=x+y,c=y+z$，当 x,y,z 取遍所有非负实数时(除三角形退化为一线段外，总有 $y\neq 0$)，则 a,b,c 可以遍取所有三角形边长，当且仅当 $x=z=0$ 时成立等号. 于是

$$f(a,b,c)=[c_1(x+z)(x-z)^2+(c_1+c_2)(x^2z+xz^2)]$$
$$+[c_3(x-z)^2+(2c_3+c_4)xz]\cdot y+c_5(x+z)\cdot y^2+c_6\cdot y^3, \quad (*)$$

其中 $c_1=f(1,1,0)=2A+2B$，$c_2=3A+5B+C$，

$$c_3=\frac{3}{2}c_1+c_2=6A+8B+C, c_4=-\frac{3}{2}c_1-c_2+4c_6,$$

$c_5 = 2c_6, c_6 = f(1,1,1) = 3A + 6B + C.$

(1) 由题设 $c_1 = f(1,1,0) \geqslant 0, c_1 + c_2 = \frac{1}{2}f(2,1,1) \geqslant 0,$

$c_6 = f(1,1,1) \geqslant 0$,可以推出

$c_5 \geqslant 0, c_3 = \frac{3}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{2}c_1 + (c_1 + c_2) \geqslant 0,$

即有 $2c_3 + c_4 = 2c_3 + (-c_3 + 4c_6) = c_3 + 4c_6 \geqslant 0.$

于是,由(*)式,知 $f(a,b,c) \geqslant 0$.

(2),(3) 同理可证(略).

下面讨论 $f(a,b,c) \geqslant 0$ 中等号成立的充要条件.

若 $a = b = c, f(1,1,1) = 0$,推出 $f(a,b,c) = 0$ 容易.

反之,由 $f(a,b,c) = 0$,可知 $c_1(x+z)(x-z)^2 = 0$;

又因 $c_1 = f(1,1,0) > 0$,必有 $x = z$.这时,除三角形退化为一点外,总有 $y \neq 0$.

将条件 $f(a,b,c) = 0, x = z, f(1,1,1) = 0$ 代入(*)式,注意到 $c_6 = f(1,1,1) = 0, c_5 = 2c_6 = 0$ 和 $2c_3 + c_4 = c_3 + 4c_6 = c_3$,得 $2(c_1 + c_2)x^3 + c_3x^2y = 0$.

若 $x \neq 0$,就必有 $c_1 + c_2 = 0$,且 $c_3 = 0$,因而有 $\frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}c_1 + (c_1 + c_2) = c_3 = 0$,此与 $c_1 > 0$ 矛盾,所以必有 $z = x = 0$,即 $a = b = c$.证毕.

注 由于 $f(a,b,c) = A \cdot \sum a^3 + B \cdot \sum a^2(b+c) + C \cdot abc$,则

$f(1,1,1) = 3A + 6B + C,$

$f(1,1,0) = 2A + 2B,$

$f(2,1,1) = 10A + 14B + 2C.$

(i) 取 $A = -1, B = 2, C = -9$ 时,有

$f(1,1,1) = -3 + 12 - 9 = 0,$

$f(1,1,0) = -2 + 4 = 2 > 0,$

$f(2,1,1) = -10 + 28 - 18 = 0.$

于是,由(25-7)式,有 $f(a,b,c) = -\sum a^3 + 2\sum a^2(b+c) - 9abc \geqslant 0,$

即 $\sum a^3 - 2\sum a^2(b+c) + 9abc \leqslant 0$,此即为(25-3)式.

(ii) 取 $A = -1, B = 1, C = -2$ 时,有

$f(1,1,1) = -3 + 6 - 2 = 1 > 0,$

$f(1,1,0) = -2 + 2 = 0,$

$f(2,1,1) = -10 + 14 - 4 = 0.$

于是,由(25－6)式,有 $f(a,b,c)=-\sum a^3+\sum a^2(b+c)-2abc>0$,

即 $\sum a^3-\sum a^2(b+c)+2abc<0$,此即为(25－4)式.

【典型例题与基本方法】

例 1 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证:$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\geqslant\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

证明 由柯西不等式,知$(\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c})(ab^2+bc^2+ca^2)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$,及 $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$,即$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\geqslant a+b+c$.

于是,注意到(25－1－2)式,有

$$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab^2+bc^2+ca^2}\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$$

$$=\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}\cdot\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\geqslant\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.$$ 证毕.

例 2 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$.求证 $\frac{a}{b+c^2}+\frac{b}{c+a^2}+\frac{c}{a+b^2}\geqslant\frac{9}{4}$.

证明 由柯西不等式,有$(\frac{a}{b+c^2}+\frac{b}{c+a^2}+\frac{c}{a+b^2})[a(b+c^2)+b(c+a^2)+c(a+b^2)]\geqslant(a+b+c)^2$.于是,注意到(25－1－2)式及(25－1－3)式,有

$$\frac{a}{b+c^2}+\frac{b}{c+a^2}+\frac{c}{a+b^2}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+a^2b+b^2c+c^2a}\geqslant$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}=\frac{3}{3(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2}\geqslant$$

$$\frac{3}{(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=\frac{3}{1+\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}.$$ 证毕.

例 3 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证:$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.

(第 26 届莫斯科奥林匹克题)

证法 1 由(25－1－3)式或由平均值不等式,有 $ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$,由柯西不等式,有$(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]\geqslant(a+$

$b+c)^2$，于是 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2\cdot\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=\frac{3}{2}$.

证毕.

证法 2 原不等式可变形为

$$\sum a(c+a)(b+a)\geqslant\frac{3}{2}\prod(a+b)(\prod \text{表循环积}).$$

而 $\sum a(c+a)(b+a)-\frac{3}{2}\prod(a+b)$

$$=[\sum a^3+\sum a^2(b+c)+3abc]-\frac{3}{2}[\sum a^2(b+c)+2abc]$$

$$=\frac{1}{2}[2\sum a^3-\sum a^2(b+c)]$$

$$\geqslant\frac{1}{2}[\sum a^3-\sum a^2(b+c)+3abc]\text{（其中注意到(25－1)式）}$$

$$\geqslant 0\text{（注意到(25－2)式）}.$$

故命题获证.

例 4 设 $x,y,z\geqslant 0$，证明：$x(x-z)^2+y(y-z)^2\geqslant(x-z)(y-z)(x+y-z)$.

（1992 年加拿大奥林匹克题）

证明 $x(x-z)^2+y(y-z)^2-(x-z)(y-z)(x+y-z)$

$$=x^3-2x^2z+xz^2+y^3-2y^2z+yz^2-x^2y-xy^2+xyz+x^2z+xyz-xz^2+xyz+y^2z-yz^2-z^2(x+y-z)$$

$$=\sum x^3-\sum x^2(y+z)+3xyz\geqslant 0\text{（注意到(25－2)式）}.$$

故原不等式获证.

例 5 设 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长，求证：

$$abc\geqslant(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

证法 1 由 $abc-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

$$=a^3+b^3+c^3-(a^2c+a^2b+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+3abc$$

$$=\sum a^3-\sum a^2(b+c)+3abc$$

$$\geqslant 0\text{（注意到(25－2)式）},$$

得 $abc\geqslant(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

证法 2 令 $f(a,b,c)=abc-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$，

则 $f(1,1,1)=0,f(1,1,0)=0,f(2,1,1)=2>0$，

由(25－5)式，知 $f(a,b,c)\geqslant 0$，

故 $abc \geqslant (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

例 6 已知 a,b,c 是任一三角形的三边.求证:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$ (IMO－6 试题)

证法 1 由 $3abc-a^2(b+c-a)-b^2(c+a-b)-c^2(a+b-c)$

$$=\sum a^3-\sum a^2(b+c)+3abc \geqslant 0,$$

得 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc$.

证法 2 令 $f(a,b,c)=3abc-a^2(b+c-a)-b^2(c+a-b)-c^2(a+b+c)$,

则 $f(1,1,1)=0, f(1,1,0)=0, f(2,1,1)=2>0$.

由(25－5)式,知 $f(a,b,c) \geqslant 0$.

故 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc$.

【解题思维策略分析】

1. 注意所证不等式的变形处理

例 7 已知 x,y,z 为非负实数,且 $x+y+z=1$,求证:

$$0 \leqslant yz+zx+xy-2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$ (IMO－25 试题)

证明 由 $yz+zx+xy-2xyz=(yz+zx+xy)(x+y+z)-2xyz$

$$=\sum x^2(y+z)+xyz \geqslant 0$$

及 $7-27(yz+zx+xy-2xyz)$

$$=7(x+y+z)^3-27[(yz+zx+xy)(x+y+z)-2xyz]$$

$$=7\sum x^3-6\sum x^2(y+z)+15xyz \geqslant 6\sum x^3-\sum x^2(y+z)+18xyz$$

$\geqslant 0$(注意到(25－2)式及$\sum a^3 \geqslant 3abc$),

故 $0 \leqslant yz+zx+xy-2xyz \leqslant \frac{7}{27}$.

例 8 设 a,b,c 为非负实数,且 $abc=1$.求证:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$ (IMO－41 试题)

证明 不失一般性,设 $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}$,则 $c=\frac{z}{x}$(其中 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$),则所证不等式即为:$(x-y+z)(y+z-x)(z-x+y) \leqslant zyx$.

由 $xyz-(x-y+z)(y+z-x)(z-x+y)=\sum x^3-\sum x^2(y+z)+3xyz$

及(25－2)式可知$(x-y+z)(y+z-x)(z-x+y) \leqslant xyz$,

故$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\leqslant 1$.

2. 注意问题的统一处理

例 9 (1) 设 a,b,c 是三角形的三边之长,且 $a+b+c=2$.求证:$a^2+b^2+c^2+2abc<2$.

(1990 年匈牙利奥林匹克题)

(2) 设 T 是一个周长为 2 的三角形,x,y,z 是 T 的三边长,则 $xyz+\frac{28}{27}\geqslant xy+yz+zx$.

(2003 年爱尔兰奥林匹克题)

(3) 设 a,b,c 是三角形的三边之长,且 $a+b+c=1$,求证:$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$.

(第 23 届全苏竞赛题)

(4) $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 满足 $a+b+c=1$.求证:$5(a^2+b^2+c^2)=18abc\geqslant\frac{7}{3}$.

(《数学通讯》竞赛之窗 1992 年 11 期问题)

我们可以证明下面一般性的结论:

设 a,b,c 是三角形的三边之长,且 $a+b+c=\lambda(\lambda>0)$,则

$$\frac{13}{27}\lambda^2\leqslant a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\lambda}abc<\frac{\lambda^2}{2}. \quad (*)$$

$$\frac{1}{4}\lambda^2<ab+bc+ca-\frac{2}{\lambda}abc\leqslant\frac{7}{27}\lambda^2.$$

证明 原不等式等价于$\frac{13}{27}(\sum a)^3\leqslant\sum a^2\cdot\sum a+4abc<\frac{1}{2}(\sum a)^3$.

由

$$\begin{aligned}&(\sum a)^3-2(\sum a^2\cdot\sum a+4abc)\\ =&[\sum a^3+3\sum a^2(b+c)+6abc]-2[\sum a^3+\sum a^2(b+c)+4abc]\\ =&-[\sum a^3-\sum a^2(b+c)+2abc]>0(\text{由}(25-4)\text{式可知}),\end{aligned}$$

知不等式的右边得证.

又由

$$\begin{aligned}&27(\sum a^2\cdot\sum a+4abc)-13(\sum a)^3\\ =&27[\sum a^2+\sum a^2(b+c)+4abc]-13[\sum a^3+3\sum a^2(b+c)+6abc]\\ =&14\sum a^3-12\sum a^2(b+c)+30abc\\ \geqslant&12\sum a^3-12\sum a^2(b+c)+36abc(\text{因为}\ \sum a^3\geqslant 3abc)\\ \geqslant&0\quad(\text{由}(25-2)\text{式可知}).\end{aligned}$$

从而$\frac{13}{27}\lambda^2\leqslant a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\lambda}abc<\frac{\lambda^2}{2}$.

由 $a^2+b^2+c^2=\lambda^2-2(ab+bc+ca)$ 代入(*)式，

即得$\frac{1}{4}\lambda^2 < ab+bc+ca-\frac{2}{\lambda}abc \leqslant \frac{7}{27}\lambda^2$.

在(*)式中，分别令 $\lambda=2,\lambda=2,\lambda=1$，即为(1)(2)(3)所要证明的结论.

在(*)式中，令 $\lambda=1$，则有 $a^2+b^2+c^2+4abc \geqslant \frac{13}{27}$，所以

$$a^2+b^2+c^2+\frac{18}{5}abc \geqslant \frac{13}{27}-\frac{2}{5}abc \geqslant \frac{13}{27}-\frac{2}{5}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{7}{15},$$

整理即得 $5(a^2+b^2+c^2)=18abc \geqslant \frac{7}{3}$，此即为(4)所要证明的结论.

例 10 已知$\triangle ABC$中，设 I 是它的内心，$\angle A,\angle B,\angle C$ 的角平分线分别交其对边于 A',B',C'. 求证：$\frac{1}{4} < \frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'} \leqslant \frac{8}{27}$. （IMO－32 试题）

证明 记 $BC=a,CA=b,AB=c$，由于 I 是$\triangle ABC$的内心，

则有$\frac{AI}{IA'}=\frac{AC}{A'C},\frac{BA'}{A'C}=\frac{AB}{AC}$，所以$\frac{AI}{AA'}=\frac{b+c}{a+b+c}$.

同理，$\frac{BI}{BB'}=\frac{c+a}{a+b+c},\frac{CI}{CC'}=\frac{a+b}{a+b+c}$,

令$\frac{a}{a+b+c}=x,\frac{b}{a+b+c}=y,\frac{c}{a+b+c}=z$,

则$\frac{AI}{AA'}=1-x,\frac{BI}{BB'}=1-y,\frac{CI}{CC'}=1-z$,

于是$\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}=(1-x)(1-y)(1-z)=xy+yz+zx-xyz$.

由 a,b,c 是$\triangle ABC$的三边长知，x,y,z 也必为某个三角形的三边长，且 $x+y+z=1$.

由
$$\begin{aligned}4[(xy+yz+zx)-xyz]-1&=4\left[\sum xy\cdot\sum x-xyz\right]-\left(\sum x\right)^3\\&=4\left[\sum x^2(y+z)+3xyz-xyz\right]-\left[\sum x^3+3\sum x^2(y+z)+6xyz\right]\\&=-\sum x^3+\sum x^2(y+z)+2xyz>4xyz \quad (\text{由}(25-4)\text{式可知})\\&>0,\end{aligned}$$

知 $xy+yz+zx-xyz>\frac{1}{4}$.

又由
$$\begin{aligned}8-27(xy+yz+zx-xyz)&=8\left(\sum x\right)^3-27\left[\left(\sum xy\cdot\sum x\right)-xyz\right]\\&=8\left[\sum x^3+3\sum x^2(y-z)+6xyz\right]-27\left[\sum x^2(y+z)+3xyz-xyz\right]\\&=8\sum x^3-3\sum x^2(y+z)+6xyz\end{aligned}$$

$\geqslant \frac{3}{2}[\sum x^3 - 2\sum x^2(y+z) + 9xyz]$(注意$\sum a^3 \geqslant 3abc$)

$\geqslant 0$(由(21 - 3)式可知),

知 $xy + yz + zx - xyz \leqslant \frac{8}{27}$.

故原不等式获证.

【模拟实战】

习题 A

1. 设 $x, y, z \geqslant 0$,求证:

$2(x^3 + y^3 + z^3) \geqslant x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$.

2. 设 $x, y, z \geqslant 0$,求证:

$24xyz \leqslant 3(x+y)(y+z)(z+x) \leqslant 8(x^3 + y^3 + z^3)$.

3. 设 a, b, c 是三角形的三边长,求证:

$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3$.(匈牙利奥林匹克题)

4. 在 $\triangle ABC$ 中,a, b, c 为三边的长,求证:

(1)$2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3(a^3+b^3+c^3+3abc)$;

(2)$(a+b+c)^3 \leqslant 5[bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)] - 3abc$;

(3)$abc < a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) \leqslant \frac{3}{2}abc$,其中 $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$;

(4)$1 < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$.

习题 B

1. 设 $x, y, z \geqslant 0$,并且 $x + y + z = 1$,求证:

(1)$2(x^2 + y^2 + z^2) + 9xyz \geqslant 1$;

(2)$xy + yz + zx - 3xyz \leqslant \frac{1}{4}$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中,记 m_a, m_b, m_c 分别为边 $BC = a, CA = b, AB = c$ 上的中线的长.求证:

(1)$\sum \frac{m_a^2}{bc} \geqslant \frac{9}{4}$;

(2) $\sum \dfrac{m_b^2 + m_c^2 - m_a^2}{bc} \geqslant \dfrac{9}{4}$.

3. 证明锐角三角形的三条中线组成的三角形,它的外接圆半径大于原三角形外接圆半径的$\dfrac{5}{6}$.

4. 设 $a,b,c > 0$ 且 $ab + bc + ca = 1$.求证:$\sqrt{a^3 + a} + \sqrt{b^3 + b} + \sqrt{c^3 + c} \geqslant 2\sqrt{a + b + c}$.

(2008 年伊朗奥林匹克题)

5. 设 a,b,c 为正实数,求证:$(1 + \dfrac{4a}{b + c}) \cdot (1 + \dfrac{4b}{c + a}) \cdot (1 + \dfrac{4c}{a + b}) > 25$.

(2008 年马其顿王国奥林匹克题)

6. 设 a,b,c 是正数,且 $a + b + c = 1$.证明$\sum \dfrac{1}{bc + a + \dfrac{1}{a}} \leqslant \dfrac{27}{31}$.

(2008 年 Serbian 奥林匹克题)

7. 设 a,b,c 为正实数,求证:$(a + \dfrac{1}{b} - c)(b + \dfrac{1}{c} - a) + (b + \dfrac{1}{c} - a)(c + \dfrac{1}{a} - b) + (c + \dfrac{1}{a} - b)(a + \dfrac{1}{b} - c) \geqslant 3$.

(2000 年 IMO 预选题)

8. 正实数 a,b,c 满足 $a + b + c = 1$.求证$\dfrac{a - bc}{a + bc} + \dfrac{b - ca}{b + ca} + \dfrac{c - ab}{c + ab} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

(2008 年加拿大奥林匹克题)

第二十六章　多项式 $f(x)=x^n-1$ 的根的性质及应用

【基础知识】

多项式 $f(x)=x^n-1(n\in\mathbf{N}^+)$ 的根就是1的 n 次方根.1的 n 次方根称为 n 次单位根,或者说,一个复数 ε 的 n 次幂等于1,即 $\varepsilon^n=1$,那么这个复数 ε 就叫做1的一个 n 次单位根.1的 n 次单位根有很好的性质,运用这些性质处理某些数学问题是方便的.本章略作介绍.

首先看1的 n 次单位根 ε_k 的性质:

性质1　1的 n 次单位根有 n 个,它们分别是 $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

性质2　$(\varepsilon_k)^n=1,\varepsilon_k=(\varepsilon_1)^k,|\varepsilon_k|=1.(k=0,1,2,\cdots,n-1.)$

性质3　当 n 为奇数时,$\varepsilon_0=1$ 是其惟一实根;当 n 为偶数时,$\varepsilon_0=1,\varepsilon_{\frac{n}{2}}=1$ 是其两实根.其余各个虚根成对共轭,即 ε_k 与 ε_{n-k} 互为共轭虚根,且 $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_{n-k}=1.(k=0,1,\cdots,n-1.)$

性质4　$\{\varepsilon_k\}$ 对于乘法、除法是封闭的,或者说,方程 $x^n-1=0$ 的若干个根的乘积也是这个方程的根,这个方程两个根的商(或根的倒数)也是这个方程的根.

性质5　$1+\varepsilon_k^p+\varepsilon_k^{2p}+\cdots+\varepsilon_k^{(n-1)p}=\begin{cases}n,当\ p\ 是\ n\ 的整数倍或\ k=0;\\0,当\ p\ 不是\ n\ 的整数倍且\ k\neq0.\end{cases}$

特别地,$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-1}=0$ 或 $k\neq0$ 时 $1+\varepsilon_k+\varepsilon_k^2+\cdots+\varepsilon_k^{n-1}=0$.

性质6　若 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是两两互素的正整数,且 $n=p_1\cdot p_2\cdots p_m$,则1的 n 个 n 次单位根可由1的 p_1 个 p_1 次单位根乘以1的 p_2 个 p_2 次单位根,…,乘以1的 p_m 个 p_m 次单位根而得到.

性质7　$\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k=\prod\limits_{k=1}^{n-1}(x-\varepsilon_k)$.

特别地,当 $x=1$ 时,$n=\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-\varepsilon_k)$.

性质 8 ε_k 表示复平面上单位圆周的 n 等分点(或单位圆的内接正 n 边形的顶点),其中 $\varepsilon_0 = 1$ 是单位圆周与正实轴的交点.

我们称 1 的某个 n 次单位根,叫做 1 的 n 次单位原根(简称原根),当且仅当 $m < n$ 时,不是 1 的 m 次单位根.

例如 1 的 3 次单位原根是 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 和 $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,1 的 4 次单位原根是 i 和 $-$i.

性质 9 1 的一切 n 次单位原根,可以在所有单位根 $\varepsilon_k(k = 0,1,\cdots,n-1)$ 中给予 k 以小于 n 且与 n 互质的一切正整数的值而得出,且 1 的 n 次单位原根的个数,等于小于 n 而与 n 互质的那些数的个数,并记为 $\varphi(n)$,且 p,q 互质时,有 $\varphi(p\cdot q) = \varphi(p)\cdot\varphi(q)$.

性质 10 1 的所有 n 次单位根,等于它的任何一个原根的 n 个接连整数次幂;若 $n = p_1\cdot p_2\cdots p_m$ 且 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 两两互质,则 1 的一切 n 次单位原根可由 1 的 p_1 次单位原根,1 的 p_2 次单位原根,$\cdots$,1 的 p_m 次单位原根相乘而得到.

例如,1 的 12 次单位原根可由 1 的 3 次单位原根 ω,ω^2 与 1 的 4 次单位原根 i, $-$i 相乘而得到,为 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{\mathrm{i}}{2}$ 的 4 个.

性质 11 1 的 n 次单位根中每一对共轭原根对应着一个圆内接正 n 边多边形,并且反过来也是正确的,即具有 n 边的圆内接正多边形的个数与 1 的所有 n 次共轭原根的组数相同,为 $\frac{1}{2}\varphi(n)$ 个(圆内接正 n 边多边形是指把单位圆周 n 等分,每隔 p(p 与 n 互质且小于 $\frac{n}{2}$) 个分点连接而得的正 n 边多边形).

以上性质的证明也是不难的,作为练习留给读者.

由于有这些性质,1 的 n 次单位根在解题(特别是数学竞赛题)中有着广泛的应用.

【典型例题与基本方法】

1. 在复数计算题中的应用

例 1 (1) 求 $-$i 的三次方根;

(2) 在复数集内解方程 $x^{60} - 1 = 0$.

略解 (1) 由 $-\mathrm{i} = \mathrm{i}^3\cdot 1^3$ 知,所求三次方根为 i 与 $1,\omega,\omega^2$ 相乘而得到.

(2) 由解方程 $x^3 - 1 = 0, x^4 - 1 = 0, x^5 - 1 = 0$ 得到的根相乘即得所求的60个根.

注 由(1) 可知,求一个复数 a 的 n 次方根,只要求出方程 $x^n - a = 0$ 的一个根,再将这个根乘以 1 的所有 n 次单位根就得到了.

例 2 已知复数满足 $x^2+x+1=0$,试求 $x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$ 的值.

(1978 年重庆市竞赛题)

略解 由题设知 $x=\omega$ 或 $\omega^2\left(\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$,从而 $x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=\omega^2+\omega$(或 $\omega+\omega^2$) $=-1$.

例 3 方程 $z^6+z^3+1=0$ 有一个复数根,在复平面上这个根的辐角在 90° 和 180° 之间,求 θ 的度数.

(第 2 届美国邀请赛题)

解 由 $(z^3-1)(z^6+z^3+1)=z^9-1$ 知,满足方程 $z^6+z^3+1=0$ 的复数根为 1 的 9 次单位原根,而 1 的 9 次单位原根为 $z_1=\cos\frac{2\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{2}$, $z_2=\cos\frac{4\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{9}$, $z_4=\cos\frac{8\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{9}$, $z_5=\cos\frac{10\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{10\pi}{9}$, $z_7=\cos\frac{14\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{14\pi}{9}$, $z_8=\cos\frac{16\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{16\pi}{9}$.

符合在 90° 和 180° 之间的辐角只有 $\frac{8}{9}\pi=160°$,此即为所求的 θ 的度数.

2. 在解方程(或方程组)中的应用

例 4 解方程 $(x+m)^n-(x-m)^n=0$.

解 显然 $x=m\neq 0$ 不是原方程的根,设 $y=\frac{x+m}{x-m}$,则当 $m\neq 0$ 时,$y\neq 1$,且 $x=\frac{m(y+1)}{y-1}$,从而原方程化为 $y^n=1$,其异于 1 的单位根为

$$y_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n},k=1,2,\cdots,n-1.$$

$$因此\ x_k=\frac{m(y_k+1)}{y_k-1}=m\cdot\frac{\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}+\left(1+\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}{\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}-\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

$$=-m\cdot\cot\frac{k\pi}{n}\cdot\mathrm{i}\ (k=1,2,\cdots,n-1)$$

即为所求.

例 5 解联立方程组

$$\begin{cases}x+y+z=3, & ①\\ x^2+y^2+z^2=3, & ②\\ x^5+y^5+z^5=3. & ③\end{cases}$$

求出所有实根或复根. （第2届美国奥林匹克题）

解 设 x,y,z 是三次方程 $r^3-ar^2+br-c=0$ 的根，则 $a=x+y+z=3$，$b=xy+yz+zx$，$c=xyz$，由 $x+y+z=3$ 两边平方后整理可得 $b=3$，从而三次方程为 $r^3-3r^2+3r-c=0$.

令 $c=1+m^3$，则 $(r-1)^3=m^3$，于是 $r=1+m,1+\omega m,1+\omega^2 m\left(\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$. 又由③式有 $(1+m)^5+(1+\omega m)^5+(1+\omega^2 m)^5=3$，展开并注意到

$$1+\omega^k+\omega^{2k}=\begin{cases}0, & k\text{ 不为 3 的倍数},\\ 3, & k\text{ 为 3 的倍数},\end{cases}$$

可得到 $30m^3=0$ 或 $m=0$，因此所有的根是 $x=y=z=1$.

在此，我们顺便指出：借助 ω 可推导实系数一元三次方程 $x^3+px+q=0$ 型（对于 $y^3+ay^2+by+c=0$ 型，则由变换 $y=x-\frac{a}{3}$ 化为此型）的求根公式解法.

事实上，可由 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\cdot(x+y\omega^2+z\omega)\cdot(x+y\omega+z\omega^2)=0$ 知方程 $x^3-3yz\cdot x+(y^3+z^3)=0$ 有三根 $-y-z,-y\omega^2-z\omega,-y\omega-z\omega^2$，其中 y,z 作为二次方程 $A^2-qA-\frac{p^3}{27}=0$ 的根而求得.

3. 在讨论整除性问题中的应用

例6 试证 $x^{999}+x^{888}+\cdots+x^{111}+1$ 可被 $x^9+x^8+\cdots+x+1$ 整除.

（1964年广州市竞赛题）

略证 设 ε 是任一异于1的1的10次单位根. 由 $\varepsilon^{999}+\varepsilon^{888}+\cdots+\varepsilon^{111}+1=\varepsilon^9+\varepsilon^8+\cdots+\varepsilon+1=0$ 即证.

例7 试确定出所有的正整数对 (m,n)，使得 $(1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn})$ 能被 $(1+x+x^2+\cdots+x^m)$ 整除. （第6届美国奥林匹克题）

解 设 ε 是1的异于1的 $m+1$ 次单位根，则 $1+\varepsilon+\cdots+\varepsilon^m=0$，要使 $1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}+\cdots+\varepsilon^{mn}=0$，由性质5知，只要 n 不是 $m+1$ 的整数倍，即 $n,m+1$ 互质.

例8 证明：如果 n 是自然数，那么多项式 $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ 可被 x^2+x+1 除尽.

（第6届比利时奥林匹克题）

证明 令 $f(x)=(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$，考虑取1的3次单位根 ω 及对 $n=3k,3k+1,3k+2$ 分别有 $f(\omega)=0$，因而 $f(x)$ 有因式 x^2+x+1. 证毕.

4. 在多项式因式分解中的应用

例9 在整数范围内分解因式：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$.（1978年全国高中联赛题）

解 因 $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=(x^3)^4+(x^3)^3+(x^3)^2+x^3+1$，设 ε 是异于1的5次单位根，则有 $\varepsilon^{12}+\varepsilon^9+\cdots+\varepsilon^3+1=0$，故知原多项式含有因式 $f_1(x)=x^4+$

x^3+x^2+x+1,再利用多项式除法,便求得另一因式 $f_2(x)=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$.

我们可证明 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 在整数范围内不可分解.

事实上,$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是 $x^{15}-1$ 的因子,$x^{15}-1$ 除了1之外没有其他实根,而1不是 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的根,所以 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 没有实数根,于是它们不可能有奇数次因子.如果 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 有二次因子,一定形如 $x^2-2\cos\frac{2k\pi}{15}x+1(1\leqslant k\leqslant 7,k\neq 5)$,而这时 $\cos\frac{2k\pi}{15}\neq 0,\pm\frac{1}{2},\pm 1$,所以 $2\cos\frac{2k\pi}{15}$ 不是整数,因此 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 不可能有二次因子,于是就证明了 $f_1(x)$ 不可分解.如果 $f_2(x)$ 可分解,只能是 $f_2(x)=(x^4+ax^3+bx+ax+1)(x^4+cx^3+dx^2+cx+1)$,展开比较系数产生矛盾,所以 $f_2(x)$ 也不可分解.

例10 设 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 都是多项式,且满足:

$f_1(x^m)+xf_2(x^m)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^m)=(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)f_n(x)(m\geqslant n\geqslant 2,m\in\mathbf{N})$,证明 $(x-1)$ 是 $f_i(x)$ 的因式 $(i=1,2,\cdots,n)$.

(第5届美国奥林匹克题的推广)

证明 设 $\varepsilon_k(k=1,2,\cdots,m-1)$ 是1的 m 次单位根,则 $\varepsilon_k^{m-1}+\varepsilon_k^{m-2}+\cdots+\varepsilon_k+1=0(k=1,2,\cdots,m-1)$,并将每一个 ε_k 代入已知等式,注意到 $m\geqslant n$,可构造出关于 $f_i(1)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases}f_1(1)+\varepsilon_1 f_2(1)+\cdots+\varepsilon_1^{n-2}f_{n-1}(1)=0,\\ f_1(1)+\varepsilon_2 f_2(1)+\cdots+\varepsilon_2^{n-2}f_{n-1}(1)=0,\\ \cdots\\ f_1(1)+\varepsilon_{n-1}f_2(1)+\cdots+\varepsilon_{n-1}^{n-2}f_{n-1}(1)=0,\end{cases}$$

其系数行列式为 $n-1$ 阶 Vandermonele 行列式:

$$\begin{bmatrix}1&\varepsilon_1&\varepsilon_1^2&\cdots&\varepsilon_1^{n-2}\\1&\varepsilon_2&\varepsilon_2^2&\cdots&\varepsilon_2^{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&\varepsilon_{n-1}&\varepsilon_{n-1}^2&\cdots&\varepsilon_{n-1}^{n-2}\end{bmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\neq 0.$$

故方程组只有零解,$f_i(1)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$.又当 $x=1$ 时,有 $nf(1)=\sum_{i=1}^{n-1}f_i(1)=0$,故 $f_n(1)=0$,从而便证明 $f_i(x)$ 有因式 $x-1(i=1,2,\cdots,n)$.

注 当 $m=n=4$ 时,即为第5届美国奥赛题,此时也可运用1的异于1的5次

单位根得方程组直接推算而证明.

5. **在讨论多项式的其他求解问题中应用**

例 11 设 $p(x)$ 是 $3n$ 次多项式,使得 $P(0)=P(3)\cdots=P(3n)=2, P(1)=P(4)=\cdots=P(3n-2)=1, P(2)=P(5)=\cdots=P(3n-1)=0, P(3n+1)=730$. 试确定 n. (第 13 届美国奥林匹克题)

解 注意到 x 由 0 到 $3n$ 逐步增加 1 时,$P(x)-1$ 循环地取值 $1,0,-1$. 模仿这一特点,考虑 1 的 3 次单位根 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,注意 $n=0,1,2,\cdots$ 时,数列 $\{\omega^n\}=\{1,\omega,\omega^2,1,\omega,\omega^2,\cdots\}$ 用 $I_m(\omega^n)$ 表示 ω^n 中 i 的系数,那么

$$\{2I_m(\omega^n)/\sqrt{3}\}=\{0,1,-1,0,1,-1,\cdots\},$$

$$\{2I_m(\omega^{2n+1})/\sqrt{3}\}=\{1,0,-1,1,0,-1,\cdots\}.$$

因此,对于 $x=0,1,2,\cdots,3n$ 有

$$P(x)-1=2I_m(\omega^{2x+1})/\sqrt{3}. \qquad (*)$$

为了得到关于 x 的多项式,由二项式定理有

$$\omega^{2x}=[1+(\omega^2-1)]^x=\sum_{k=0}^{x}C_x^k(\omega^2-1)^k.$$

而(*)式右边是 $2I_m[\omega\sum_{k=0}^{x}C_x^k(\omega^2-1)^k]/\sqrt{3}$. C_x^k 可展开为 x 的 k 次多项式,且当 x 取小于 k 的非负整数时,$C_x^k=0$,由于我们需要的是 x 的 $3n$ 次多项式,并且 x 取值 $0,1,2,\cdots,3n$,于是考虑多项式: $Q(x)=2I_m[\omega\sum_{k=0}^{3n}C_x^k(\omega^2-1)^k]/\sqrt{3}$.

显然 $Q(x)$ 的次数是 $3n$,且与 x 取 $3n+1$ 个值 $0,1,2,\cdots,3n$ 时,它和(*)式相等,所以有恒等式 $P(x)-1\equiv Q(x)$.

于是 $P(3n+1)-1=Q(3n+1)$

$$\begin{aligned}
&=2I_m[\omega\sum_{k=0}^{3n}C_{3n+1}^k(\omega^2-1)^k]/\sqrt{3}\\
&=2I_m[\omega\sum_{k=0}^{3n+1}C_{3n+1}^k(\omega^2-1)-\omega C_{3n+1}^{3n+1}(\omega^2-1)^{3n+1}]/\sqrt{3}\\
&=2I_m[\omega(1+\omega^2-1)^{3n+1}-\omega(\omega^2-1)^{3n+1}]/\sqrt{3}\\
&=2I_m[\omega^{6n+3}-\omega(i\omega\cdot\sqrt{3})^{3n+1}]/\sqrt{3}\\
&=-2I_m[i\omega^2(i\sqrt{3})^{3n}]\\
&=\begin{cases}(-1)^k\cdot 3^{3k},当\ n=2k\ 时,\\(-1)^k\cdot 3^{3k+2},当\ n=2k+1\ 时.\end{cases}
\end{aligned}$$

又已知 $P(3n+1)-1=730-1=729$,即$(-1)^k\cdot 3^{3k}=3^6$,故 $k=2,n=4$.

6. 在解有关组合数的问题中的应用

例 12 求证:$C_n^1+C_n^5+\cdots+C_n^{4m-3}=\frac{1}{2}(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\frac{n\pi}{4})$,其中 $4m-3$ 为不大于 n 的这类形式的最大整数.

证明 设 $\varepsilon_1=\mathrm{i}$ 为 1 的一个 4 次单位根.由二项式定理,有展开式

$$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n, \quad ①$$

$$(1+\varepsilon_1)^n=C_n^0+C_n^1\varepsilon_1+C_n^2\varepsilon_1^2+\cdots+C_n^n\varepsilon_1^n, \quad ②$$

$$(1+\varepsilon_1^2)^2=C_n^0+C_n^1\varepsilon_1^2+C_n^2C_1^4+\cdots+C_n^n\varepsilon_1^{2n}, \quad ③$$

$$(1+\varepsilon_1^3)^2=C_n^0+C_n^1\varepsilon_1^3+C_n^2\varepsilon_1^6+\cdots+C_n^n\varepsilon_1^{3n}. \quad ④$$

并以 ε_1^3 乘 ② 式,ε_1^2 乘 ③ 式,ε_1 乘 ④ 式,然后与 ① 式一起将等式两边相加.

和式右边,由性质 5 得到 $4(C_n^1+C_n^5+\cdots+n_n^{4m-3})$.

和式左边,$2^n+(1+\varepsilon_1)^n\cdot\varepsilon_1^3+(1+\varepsilon_1^2)^n\cdot\varepsilon_1^2+(1+\varepsilon_1^3)^n\cdot\varepsilon_1=$

$$2^n+\mathrm{i}[(1-\mathrm{i})^n-(1+\mathrm{i})^n]=2^n+2^{\frac{n}{2}+1}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

比较和式两边,原等式即得证.

7. 在解答三角题中的应用

例 13 设 $\sin A+\sin B+\sin C=\cos A+\cos B+\cos C=0$.求证:$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=3\cos(A+B+C)$,$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=3\sin(A+B+C)$.

(1958 年武汉市竞赛题)

证明 由条件知 $C\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,且有

$$(\cos A+\mathrm{i}\sin A)+(\cos B+\mathrm{i}\sin B)+(\cos C+\mathrm{i}\sin C)=0,$$

即 $[\cos(A-C)+\mathrm{i}\sin(A-C)]+1=-[\cos(B-C)+\mathrm{i}\sin(B-C)]$,

将上式两边取共轭复数有

$$[\cos(A-C)-\mathrm{i}\sin(A-C)]+1=-[\cos(B-C)-\mathrm{i}\sin(B-C)].$$

再将上面两个等式两边分别相乘,有

$$[\cos(A-C)+\mathrm{i}\sin(A-C)]+[\cos(A-C)-\mathrm{i}\sin(A-C)]+1=0,$$

即知 $\cos(A-C)+\mathrm{i}\sin(A-C)=\omega$ 或 $\omega^2(\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})$.

同理 $\cos(B-C)+\mathrm{i}\sin(B-C)=\omega$ 或 ω^2.

显然 $\cos(A-C)+\mathrm{i}\sin(A-C)\neq\cos(B-C)+\mathrm{i}\sin(B-C)$,否则有 $\cos(A-C)+\mathrm{i}\sin(A-C)=-\frac{1}{2}$,这是不可能的.

因此,若取 $\cos(A-C)+i\sin(A-C)=\omega$,则 $\cos(B-C)+i\sin(B-C)=\omega^2$,

即 $\cos A+i\sin A=\omega(\cos C+i\sin C)$,

$\cos B+i\sin B=\omega^2(\cos C+i\sin C)$.

于是 $(\cos3A+i\sin3A)+(\cos3B+i\sin3B)+(\cos3C+i\sin3C)$

$=(\cos A+i\sin A)^3+(\cos B+i\sin B)^3+(\cos C+i\sin C)^3$

$=(\cos C+i\sin C)^3(\omega^3+\omega^6+1)=3(\cos3C+i\sin3C)$.

又 $(\cos A+i\sin A)(\cos B+i\sin B)(\cos C+i\sin C)=(\cos C+i\sin C)^3\cdot\omega^3$,

从而 $\cos3A+\cos3B+\cos3C=3\cos(A+B+C)$.

$\sin3A+\sin3B+\sin3C=3\sin(A+B+C)$.

注 上例的结论可改为:当 n 不为 3 的整数倍时,$\sin nA+\sin nB+\sin nC=\cos nA+\cos nB+\cos nC=0$.

类似于上例也可解答 1978 年上海市竞赛题:设 A、B、C 同时满足 $\sin A+\sin B+\sin C=0$,$\cos A+\cos B+\cos C=0$ 的任意三个角.求证:$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C$ 为定值.

例 14 求证:$\sqrt{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}(n\in\mathbf{N})$. (第 1 届中国国家队集训题)

证明 考虑 1 的 $2n$ 次单位根 $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2n}+i\sin\frac{2k\pi}{2n}(k=0,1,2,\cdots,2n-1)$.

由性质 3,$\varepsilon_k+\varepsilon_{2n-k}=2\cos\frac{2k\pi}{2n}$,

$\varepsilon_k\cdot\varepsilon_{2n-k}=1(k\neq0,k\neq n,k=1,\cdots,n-1,n+1,\cdots,2n-1)$.

从而 $x^{2n}-1=(x^2-1)(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+x^2+1)$

$$=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n}+1\right),$$

则
$$x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+x^2+1=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n}+1\right).\quad(*)$$

在$(*)$式中令 $x=1$,得 $n=\prod_{k=1}^{n-1}2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{2n}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}4\sin^2\frac{k\pi}{2n}=(2^{n-1})^2\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n}$.

故 $\sqrt{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$.

注 在$(*)$式中令 $x=-1$,则有 $\sqrt{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}$.

类似于例 14 可证明:$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$,$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$,等等.

例 15 求和:$\sum_{k=0}^{2n}\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$. (IMO - 5 试题的推广)

解 令 $z_k=\cos(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1})+\mathrm{i}\sin(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1})(k=0,1,2,\cdots,2n)$.

取 1 的 $2n+1$ 次单位根 $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}(k=0,1,2,\cdots,2n)$,

则 $W=z_0+z_1+z_2+\cdots+z_{2n}=z_n+z_0\varepsilon_1+z_0\varepsilon_2+\cdots+z_0\varepsilon_{2n}$

$=z_0(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{2n})=0$.

而 $\sum\limits_{k=0}^{2n}\cos(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1})$ 是复数 W 的实部,

故 $\sum\limits_{k=0}^{2n}\cos(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1})=0$.

特别地,当 $\alpha=0,n=3$ 时,有 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$,即为 IMO - 5 试题.

由上述证明过程也可知 $\sum\limits_{k=0}^{2n}\sin(\alpha+\frac{2k\pi}{2n+1})=0$.

例 16 求证:$\sin n\theta=2^{n-1}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\sin(\theta+\frac{k\pi}{n})$.

证明 由性质 7 及性质 3,有

$$x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\varepsilon_k)=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\varepsilon_k^{-1}). \qquad (*)$$

再由 Eular 公式 $e^{\theta i}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,知

$2\mathrm{i}\sin\theta=e^{\theta i}-e^{\theta i}$,于是,我们有

$$2^n\mathrm{i}^n\prod_{k=0}^{n-1}\sin(\theta+\frac{k\pi}{n})=\prod_{k=0}^{n-1}[2\mathrm{i}\sin(\theta+\frac{k\pi}{n})]$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}[e^{\theta+\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}}-e^{-(\theta+\frac{k\pi}{n})\mathrm{i}}]$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}e^{(\frac{k\pi}{n}-\theta)\mathrm{i}}(e^{2\theta\mathrm{i}}-\varepsilon_k^{-1})$$

$$=e^{(\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}k-n\theta)\mathrm{i}}\prod_{k=0}^{n-1}(e^{2\theta\mathrm{i}}-\varepsilon_k^{-1}).$$

但 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}k=\frac{1}{2}n(n-1)$,$e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=\mathrm{i}$,所以

$$e^{(\frac{\pi}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}k-n\theta)\mathrm{i}}=e^{\frac{1}{2}(n-1)\pi\mathrm{i}-n\theta\mathrm{i}}=\mathrm{i}^{n-1}e^{-n\theta\mathrm{i}}.$$

又由($*$)式有 $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(e^{2\theta\mathrm{i}}-\varepsilon_k^{-1})=e^{2n\theta\mathrm{i}}-1=2\mathrm{i}e^{n\theta\mathrm{i}}\sin n\theta$,

因此 $2^n\mathrm{i}^n\prod\limits_{k=0}^{n-1}\sin(\theta+\frac{k\pi}{n})=2\mathrm{i}^n\sin n\theta$,由此即证.

8. 在解答平面几何题中的应用

例 17 设 M 是锐角 $\triangle ABC$ 内一点，并使 $\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=120°$，又 P 为 $\triangle ABC$ 内任意点，试证：$PA+PB+PC\geqslant MA+MB+MC$.

（1978 年陕西省竞赛附加题）

证明 如图 26－1，建立复平面，设 A,B,C 三点对应的复数分别为 a,b,c，P 点对应的复数为 z. 注意到 1 的 3 次单位根的性质，于是 $|a-z|+|b-z|+|c-z|$

$$=|a-z|+|(b-z)\omega|+|(c-z)\omega^2|$$

$$\geqslant|(a+b\omega+c\omega^2)-z(1+\omega+\omega^2)|$$

$$=|a+b\omega+c\omega^2|. \qquad (*)$$

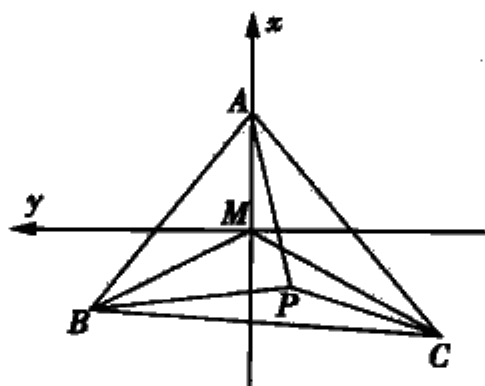


图 26－1

由于不等式（*）右端为定值，由（*）的证明过程知，不等式（*）中等号成立的条件就是三复数 $a-z,(b-z)\omega,(c-z)\omega^2$ 所对应的向量方向相同，而由复数乘法的几何意义知，此时 $a-z,b-z,c-z$ 所对应的向量 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$ 两两夹角为 120°，即 P 重合于 M 点，故 $PA+PB+PC\geqslant MA+MB+MC$.

例 18 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是半径为 r，中心为 O 之圆的一内接正多边形，P 是 OA_i 延长线上的一点. 试证：

（Ⅰ）$\prod\limits_{i=1}^{n}|PA_i|=|OP|^n-r^n$；

（Ⅱ）$\sum\limits_{i=1}^{n}|PA_i|^2=n(r^2+OP^2)$.

（第 15 届普特南竞赛题）

证明 不妨假定这正多边形在复平面上，圆心在原点，而 A_1 在正实轴上，则其他顶点是 $r\varepsilon,r\varepsilon^2,\cdots,r\varepsilon^{n-1}$，这里 ε 是 1 的某个异于 1 的 n 次单位原根. 又设 P 点对应的复数为 x，则 $|PA_i|=|x-r\varepsilon^{i-1}|$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

（Ⅰ）由性质 7，有 $\prod\limits_{i=1}^{n}(X-\varepsilon^{i-1})=X^n-1$，

故 $$\prod_{i=1}^{n}|PA_i|=|\prod_{i=1}^{n}(x-r\varepsilon^{i-1})|=r^n|\prod_{i=1}^{n}(\frac{x}{r}-\varepsilon^{i-1})|$$

$$=r_n|(\frac{x}{r})^n-1|=|x^n-r^n|=x^n-r^n=|OP|^n-r^n.$$

（Ⅱ）由 $|PA_i|^2=|x-r\varepsilon^{i-1}|^2=(x-r\varepsilon^{i-1})(\bar{x}-r\overline{\varepsilon^{i-1}})$

$$=x\bar{x}+r^2\varepsilon^{i-1}\cdot\overline{\varepsilon^{i-1}}-\bar{x}r\varepsilon^{i-1}-xr\overline{\varepsilon^{i-1}}$$

$$=OP^2+r^2-\bar{x}r\varepsilon^{i-1}=x\cdot r\overline{\varepsilon^{i-1}},$$

故$\sum\limits_{i=1}^{n}|PA_i|^2=n(OP^2+r^2)-\bar{x}r(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1})-xr(1+\bar{\varepsilon}+\overline{\varepsilon^2}+\cdots+\overline{\varepsilon^{n-1}})$

$$=n(OP^2+r^2).$$

注 对于(Ⅰ)中的 P 若是任意的点,则有$\prod\limits_{i=1}^{n}|PA_i|=\big||OP|^n-r^n\big|$.类似于(Ⅱ)可证$\sum\limits_{i=1}^{n}|PA_i|^4$为常数,若 P 为正多边形外接圆上一点,类似地也可证明$\sum|PA_i|^4$为常数$6nr^4$.

9. 分圆多项式及应用

设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{\varphi(n)}$是1的$\varphi(n)$个$n$次单位原根,多项式$F_n(x)=\prod\limits_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\eta_i)$叫做分圆多项式.一个等价的定义是

$$\begin{cases}F_1(x)=x-1,\\ F_n(x)=\dfrac{x^n-1}{\prod\limits_{\substack{d\mid n\\ d<n}}F_d(x)},\text{即 } x^n-1=\prod\limits_{d\mid n}F_d(x).\end{cases}$$

$F_n(x)$是有理数域上不可分解的$\varphi(n)$次多项式.例如

$$F_2(x)=\frac{x^2-1}{F_1(x)}=x+1,$$

$$F_3(x)=\frac{x^3-1}{F_1(x)}=x^2+x+1,$$

$$F_4(x)=\frac{x^4-1}{F_1(x)\cdot F_2(x)}=x^2+1,$$

$$F_5(x)=\frac{x^5-1}{F_1(x)}=x^4+x^3+x^2+x+1,$$

$$F_6(x)=\frac{x^6-1}{F_1(x)\cdot F_2(x)\cdot F_3(x)}=x^2-x+1,$$

…

$$F_{15}(x)=\frac{x^{15}-1}{F_1(x)\cdot F_3(x)\cdot F_5(x)}=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1.$$

…

根据分圆多项式的这个重要特征,我们可简捷地讨论某些多项式的因式分解问题,例如前面的例9,由

$$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$$

$=(x^4+x^3+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)=F_5(x)\cdot F_{15}(x)$，即解得.

例 19　在有理数域上分解因式 $x^{30}+1$.

解　由 $x^{30}+1=(x^2)^{15}+1=-[(-x^2)^{15}-1]$.

注意到 $x^{15}-1=F_1(x)\cdot F_3(x)\cdot F_5(x)\cdot F_{15}(x)$，

则　$-[(-x^2)^{15}-1]=-F_1(-x^2)\cdot F_3(-x^2)\cdot F_5(-x^2)\cdot F_{15}(-x^2)$，

其中 $-F_1(-x^2)=-(-x^2-1)=x^2+1$，

$F_3(-x^2)=x^4-x^2+1$，

$F_5(-x^2)=x^8-x^6+x^4-x^2+1$，

$F_{15}(-x^2)=x^{16}+x^{14}-x^{10}-x^8-x^6+x^2+1$.

故 $x^{30}+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)\cdot(x^{16}+x^{14}-x^{10}-x^8-x^6+x^2+1)$.

【解题思维策略分析】

1. 灵活变更问题，运用单位根的性质

例 20　(1) 设 n 是一个大于 3 的素数，求 $(1+2\cos\frac{2\pi}{n})(1+2\cos\frac{4\pi}{n})\cdots(1+2\cos\frac{2m\pi}{n})$ 的值.

(2) 设 n 是大于 3 的自然数，求

$(1+2\cos\frac{\pi}{n})(1+2\cos\frac{2\pi}{n})(1+2\cos\frac{3\pi}{n})\cdots(1+2\cos\frac{(n-1)\pi}{n})$ 的值.

（1994 年上海市竞赛题）

解　(1) 记 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$，则 $\omega^n=1,\omega^{-\frac{n}{2}}=e^{\pi i}=-1,2\cos\frac{2k\pi}{n}=\omega^k+\omega^{-k}$，

$$\prod_{k=1}^{n}(1+2\cos\frac{2k\pi}{n})=\prod_{k=1}^{n}(1+\omega^k+\omega^{-k})=\prod_{k=1}^{n}\omega^{-k}(\omega^k+\omega^{2k}+1)$$

$$=\omega^{-\frac{n(n+1)}{2}}\cdot 3\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-\omega^{3k}}{1-\omega^k}=(-1)^{n+1}\cdot 3\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-\omega^{3k}}{1-\omega^k}.$$

由于 n 为大于 3 的素数，

所以 $(-1)^{n+1}=1$，且 $3,3\times 2,\cdots,3(n-1)$，$\bmod n$，取遍所有 n 的剩余类，从而

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^{3k})=\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k).$$

于是 $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+2\cos\frac{2k\pi}{n})=3$.

(2) $z^{2n}-1=0$ 的 $2n$ 个根是 ± 1 和 $z_k=e^{\pm\frac{k\pi i}{n}}(k=1,2,\cdots,n-1)$，

则 $z^{2n}-1=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{\frac{k\pi i}{n}})(z-e^{-\frac{k\pi i}{n}})$

$=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z^2+1-2z\cos\frac{k\pi}{n})$.

取 $z=e^{\frac{2\pi}{3}i}$,则 $z^2+1=-z$,于是

$$z^{2n}-1=(z^2-1)(-z)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(1+2\cos\frac{k\pi}{n}).$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1+2\cos\frac{k\pi}{n})=\frac{z^{2n}-1}{(z^2-1)(-z)^{n-1}}=$$

$$\begin{cases}0,\text{若 } n=3k;\\ \dfrac{z^2-1}{(z^2-1)(-z)^{3k}}=(-y)^{3k}=(-1)^{n-1},\text{若 } n=3k+1;\\ \dfrac{z-1}{(z^2-1)(-z)^{3k+1}}=\dfrac{(-1)^{3k+1}}{(z+1)z}=\dfrac{(-1)^{3k+1}}{-1}=(-1)^n,\text{若 } n=3k+2(k\in\mathbf{N}).\end{cases}$$

2. 注意单位根性质的综合应用

例 21 已知 $f(z)=C_0z^n+C_1z^{n-1}+C_2z^{n-2}+\cdots+C_{n-1}z+C_n$ 是一个 n 次复系数多项式.求证:一定存在一个复数 z_0,$|z_0|\leqslant 1$,并且满足 $|f(z_0)|\geqslant|C_0|+|C_n|$.

(CMO－9 试题)

证明 令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$.取 η 是一个模长为 1 的复数,如果 $n\geqslant 2$,对于自然数 $k=1,2,\cdots,n-1$,有

$$f(\omega^k\eta)=C_0(\omega^k\eta)^n+C_1(\omega^k\eta)^{n-1}+C_2(\omega^k\eta)^{n-2}+\cdots+C_{n-1}(\omega^k\eta)+C_n, \quad ①$$

$$\sum_{k=1}^{n}f(\omega^k\eta)=C_0\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)^n+C_1\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)^{n-1}+C_2\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)^{n-2}+\cdots+C_{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)+nC_n. \quad ②$$

显然,有 $\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)^n=n\eta^n$. ③

对于 $j=1,2,\cdots,n-1$,有

$$\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)^j=\eta^j\sum_{k=1}^{n}\omega^{kj}=\eta^j\frac{\omega^j-\omega^{(n+1)j}}{1-\omega^j}=0. \quad ④$$

③、④ 代入 ②,有 $\sum_{k=1}^{n}f(\omega^k\eta)=n(C_0\eta^n+C_n)$. ⑤

当 $n=1$ 时,⑤ 式也成立.因此 ⑤ 对 $\forall n\in\mathbf{N}$ 成立.由 ⑤,即有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(\omega^k\eta)|\geqslant\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}f(\omega^k\eta)\right|=|C_n\eta^{\pi}+C_{\pi}|. \quad ⑥$$

记 $C_0=P_0(\cos\theta_0+\mathrm{i}\sin\theta_0)$，这里 $0\leqslant\theta_0<2\pi$，$|C_0|=P_0$；$C_{\pi}=P_{\pi}(\cos\theta_{\pi}+\mathrm{i}\sin\theta_{\pi})$，这里 $0\leqslant\theta_{\pi}<2\pi$，$|C_{\pi}|=P_{\pi}$. 选择 θ，$0\leqslant\theta<2\pi$，使 $\theta_0+n\theta\equiv\theta_n$，mod$2\pi$，令 $\eta=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，有

$$\begin{aligned}C_0\eta_n+C_n&=\rho_0(\cos\theta_0+\mathrm{i}\sin\theta_0)(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)+\rho_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)\\&=\rho_0[\cos(\theta_0+n\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta_0+n\theta)]+\rho_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)\\&=(\rho_0+\rho_{\pi})(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n). \quad ⑦\end{aligned}$$

从而，可得 $|C_0\eta^n+C_n|=\rho_0+\rho_n=|C_0|+|C_n|$. ⑧

⑧ 代入 ⑥，有 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(\omega^k\eta)|\geqslant|C_0|+|C_n|$.

由于 n 个实数 $|f(\omega\eta)|$，$|f(\omega^2\eta)|$，$\cdots$，$|f(\omega^n\eta)|$ 的算术平均值大于等于 $|C_0|+|C_n|$，则至少有一个 $|f(\omega^j\eta)|\geqslant|C_0|+|C_n|$，这里 j 是 $1,2,\cdots,n$ 中某一个自然数. 令 $z_0=\omega^j\eta$，$|z_0|=1$，满足 $|f(z_0)|\geqslant|C_0|+|C_n|$.

【模拟实战】

习题 A

1. 分解因式：a^5+a^4+1. （1978 年河南省七市竞赛题）
2. 证明：对任意 $n\in\mathbf{Z}^+$，多项式 $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ 被多项式 x^2+x+1 整除.
（1973 年纽约竞赛题）
3. 分解因式：$a+(a+b)x+(a+2b)x^2+(a+3b)x^3+3bx^4+2bx^5+bx^6$.
4. 计算：$\dfrac{1}{2\cos\frac{2\pi}{7}}+\dfrac{1}{2\cos\frac{4\pi}{7}}+\dfrac{1}{2\cos\frac{6\pi}{7}}$.
5. 选取一列整数 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，使得对每个 $n\geqslant3$，都有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，若该数列的前 1492 项之和为 1985，前 1985 项之和等于 1492，求该数列的通项.
6. 设 $(1+x+x^2)^{100}$ 的展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{200}x^{200}$.
求 $a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{198}$ 的值.

习题 B

1. 设 $\omega=\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$，$f(x)=(x-\omega)(x-\omega^3)(x-\omega^7)(x-\omega^9)$，求证：$f(x)$ 为

一整系数多项式,且 $f(x)$ 不能分解成两个至少为一次的整系数多项式之积.

(《中等数学》2001 年 1 期奥林匹克训练题)

2. 设 $P(x),Q(x),R(x)$ 和 $S(x)$ 使多项式 $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$ 成立,试证:$x-1$ 是 $P(x)$ 的一个因子.(第 5 届美国奥林匹克题)

3. 设 n 是正偶数,证明存在一个正整数 k,满足 $k=f(x)\cdot(x+1)^n+g(x)\cdot(x^n+1)$,其中 $f(x),g(x)$ 是某个整系数多项式.如果用 k_0 表示满足上式的最小的 k,试将 k_0 表示为 n 的系数.

(IMO - 37 预选题)

第二十七章　多项式的拉格朗日公式及应用

【基础知识】

拉格朗日公式　任何一个次数不超过 $n-1$ 次的复系数一元多项式 $f(x)$，都可以惟一地表示为

$$
\begin{aligned}
f(x) = & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}\cdot f(x_1) \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}\cdot f(x_2) \\
& + \cdots \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}\cdot f(x_n),
\end{aligned}
$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为互异复数.

拉格朗日公式给出了用任意 n 个互异复数（实数）及其对应的多项式值来表示某一个 $n-1$ 次多项式的形式，因此，对于任一个 $n-1$ 次多项式，可寻求 n 个互异复数及其对应的多项式值来惟一地表示.特别地，若已知一个多项式命题或其他问题满足（或隐含）这些条件，或经过挖掘能满足这些条件时，我们应考虑引入拉格朗日公式来处理问题.

【典型例题与基本方法】

例 1　一个二次函数 $y=f(x)$，当 $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ 时，它的值与 $\sin x$ 的对应值相同，求此二次函数.　　（1979 年辽宁省竞赛题）

解　由 $f(0)=0, f(\frac{\pi}{2})=1, f(\pi)=0$ 及拉格朗日公式有

$$
f(x)=\frac{(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(0-\frac{\pi}{2})(0-\pi)}f(0)+\frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)}f(\frac{\pi}{2})+\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})}{(\pi-0)(x-\frac{\pi}{2})}f(\pi)
$$

$= -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x$,即为所求.

注 类似此例可求解:(1979年江苏省竞赛题)设$f(x) = x^n + ax^2 + bx + c$,$n$是自然数,已知$f(-1) = 0$,$f(1) = -6$,$f(2) = -9$,$f(3) = -4$,$f(6) = 119$.求$f(x)$.

例2 设a,b,c为非等腰$\triangle ABC$的三边,$S_\triangle$为其面积.求证:

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} > 2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot S_\triangle^{\frac{1}{2}}.$$

证明 考虑二次多项式$f(x) = x^3 - (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$,取不同的值$x_1 = a$,$x_2 = b$,$x_3 = c$,则$f(a) = a^3$,$f(b) = b^3$,$f(c) = c^3$.

由拉格朗日公式,有

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} \cdot a^3 + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} \cdot b^3 + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \cdot c^3$$
$$= x^3 - (x-a)(x-b)(x-c).$$

比较上式中两边x^2的系数,有

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c.$$

又由海伦公式,$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$,

有$S_\triangle \leqslant \sqrt{p \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$,即$p \geqslant (3\sqrt{3}S_\triangle)^{\frac{1}{2}}$,显然等号不能成立,即

$a + b + c = 2p > 2(3\sqrt{3}S_\triangle)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot S_\triangle^{\frac{1}{2}}$.

故$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} > 2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot S_\triangle^{\frac{1}{2}}$.

例3 已知函数$f(x) = ax^2 - c$,满足:$-4 \leqslant f(1) \leqslant -1$,$-1 \leqslant f(2) \leqslant 5$,那么,$f(3)$应满足( ).

(A) $-7 \leqslant f(3) \leqslant 26$ (B) $-4 \leqslant f(3) \leqslant 15$

(C) $-1 \leqslant f(3) \leqslant 20$ (D) $-\frac{28}{3} \leqslant f(3) \leqslant \frac{35}{3}$ (1983年全国高中联赛题)

解 注意到$f(x)$是偶函数,有$f(-1) = f(1)$,取x_1, x_2, x_3依次为$-1,1,2$,则由拉格朗日公式,有

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} \cdot f(-1) + \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} \cdot f(1) + \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} \cdot f(2)$$
$$= -\frac{1}{3}(x^2-4) \cdot f(-1) + \frac{1}{3}(x^2-1) \cdot f(2),$$

所以 $f(3) = -\frac{5}{3}f(1) + \frac{8}{3}f(2)$.

由题设条件$\frac{5}{3} \leqslant -\frac{5}{3}f(1) \leqslant \frac{20}{3}$，$-\frac{8}{3} \leqslant \frac{8}{3}f(2) \leqslant \frac{40}{3}$，故有$-1 \leqslant f(3) \leqslant 2$，且当$f(1) = -1, f(2) = -1$时，可求出$a = 0, c = 1$，使得$f(3) = -1$。当$f(1) = -4, f(2) = 5$时，可求出$a = 3, c = 7$，使得$f(3) = 20$，故应选C.

注 利用拉格朗日公式，可以求出任何一个有穷数列：$a_1, a_2, \cdots, a_m$的一个通项公式：

$$a_n = f(n) = b_1 \cdot n^{m-1} + b_2 \cdot n^{m-2} + \cdots + b_m.$$

此式表明：数列$a_1, a_2, \cdots, a_m$的通项就是多项式函数$g(x)$当$x = n$时的值，其中$b_1, b_2, \cdots, b_m$是待定的常数.

例如，设$a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 11$，求这个数的一个通项公式.

可设$a_n = f(n) = b_1 n^2 + b_2 n + b_3$.

此时，$x = n, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$，且$f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 11$.

由拉格朗日公式，得

$$\frac{(n-2)(n-3)}{(1-2)(1-3)} \cdot f(1) + \frac{(n-1)(n-3)}{(2-1)(2-3)} \cdot f(2) + \frac{(n-1)(n-2)}{(3-1)\cdot(3-2)} \cdot f(3) = f(n),$$

化简得$n^2 + n - 1 = f(n)$.

故所求数列通项为$a_n = n^2 + n - 1 (n = 1,2,3)$.

利用拉格朗日公式，还可以求解多项式相除的余式.

由多项式的带余除法定理知，对于多项式$f(x)$和$g(x)(g(x) \neq 0)$，必存在多项式$q(x)$和$r(x)(\deg r(x) < \deg g(x)$或$r(x) = 0)$，使得$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$.

设$\deg f(x) \geqslant n$，$\deg g(x) = n$，且$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$，由拉格朗日公式，有$r(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot R_i(x)$，$R_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}$，且$r(x_i) = f(x_i)$，于是由因式定理，有$(x - x_i) \mid [f(x) - r(x)]$，从而$g(x) \mid [f(x) - r(x)]$.

由于$\deg g(x) = n$，则$\deg r(x) \leqslant n - 1 < n$，所以$r(x)$就是$f(x)$除以$g(x)$的余式.

例4 求$f(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$除以$g(x) = x^3 - x$的余式.

解 由$g(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$，知$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$.

此时，$f(0) = 0, f(1) = 5, f(-1) = -5$.

$$r(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)} \cdot f(0) + \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)} \cdot f(x) + \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} \cdot f(-1)$$

$$= \frac{5x(x+1)}{1 \cdot 2} + \frac{-5x(x-1)}{(-1)(-2)} = 5x.$$

故$f(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$除以$g(x) = x^3 - x$的余式为$r(x) = 5x$.

【解题思维策略分析】

1. 可以用于求解多项式的值

例 5 设 n 次多项式 $P(x)$ 满足 $P(k)=\frac{1}{C_n^k}$，其中 $k=0,1,2,\cdots,n$，求 $P(n+1)$.

（IMO－22 预选题）

解 由拉格朗日公式，得到

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{n+1}^{k}}\prod_{\substack{i\neq k\\ 1\leqslant i\leqslant n}}\frac{x-i}{k-i}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\prod\limits_{i\neq k}(x-i)}{C_{n+1}^{k}(-1)^{n-k}(n-k)!k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n+1-k)}{(n+1)!}\prod_{\substack{i\neq k\\ 1\leqslant i\leqslant n}}(x-i),$$

$$\therefore\quad P(n+1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot\frac{(n+1-k)}{(n+1)!}\prod_{\substack{i\neq k\\ 1\leqslant i\leqslant n}}(n+1-i)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(n+1-i)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}.$$

因此，当 n 为奇数时，$P(n+1)=0$，当 n 为偶数时，$P(n+1)=1$.

2. 可以用于讨论多项式值的范围

例 6 设多项式 $P(x)$ 的次数最多是 $2n$，且对每个整数 $k\in[-n,n]$，都有 $|P(k)|\leqslant 1$. 证明：对每个 $x\in[-n,n]$，$P(x)\leqslant 2^{2n}$.　（IMO－21 预选题）

证明 由拉格朗日公式，有 $P(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}P(k)\cdot\prod\limits_{\substack{i\neq k\\ -n\leqslant i\leqslant n}}\frac{x-i}{k-i}$.

因为当 $k=-n,-n+1,\cdots,n$ 时，$|P(k)|\leqslant 1$，所以

$$|P(x)|\leqslant\sum_{k=-n}^{n}|P(k)|\prod_{\substack{i\neq k\\ -n\leqslant i\leqslant n}}\frac{|x-i|}{|k-i|}\leqslant\sum_{k=-n}^{n}\prod_{\substack{i\neq k\\ -n\leqslant i\leqslant n}}\frac{|x-i|}{|k-i|}.$$

对每个实数 $x\in[-n,n]$，可证 $\sum\limits_{\substack{i\neq k\\ -n\leqslant i\leqslant n}}|x-i|\leqslant(2n)!$.

事实上，当 $x\geqslant k$ 时，有

$$\prod_{\substack{i\neq k\\ -n\leqslant i\leqslant n}}|x-i|=[|x-(k+1)|\cdots|x-n|][|x-(k-1)|\cdots|x+n|]$$

$$\leqslant(n-k)![(n-k+1)\cdots(2n)]=(2n)!.$$

同理可证 $x<k$ 的情形. 于是

$$\prod_{\substack{i\neq k\\ -n\leqslant i\leqslant n}}\frac{|x-i|}{|k-i|}\leqslant(2n)!\prod_{\substack{i\neq k\\ -n\leqslant i\leqslant n}}\frac{1}{|k-i|}\leqslant(2n)!\frac{1}{(k+n)!(n-k)!},$$

故 $|P(x)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} \frac{(2n)!}{(k+n)!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k}$,

即 $P(x) \leqslant \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} = 2^{2n}$.

3. 可以用于讨论多项式的某点值的范围或其范围的存在性

例 7 设给定整数 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. 证明:多项式 $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 在点 x_0, $x_1, \cdots, x_n$ 取的值当中,存在这样的一个值,其绝对值不小于 $\frac{n!}{2^n}$. (IMO – 19 预选题)

证明 由拉格朗日公式,有

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\prod_{\substack{i \neq k \\ -n \leqslant i \leqslant n}} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \Big) \cdot P(x_j) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n. \qquad (*)$$

假设题中结论不成立,即当 $j = 1, 2, \cdots, n$ 时, $|P(x_j)| < \frac{n!}{2^n}$, 则多项式 $P(x)$ 的首项系数 1 应等于乘积 $\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$ 的首项系数之和,且其模不超过

$$\Big| \sum_{j=0}^{n} P(x_j) \prod_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \frac{1}{x_j - x_i} \Big|$$

$$< \frac{n!}{2^n} \prod_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \frac{1}{|x_j - x_i|} \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{2^n} \cdot \frac{1}{\prod_{i<j} (j-i)} \cdot \frac{1}{\prod_{i>j} (i-j)}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} C_n^i = 1,$$

矛盾. 因此,原结论成立.

注 显然,上例的一种特殊情况是"对于实系数一元 n 次多项式 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, 有结论: $|f(1)|, |f(2)|, \cdots, |f(n+1)|$ 中,至少有一个不小于 $\frac{n!}{2n}$".

特别地,在上述结论中,令 $n = 2$, 便得到 1980 年美国的一道竞赛题:已知 $f(x) = x^2 + px + q$. 求证: $|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$. (参见习题 A 中第 2 题)

4. 可以用于求解多项式的次数

例 8 设 $P(x)$ 为 $2n$ 次多项式, $P(0) = P(2) = \cdots = P(2n) = 0$, $P(1) = P(3) = \cdots = P(2n-1) = 2$, $P(2n+1) = -30$, 求 n.

解 令 $f(x) = P(x) - 1$, 则 $f(k) = (-1)^{k+1}$, $k = 0, 1, \cdots, 2n$, $f(2n+1) = -31$.

考虑拉格朗日公式,并注意到其中第 k 项

$$f_k(x)=\prod_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant 2n}}\frac{x-i}{k-i}\cdot f(k),$$

$$\therefore\quad f_k(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{(2n+1-k)}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{k!(2n-k)!(-1)^{2n-k}}=-C_{2n+1}^{k}.$$

而 $f(2n+1)=\sum\limits_{k=1}^{2n+1}f_k(2n+1)=-\sum\limits_{k=1}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}=1-2^{2n+1}=-31$,

解得 $n=2$,此即为所求.

注 类似于上例,可求解美国第十三届奥林匹克试题:设 $P(x)$ 为 $3n$ 次多项式,适合 $P(0)=P(3)=\cdots=P(3n)=2,P(1)=P(4)=\cdots=P(3n-2)=1,P(2)=P(5)=\cdots=P(3n-1)=0$,并且 $P(3n+1)=730$,求 n.

注意到 $f(x)=P(x)-1$,则 $f(k)=\frac{2}{\sqrt{3}}I_m(\omega^{2k+1})$,其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,$I_m(\omega^{2k+1})$ 表 ω^{2k+1} 中 i 的系数,则可求得 $n=4$.

5. 可以用于求解满足某些条件的多项式

例 9 求所有的三次实系数多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$,使得下面的四个条件能够满足:(1) 这两个多项式在点 $x=1,2,3,4$ 只取值 0 或 1;(2) 如果 $P(1)=0$ 或 $P(2)=1$,则 $Q(1)=Q(3)=1$;(3) 如果 $P(2)=0$ 或 $P(4)=0$,则 $Q(2)=Q(4)=0$;(4) 如果 $P(3)=1$ 或 $P(4)=1$,则 $Q(1)=0$. (1980 年民主德国竞赛题)

解 设多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 满足题中条件.记 $\alpha_k=P(x)$,$\beta_k=Q(k)$,其中 $k=1,2,3,4$.因为多项式 $P(x)$、$Q(x)$ 是 3 次的,所以"四元数组"$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 与 $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ 不能是 0000,0110,1001 或 1111. 另一方面,"四元数组"$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 也不能是 $0\alpha_21\alpha_4$,$0\alpha_2\alpha_31$,$\alpha_111\alpha_4$ 或 $\alpha_11\alpha_31$,否则,由条件(2) 与(4) 得到,$\beta_1=1$ 且 $\beta_1=0$,矛盾.因此,由条件(3),由两种"四元数组"作成的对子($\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$)是且只能是下列七种之一:(0100,1010),(1000,0010),(1000,1000),(1000,1010),(1010,0010),(1011,0010) 和 (1100,1010),注意,其中只用到了六个不同的"四元数组",即 0010,0100,1000,1010,1011 和 1100.由拉格朗日公式,每个"四元数组"$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_3$ 可以作出一个多项式 $R(x)$,使得 $R(k)=\gamma_k$,$k=1,2,3,4$,于是得到六个相应的多项式:

$$R_1(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{2}x^2-7x+4,R_2(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{19}{2}x-6,$$

$$R_3(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{3}x+4,R_4(x)=-\frac{2}{3}x^3+5x^2-\frac{34}{3}x+8,$$

$$R_5(x)=-\frac{1}{2}x^3+4x^2-\frac{19}{2}x+7,R_6(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{31}{6}x-2.$$

因此，多项式对$(P(x),Q(x))$是下列各对之一：$(R_2(x),R_4(x))$，$(R_3(x),R_1(x))$，$(R_3(x),R_3(x))$，$(R_3(x),R_4(x))$，$(R_4(x),R_1(x))$，$(R_5(x),R_1(x))$，$(R_6(x),R_4(x))$.

6. 可以用于求解方程(组)

例 10 设实数x、y、z、w满足

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2^2-1^2}+\dfrac{y^2}{2^2-3^2}+\dfrac{z^2}{2^2-5^2}+\dfrac{w^2}{2^2-7^2}=1,\\ \dfrac{x^2}{4^2-1^2}+\dfrac{y^2}{4^2-3^2}+\dfrac{z^2}{4^2-5^2}+\dfrac{w^2}{4^2-7^2}=1,\\ \dfrac{x^2}{6^2-1^2}+\dfrac{y^2}{6^2-3^2}+\dfrac{z^2}{6^2-5^2}+\dfrac{w^2}{6^2-7^2}=1,\\ \dfrac{x^3}{8^2-1^2}+\dfrac{y^2}{8^2-3^2}+\dfrac{z^2}{8^2-5^2}+\dfrac{w^2}{8^2-7^2}=1.\end{cases}$$

试求$x^2+y^2+z^2+w^2$的值. （第2届美国邀请赛题）

解 令$1^2=a_1,3^2=a_2,5^2=a_3,7^2=a_4,2^2=\lambda_1,4^2=\lambda_2,6^2=\lambda_3,8^2=\lambda_4$.构造$f(x)=\prod\limits_{i=1}^{4}(x-a_i)-\prod\limits_{i=1}^{4}(x-\lambda_i)=[\sum\limits_{i=1}^{4}(\lambda_i-a_i)]x^3+\cdots$ ①

则 $f(\lambda_k)=\prod\limits_{i=1}^{4}(\lambda_i-a_i)$.

又由拉格朗日公式,得$f(x)=\sum\limits_{j=1}^{4}\prod\limits_{\substack{i\neq j\\1\leq i\leq 4}}\dfrac{x-a_i}{a_j-a_i}\cdot f(a_j)$.

在上式中令$x=\lambda_k$,两边同除以$f(\lambda_k)$得

$$\frac{A_1}{\lambda_k-a_1}+\frac{A_2}{\lambda_k-a_2}+\frac{A_3}{\lambda_k-a_3}+\frac{A_4}{\lambda_k-a_4}=1, \quad ②$$

其中$A_j=\dfrac{f(a_j)}{\prod\limits_{\substack{i\neq j\\1\leq i\leq 4}}(a_j-a_i)}$,且$j,k=1,2,3,4$.

而方程组②有惟一解,比较①、②中x^3项的系数得$\sum\limits_{j=1}^{4}A_j=\sum\limits_{i=1}^{4}(\lambda_i-a_i)$,而$x^2,y^2,z^2,w^2$是已知方程组的解,则

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2+w^2&=\sum_{j=1}^{4}A_j=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i-\sum_{i=1}^{4}a_i\\&=(2^2+4^2+6^2+8^2)-(1^2+3^2+5^2+7^2)=36.\end{aligned}$$

注 在上例的解答中,我们根据题意巧妙地构造了一个多项式,再根据拉格朗日

公式,进行变形得到与题设形式相同的方程组,从而获解.运用这种思想方法还可以解答几何不等式问题.

7. 可以用于证明几何不等式问题

例 11 设 a,b,c 表示 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 的长,P、Q 为 $\triangle ABC$ 所在平面上任意两点.求证:$a\cdot PA\cdot QA+b\cdot PB\cdot QB+c\cdot PC\cdot QC\geqslant abc$.

(1986 年中国国家集训队集训题)

证明 设 A、B、C 三点在复平面上对应的复数为 x_1,x_2,x_3,P、Q 对应的复数为 t_1,t_2,构造 $f(x)=(x-t_1)(x-t_2)$,由拉格朗日公式,有

$$f(x)=\sum_{j=1}^{3}\prod_{\substack{i\neq k\\1\leqslant i\leqslant 3}}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}\cdot f(x_j)\equiv(x-t_1)(x-t_2),$$

比较上式两边 x^2 的系数,得

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=1.$$

于是 $\sum\limits_{j=1}^{3}\prod\limits_{\substack{i\neq j\\1\leqslant i\leqslant 3}}\dfrac{|f(x_j)|}{|x_j-x_i|}\geqslant 1$.

而 $|f(x_1)|=PA\cdot QA$, $|f(x_2)|=PB\cdot QB$, $|f(x_3)|=PC\cdot QC$,

$|x_1-x_2|=c$, $|x_2-x_3|=a$, $|x_3-x_1|=b$,

则 $\dfrac{PA\cdot QA}{b\cdot c}+\dfrac{PB\cdot QB}{c\cdot a}+\dfrac{PC\cdot QC}{a\cdot b}\geqslant 1$.

故 $a\cdot PA\cdot QA+b\cdot PB\cdot QB+c\cdot PC\cdot QC\geqslant abc$.

8. 可以用于证明代数恒等式

例 12 设 $n\geqslant 2$,对于 n 元复数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$.证明以下恒等式:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(a_k+b_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(a_k-a_j)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(b_k+a_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(b_k-b_j)}$$

(2005 年国家队集训测试题)

证明 令 $f(x)=\prod\limits_{j=1}^{n}(x+b_j)-\prod\limits_{j=1}^{n}(x-a_j)$.

由于 $f(x)$ 的项数不超过 $n-1$.故由拉格朗日插值公式,有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}f(a_k)\frac{\sum\limits_{j\neq k}(x-a_j)}{\prod\limits_{j\neq k}(a_k-a_j)}.\qquad(*)$$

注意到 $f(a_k)=\prod_{j=1}^{n}(a_k+b_j)$，比较（*）式两边 x^{n-1} 的系数得：

$$\sum_{j=1}^{n}a_j+\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_k)}{\prod_{j\neq k}(a_k-a_j)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}(a_k+b_j)}{\prod_{j\neq k}(a_k-a_j)}.$$

同理可证 $\sum_{j=1}^{n}a_j+\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}(b_k+a_j)}{\prod_{j\neq k}(b_k-b_j)}$.

所以 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}(a_k+b_j)}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(a_k-a_j)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}(b_k+a_j)}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(b_k-b_j)}.$$

【模拟实战】

习题 A

1. 设 a,b,c 为互不相等的正数，用拉格朗日公式证明下列恒等式：

(1) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$;

(2) $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0$;

(3) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$.

2. 已知 $f(x)=x^2+px+q$.求证：$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

（1980 年美国竞赛题）

3. 已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，若 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2,1\leqslant f(1)\leqslant 3,2\leqslant f(2)\leqslant 4,-1\leqslant f(3)\leqslant 1$，试求 $f(4)$ 的取值范围.

习题 B

1. 对给定的 n 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{N},n>1$，记

$P_i = \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i - a_j), i = 1, 2, \cdots, n.$

证明:对任意 $k \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{p_i}$ 是整数. （1981 年英国奥林匹克题）

2. 设 p 为素数,$f(x)$ 为整系数 d 次多项式,并且满足:

(1)$f(0) = 0, f(1) = 1$;

(2) 对任一正整数 n,$f(n)$ 被 p 除所得的余数为 0 或 1,证明:$d \geqslant p - 1$.

（IMO - 38 预选题）

第二十八章　多项式的牛顿公式及应用

【基础知识】

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一元 n 次多项式 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)=x^n-b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^nb_n$

的 n 个根，令 $T_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k(k=1,2,\cdots)$，那么

当 $k\leqslant n$ 时，$T_k=b_1T_{k-1}-b_2T_{k-2}+\cdots+(-1)^{k+1}\cdot k\cdot b_k$，　　(28 - 1)

当 $k>n$ 时，$T_k=b_1T_{k-1}-b_2T_{k-2}+\cdots+(-1)^{n+1}b_n\cdot T_{k-n}$.　　(28 - 2)

上述两式称为**牛顿公式**.

下面，我们给出这两个公式的证明：

当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，由

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=x^n-b_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^nb_n$$

及由 $f(x)$ 对 x 求导（或对 $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)$ 取对数，再求导），有

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\cdots+\frac{1}{x-x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i},$$

于是，有 $x^{k+1}\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x^{k+1}}{x-x_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^{k+1}}{x-x_i}$，

亦有 $x^{k+1}\cdot f'(x)=f(x)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(x^k+x_ix^{k-1}+x_i^2x^{k-2}+\cdots+x_i^k)+g(x)$，

其中 $\deg g(x)=\deg f(x)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^{k+1}}{x-x_i}<n$.

从而，$x^{k+1}\cdot f'(x)=f(x)\cdot(nx^k+T_1x^{k-1}+T_2x^{k-2}+\cdots+T_k)+g(x)$，

比较上式两边 x^n 项的系数，得

$(-1)^k(n-k)b_k=(-1)^k\cdot b_k\cdot n+(-1)^{k-1}\cdot b_{k-1}T_1+\cdots+(-b_1)T_{k-1}+T_k$.

由上即得 $T_k=b_1T_{k-1}-b_2T_{k-2}+\cdots+(-1)^{k+1}\cdot k\cdot b_k$.

当 $k > n$ 时，由于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $f(x)$ 的根，则有

$x_i^n = b_1 x_i^{n-1} - b_2 x_i^{n-2} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot b_n (i = 1,2,\cdots,n)$.

用 x_i^{k-n} 乘上式两边，有

$x_i^k = b_1 x_i^{k-1} - b_2 x_i^{k-2} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot b_n x_i^{k-n} (i = 1,2,\cdots,n)$.

对 $i = 1,2,\cdots,n$，求和得

$T_k = b_1 T_{k-1} - b_2 T_{k-2} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot b_n T_{k-n}$.

【典型例题与基本方法】

例1 若实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1, a^2+b^2+c^2=2, a^3+b^3+c^3=3$，求 abc 和 $a^4+b^4+c^4$ 的值.

解 设 a,b,c 是多项式 $f(t) = t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$ 的三个根.令

$T_k = a^k + b^k + c^k (k = 1,2,3,4)$，则由牛顿公式，有

$T_1 = 1 = a + b + c = -a_1$，即 $a_1 = -1$.

$T_2 = -a_1 T_1 - 2a_2 = 1 - 2a_2 = 2$，即 $a_2 = -\dfrac{1}{2}$.

$T_3 = -a_1 T_2 - a_2 T_1 - 3a_3 = \dfrac{5}{2} - 3a_3$，即 $a_3 = -\dfrac{1}{6}$.

故 $abc = -a_3 = \dfrac{1}{6}$.

又 $T_4 = -a_1 T_3 - a_2 T_2 - a_3 T_1 = 3 + 1 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{25}{6}$，

故 $a^4 + b^4 + c^4 = \dfrac{25}{6}$.

注 对比多项式 $f(t) = t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$ 中 a_1, a_3 的符号与牛顿公式的符号的异同.

例2 解联立方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3. \end{cases}$$

求出所有实根或复根.　　　　　　　　　　　　　　　　　（第2届美国奥林匹克题）

解 设 $T_n = x^n + y^n + z^n (n = 1,2,\cdots)$，则 $T_1 = T_2 = T_5 = 3$.

设 x,y,z 是三次多项式

$f(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - b_1 t^2 + b_2 t - b_3$

的三个根,则由题设,有 $b_1 = T_1 = 3, b_2 = \frac{1}{2}(T_1^2 - T_2) = 3$,下面计算 b_3.

由牛顿公式,有

$T_5 = 3T_4 - 3T_3 + b_3T_2$,

$T_4 = 3T_3 - 3T_2 + b_3T_1$,

$T_3 = 3T_2 - 2T_1 + b_3 \cdot 3$.

由以上三式,可得 $T_5 = 30b_3 - 27$.

又 $T_5 = 3$,则得 $b_3 = 1$.

从而 $f(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3$.

故 $x = y = z = t = 1$ 为所求.

例3 设 $x + y + z = 0$.求证:$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^5+y^5+z^5}{5} = \frac{x^7+y^7+z^7}{7}$.

(1995年上海市竞赛题)

证明 设 x, y, z 是多项式 $f(t) = t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$ 的三根,由牛顿公式,有

$T_1 = -a_1 = 0$,即 $a_1 = 0$,

$T_2 = -a_1T_1 - 2a_2 = -2a_2$,

$T_3 = -a_1T_2 - a_2T_1 - 3a_3 = -3a_3$,

$T_4 = -a_1T_3 - a_2T_2 - a_3T_1 = 2a_2^2$,

$T_5 = -a_1T_4 - a_2T_3 - a_3T_2 = 5a_2a_3$,

$T_7 = -a_1T_6 - a_2T_5 - a_3T_4 = -7a_2^2a_3$.

于是$\frac{x^2y^2z^2}{2} \cdot \frac{x^5y^5z^5}{5} = -a_2^2a_3 = \frac{x^7y^7z^7}{7}$.故命题获证.

注 由上述证明过程可知,当 $a + b + c = 0$ 时,还有

$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{3} = \frac{a^5+b^5+c^5}{5}$,

$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \cdot \frac{a^4+b^4+c^4}{2} = \frac{a^7+b^7+c^7}{7}$.

例4 已知 $\alpha^{2005} + \beta^{2005}$ 可以表示成以 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 为变元的二元多项式.求这个多项式的系数之和.

(2005年中国西部奥林匹克题)

解 因为要求的是这个多项式的系数之和,则应令变元取值为1,即令 $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = 1$,从而 α, β 是多项式 $f(x) = x^2 - x + 1$ 的两个根.设 $T_n = \alpha^n + \beta^n$,则由牛顿公式,有

$T_n = T_{n-1} - T_{n-2}$(其中 $b_{n-1} = 1, b_{n-2} = -1$).

于是,$T_n = (T_{n-2} - T_{n-3}) - T_{n-2} = -T_{n-3}$.

同理，$T_{n-3}=-T_{n-6}$.

所以 $T_n=T_{n-6}$，即知数列$\{T_n\}$是周期为6的周期数列.

故 $T_{2005}=T_1=\alpha+\beta=1$.

【解题思维策略分析】

从前面各例可以看到，凡涉及等幂和形式的问题均可以考虑用牛顿公式来处理. 下面的例子，还将使我们看到，有些问题通过变更转化，也可以运用牛顿公式来处理.

1. 可以用于证明整除性问题

例5 对任何非负整数 n，证明$[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$能被2^{n+1}整除. 其中记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数(例5、例6亦同). (参见1987年苏州市竞赛题)

证明 设 $u=1+\sqrt{3}$，$v=1-\sqrt{3}$，则 u、v 是一元二次方程$x^2=2x+2$即多项式$f(x)=x^2-2x-2$的两根.

令 $T_n=u^n+v^n$，则据牛顿公式，有 $T_n=2T_{n-1}+2T_{n-2}(n\geqslant 2)$.

$\because T_0=2, T_1=u+v=2$，

由递推关系易知 $T_n\in\mathbf{Z}$，又 $0<\sqrt{3}-1<1, 0<(\sqrt{3}-1)^{2n+1}<1$，于是由

$T_{2n+1}=(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}<(1+\sqrt{3})^{2n+1}$ 可得 $T_{2n+1}=[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$.

由 $T_{2n}=(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}=2^n[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n]$，用上面的证法或用二项式定理可证$(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\in\mathbf{Z}$，于是 $2^n\mid T_{2k+1}$.

i) $n=0$ 时，$T_1=2, 2\mid T_1$.

ii) 设 $n=k$ 时，$2^{k+1}\mid T_{2k+1}$.

当 $n=k+1$ 时，由 $T_{2(k+1)+1}=2T_{2k+2}+2T_{2k+1}$，以及结论 $2^n\mid T_{2n}$ 和归纳假设 $2^{k+1}\mid T_{2k+1}$ 可得 $2^{k+2}\mid T_{2(k+1)+1}$.

故对一切非负整数 n，有 $2^{n+1}\mid T_{2n+1}$，从而本题得证.

注 将题中条件$[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$改为大于$(3+\sqrt{5})^{2n}$的最小整数即为1987年苏州市高中竞赛题.

例6 设 a 是方程$x^3-3x^2+1=0$的最大根. 求证：$[a^{1788}]$与$[a^{1988}]$都能被17整除. (IMO－29预选题)

证明 这个三次方程有三个实根，按照从小到大的顺序分别记为 α、β、a，根据根的定位方法，可以估计出这三个根的存在范围，即

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$2\sqrt{2}$	3
$f(x)$的符号	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

其中 $f(x)=x^3-3x^2+1$，$-1<\alpha<-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<\beta<1$，$2\sqrt{2}<a<3$.

由于 $(-\alpha)^3-3(-\alpha)^2+1=-\alpha^3-3\alpha^2+1=-2\alpha^3+(\alpha^3-3\alpha^2+1)=-2\alpha^3>0$，故 $-\alpha<\beta$，于是 $|\alpha|<\beta$. 又由根与系数的关系可得(注意 $-6a+a^2+\frac{2}{a}=-a^2$)

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(3-a)^2+\frac{2}{a}=1+(8-a^2)<1(\because a^2>8).$$

令 $T_n=\alpha^n+\beta^n+a^n(n\geqslant 0)$. 直接计算可得 $T_0=3$，$T_1=\alpha+\beta+a=3$，$T_2=\alpha^2+\beta^2+a^2=9$，且据牛顿公式，有

$T_{n+3}=3T_{n+2}-T_n$. 据此知对一切非负整数 n，T_n 都是整数.

下面证明，对于 $n>1$，有 $0<\alpha^n+\beta^n<1$. 此不等式左边不等号成立是因为 $|\alpha|<\beta$. 右边的不等号当 $n=1$ 时来自 $\alpha+\beta=3-a<3-2\sqrt{2}<1$，当 $n\geqslant 2$ 乃是因为 $\alpha^n+\beta^n\leqslant|\alpha|^n+|\beta|^n\leqslant\alpha^2+\beta^2<1$.

故由 $a^n=T_n-(\alpha^n+\beta^n)$ 知，对一切 $n\in\mathbf{N}$，有 $[a^n]=T_{198}-1$.

下面只要证明 $T_{1988}-1$ 与 $T_{1788}-1$ 均能被 17 整除即可.

$\{T_n\}$ 每一项除以 17，所得余数构成的数列 $\{\bar{T}_n\}$：3,3,9,7,1,11,9,9,16,5,6,2,1,14,6,0,3,3,9,… 是以 16 为周期的周期数列，即 $\bar{T}_{k+16}=\bar{T}_n$.

而 $1788=16\times 11+12$，$1988=16\times 24+4$.

$\therefore \bar{T}_{1788}=\bar{T}_{12}=1$，$\bar{T}_{1988}=\bar{T}_4=1$.

故 $T_{1788}-1$ 与 $T_{1988}-1$ 均可被 17 整除，命题得证.

例 7 证明：$(2\sin\frac{\pi}{7})^{2n}+(2\sin\frac{2\pi}{7})^{2n}+(2\sin\frac{3\pi}{7})^{2n}$ 能被 $7^{[\frac{n}{3}]}$ 整除.

(1990 年中国国家队训练题)

证明 令 $x_i=(2\sin\frac{i\pi}{7})^2(i=1,2,3)$，构造方程 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$，

即 $x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=0$，

其中
$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=(2\sin\frac{\pi}{7})^2+(2\sin\frac{2\pi}{7})^2+(2\sin\frac{3\pi}{7})^2\\&=2[(1-\cos\frac{2\pi}{7})+(1-\cos\frac{4\pi}{7})+(1-\cos\frac{6\pi}{7})]\\&=6-2(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7})=7.\end{aligned}$$

同理可得 $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=14$，$x_1x_2x_3=7$.

故 $(2\sin\frac{i\pi}{7})^2(i=1,2,3)$ 是方程 $x^3=7x^2-14x+7$ 的三个根.

令 $T_n = [(2\sin\frac{\pi}{7})^2]^n + [(2\sin\frac{2\pi}{7})^2]^n + [(2\sin\frac{3\pi}{7})^2]^n$，则据牛顿公式，有

$T_{n+3} = 7T_{n+2} - 14T_{n+1} + 7T_n$，且 $T_0 = 3, T_1 = 7, T_2 = 21$.

下面用数学归纳法证明 T_n 能被 $7^{[\frac{n}{3}]}$ 整除.

当 $n = 1$ 时，结论显然成立.

设 $n \leqslant k$ 时，T_n 能被 $7^{[(\frac{n}{3})]}$ 整除.对于 $n = k + 1$，由 $T_{k+1} = 7(T_k - 2T_{k-1} + T_{k-2})$ 推得 T_{k+1} 能被 $7^{1+[\frac{k-2}{3}]}$ 整除，又 $1 + [\frac{k-2}{3}] = [\frac{k+1}{3}]$，所以 T_{k+1} 能被 $7^{[\frac{k+1}{3}]}$ 整除.

故本题得证.

2. 可以用于证、解实数的有关性质

例 8 令 $R_n = \frac{1}{2}(a^n + b^n)$，$a = 3 + 2\sqrt{2}$，$b = 3 - 2\sqrt{2}$，$n = 1,2,\cdots$ 则 R_{12345} 的个位数是多少？（第 41 届 AHSME 试题）

解 因 a、b 是方程 $x^2 = 6x - 1$ 的两根，据牛顿公式，有

$$R_{n+2} = 6R_{n+1} - R_n. \quad (*)$$

易知 $R_1 = \frac{1}{2}(a + b) = 3$，$R_2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 17$，为书写方便，下面用 D_n 表示 R_n 的个位数.由抽屉原则易知 $D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots$ 是一个周期数列，据(*)容易算得

$D_1 = 3, D_2 = 7, D_3 = 9, D_4 = 7, D_5 = 3, D_6 = 1, D_7 = 3, D_8 = 7, D_9 = 9, D_{10} = 7, D_{11} = 3, D_{12} = 1, \cdots$ 故数列 $\{D_n\}$ 的周期是 6，即 $D_{n+6} = D_n (n = 1,2,3,\cdots)$.据此知 $D_{12345} = 9$，即 R_{12345} 的个位数是 9.

例 9 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 6x + 1 = 0$ 的两根，试证对一切自然数 n，$a_n = x_1^n + x_2^n$ 都是整数，但不是 5 的倍数.（1987 年中国国家队训练题）

证明 因 x_1, x_2 是方程 $x^2 = 6x - 1$ 的两根，据牛顿公式，有

$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} (n > 2)$.

由 $a_1 = x_1 + x_2 = 6$，$a_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 34$，及递推关系式知，对一切自然数 n，a_n 均是整数.

又 $a_{n-1} = 6a_{n-2} - a_{n-3}$，或 $a_{n-1} - a_{n-2} = 5a_{n-2} - a_{n-3}$，

$\therefore a_n = 5a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) = 5(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}$.

于是 $5 \nmid a_n$.

由此及 $a_1 = 6, a_2 = 34, a_3 = 198$，运用数学归纳法，便证得对一切自然数，均有 $5a_n$.

例 10 找出数$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$的十进表达式中紧靠小数点右边一位数字(即第一位小数)和左边一位数字(即个位数),并证明你的结论.

(1980 年芬兰等四国奥林匹克题)

解 设 $a=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$ 及 $T_n=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n}=(5+2\sqrt{6})^n+(5-2\sqrt{6})^n$.

因 $5+2\sqrt{6}$,$5-2\sqrt{6}$ 是方程 $x^2=10x-1$ 的两根,据牛顿公式,有

$T_{n+2}=10T_{n-1}-T_n(n=1,2,\cdots)$ 且 $T_1=10,T_2=98$.

由递推关系式可知:T_n 为整数,T_{n+2} 与 T_n 的个位数字之和的个位数字为 0,于是 T_{n+4} 与 T_n 的个位数相同,T_{990} 与 $T_{990-4\times247}=T_2=98$ 的个位数相同,即 T_{990} 的个位数为 8,因为 $0<5-2\sqrt{6}<0.2$,所以

$0<(5-2\sqrt{6})^{990}<0.2^{990}<0.01^{330}$,故 $T_{990}=a+\underbrace{0.0\cdots0}_{\text{至少660个0}}P$.

$T_{990}=(5+2\sqrt{6})^{990}+(5-2\sqrt{6})^{990}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980}$.

因此$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$的个位数为 7,第一位小数为 9(且小数点后面至少连续有 660 个 9).

3. 可以用于证不等式,解方程组

例 11 设正实数 a、b、c 满足 $a+b+c=1$.证明

$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geqslant 1$. (2005 年中国西部奥林匹克题)

证明 设 a、b、c 是多项式$f(t)=t^3+b_1t^2+b_2t+b_3$ 的三根,由牛顿公式,有

$T_0=a^0+b^0+c^0=3$,

$T_1=a+b+c=-b_1=1$,即有 $b_1=-1$.

$T_2=-b_1T_1-2b_2=T_1-2b_2=1-2b_2$,

$T_3=-b_1T_2-b_2T_1-3b_3=1-3b_2-3b_3$,

$T_4=-b_1T_3-b_2T_2-b_3T_1=1-4b_2-4b_3+2b_2^2$,

$T_5=-b_1T_4-b_2T_3-b_3T_2=1-5b_2-5b_3+5b_2^2+5b_2b_3$.于是原不等式等价于

$10(1-3b_2-3b_3)-9(1-5b_2-5b_3+5b_2^2+5b_2b_3)\geqslant 1$

$\Leftrightarrow b_2+b_3-3b_2^2-3b_2b_3\geqslant 0$

$\Leftrightarrow (b_2+b_3)(1-3b_2)\geqslant 0$.

由 $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ 及 $0<a,b,c<\frac{1}{2}$,

知 $f(1)>0$,从而 $f(1)=1+b_1+b_2+b_3>0$,

故 $b_2+b_3>0$.

又 $1-3b_2=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$.

应用平均值不等式或排序不等式,知 $1-3b_2\geqslant 0$

故 $10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geqslant 1$.

例 12 解方程组 $\begin{cases}x-y+z-w=2,\\x^2-y^2+z^2-w^2=6,\\x^3-y^3+z^3-w^3=20,\\x^4-y^4+z^4-w^4=60.\end{cases}$ (2006 年全国高中联赛题)

解 定义 $a_n=x^n+z^n(n\in\mathbf{N}^+)$, $b_n=y^n+w^n(n\in\mathbf{N}^+)$.

于是,原方程组变为 $\begin{cases}a_1=b_1+z,\\a_2=b_2+6,\\a_3=b_3+20,\\a_4=b_4+66.\end{cases}$

设 x、z 是多项式 $f(t)=t^2+A_1t+B_1$ 的两个根,则

$A_1=-(x+z)=-a_1$, $B_2=xz=\dfrac{1}{2}(a_1^2-a_2)$.

由牛顿公式,有 $a_3=-A_1a_2-B_1a_1=\dfrac{1}{2}a_1(3a_2-a_1^2)$,

$a_4=-A_1a_3-B_1a_2=\dfrac{1}{2}(2a_1^2a_2-a_1^4+a_2^2)$.

设 y、w 是多项式 $f(s)=s^2+A_2s+B_2$ 的两根,同理

有 $b_3=\dfrac{1}{2}b_1(3b_2-b_1^2)$, $b_4=\dfrac{1}{2}(2b_1^2b_2-b_1^4+b_2^2)$.

从而,原方程组进一步转化为

$$\begin{cases}a_1=b_1+2\\a_2=b_2+6\\\dfrac{1}{2}a_1(3a_2-a_1^2)=\dfrac{1}{2}b_1(3b_2-b_1^2)+20\\\dfrac{1}{2}(2a_1^2a_2-a_1^4+a_2^2)=\dfrac{1}{2}(2b_1^2b_2-b_1^4+b_2^2)+66\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1+2\\a_2=b_2+6\\b_1^2-b_1-b_2+2=0\\2b_1^3+3b_1^2-2b_1b_2-4b_1-5b_2+16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1+2\\a_2=b_2+6\\b_1^2-b_1-b_2+2=0\\5b_1^2-8b_1-5b_2+16=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1+2\\a_2=b_2+6\\b_1=2\\b_2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=4\\a_2=10\\b_1=2\\b_2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+z=4\\x^2+z^2=10\\y+w=2\\y^2+w^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+z=4,\\xz=3,\\y+w=2,\\yw=0.\end{cases}$$

故原方程组有 4 组解：$(x,y,z,w)=(1,2,3,0),(1,0,3,2),(3,2,1,0),(3,0,1,2)$.

【模拟实战】

习题 A

1. 设实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0,a^3+b^3+c^3=0$，求 $a^{19}+b^{19}+c^{19}$ 的值.
2. 设 x_1,x_2 是方程 $x^2+3x+1=0$ 的二根，试求 $x_1^7+x_2^7$ 的值.
3. 若实数 a,b,x 和 y 满足方程组

$$\begin{cases}ax+by=3,\\ax^2+by^2=7,\\ax^3+by^3=6,\\ax^4+by^4=42.\end{cases}$$

求 ax^5+by^5 的值.（第 8 届美国邀请赛）

4. 设非零实数 a,b,c 满足条件 $a+b+c=0$.证明：

$$\frac{(a^7+b^7+c^7)^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)(a^5+b^5+c^5)}=\frac{49}{60}.$$

（《数学通讯》1988 年第 8 期问题征解题）

习题 B

1. 试证：$f(n)=\tan^{2n}\frac{\pi}{7}+\tan^{2n}\frac{2\pi}{7}+\tan^{2n}\frac{3\pi}{7}$ 对于任意非负整数 n 均为自然数.

（《中学数学研究》1989 年 8 期问题征解题）

2. 设实数 x,y,z,w 满足 $x+y+z+w=x^7+y^7+z^7+w^7=0$，求 $w(w+x)(w+y)(w+z)$ 的值.（IMO－26 预选题）
3. 设四个整数 a_1,a_2,a_3,a_4 适合 $\sum\limits_{i=1}^4 a_i^3=0$.证明：对每一个奇数 $k>0$，有 $6\mid\sum\limits_{i=1}^4 a_i^k$.

第二十九章　多项式与母函数方法

【基础知识】

给定一个一元 n 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，　①

将其系数 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 分离出来，便得到一有限数列：

$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$.　②

反之，我们给定如上的一个有限数列②，以其作为一元多项式各项的系数，也便得到了一个确定的一元 n 次多项式①.

一般来说，我们称多项式①为数列②的母函数(或生成函数).

如果母函数 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 能用一个简单的式子表示出来，那么通过对 x 取若干特定的数值，便能得到数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的一些特殊关系式.例如，在等式

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$$

中，令 x 取一些特殊值(如取 1，-1 等)，便得特殊的组合恒等式.因此，母函数也将与组合恒等式联系起来.

对于无限数列，我们可以仿照有限数列母函数的定义，给出无限数列的母函数.

无限数列：$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$　③

的母函数应该是一个"无限次(或无穷次)多项式"：

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$　④

为了讨论问题的方便，我们把这种"无穷多次多项式"叫做形式幂级数.这个名称也可以这样理解：无穷个数相加的式子称之为级数，而④的每项都是幂函数 a_nx^n，故称之为幂级数；所以要加上"形式"两字，是因为这里不讨论它的性质(如收敛、发散等)，而是看重这种形式.

这样一来，我们便可得到：

数列：1，1，1，…，1，…的母函数为 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^{k-1}$；

数列：$1,2^2,3^2,\cdots,n^2,\cdots$ 的母函数为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\cdot x^{k-1}$.

一般地，我们有

定义 1 给定无穷数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，则称形式幂级数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ 为其母函数.

定义 2 两个形式幂级数 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ 和 $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_kx^k$，当且仅当 $a_k = b_k$，$k = 0,1,2,\cdots$ 时，我们称它们相等，记作 $f(x) = g(x)$.

对于形式幂级数，还定义如下的几种运算：

设 A 是常数，且有形式幂级数 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kx^k, g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_kx^k, h(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_kx^k$，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和是指形式幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)x^k$，并记为 $f(x) + g(x)$；A 与 $f(x)$ 的积 $Af(x)$ 是形式幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(Aa_k)x^k$；$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积 $f(x)\cdot g(x)$ 是形式幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}\right)x^k$；如果有 $f(x) = g(x)\cdot h(x)$，则把形式幂级数 $h(x)$ 叫做 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商，记为 $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$；还可以定义开方等(略).

根据以上定义，可以验证(略)如下重要公式：

公式 1 $(1 + x)^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_n^kx^k$； (29－1)

公式 2 $\dfrac{1}{1 - x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$； (29－2)

公式 3 $\dfrac{1}{1 - rx} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} r^kx^k$； (29－3)

公式 4 $\dfrac{1}{(1 - x)^n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{k+n-1}^{n-1}x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k}x^k$； (29－4)

公式 5 $(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}} C_{2k-2}^{k-1}x^k$. (29－5)

(注意验证时，左边分式应看作形式幂级数的商.)

母函数的求得，一是直接作出，二是根据题意推导解出等等，这可从下面的例题中看出.得出母函数后，为了简捷地将原问题解出，要特别注意母函数式子的变形技巧.

【典型例题与基本方法】

例 1 设 $p, q, n \in \mathbf{N}^+$，求和：$\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{p+k}^{p}\cdot C_{q+n-k}^{q}$.

解 数列$\{C_{p+k}^p\}$的母函数为$g(x)=C_p^p+C_{p+1}^p x+C_{p+2}^p x^2+\cdots+C_{p+k}^p x^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{(1-x)^{p+1}}$.

同理,数列$\{C_{q+n-k}^q\}$的母函数为$h(x)=\frac{1}{(1-x)^{q+1}}$,则

$$g(x)\cdot h(x)=\frac{1}{(1-x)^{p+q+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{n}C_{p+k}^p C_{q+n-k}^q\right)x^n.$$

另一方面,又有$\frac{1}{(1-x)^{p+q+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{p+q+n+1}^{p+q+1}x^n$.

比较此两式系数,得$\sum_{k=0}^{\infty}C_{p+k}^p\cdot C_{q+n-k}^q=C_{p+q+n+1}^{p+q+1}$.

例2 设n与m为非负整数,证明:$C_n^m+2C_{n-1}^m+\cdots+(n+1-m)C_m^m=C_{n+2}^{m+2}$.

(1985年英国奥林匹克题)

证明 由于数列$\{C_n^m\}$的母函数为$\sum_{m=0}^{n-1}2C_{n-1}^m x^m$,…则可设数列$\{C_n^m+2C_{n-1}^m+\cdots+(n+1-m)C_m^m\}$的母函数为

$$f(x)=(1+x)^n+2(1+x)^{n-1}+\cdots+(n+1-m)(1+x)^m.$$

易知$(1+x)\cdot f(x)=(1+x)^{n+1}+2(1+x)^n+\cdots+(n+1-m)(1+x)^{m+1}$.

如上两式相减后,整理得

$$f(x)=\frac{1}{x^2}[(1+x)^{n+2}-(1+x)^{m+1}-(n+1-m)x(1+x)^m].$$

于是$f(x)$展开式中的x^m的系数就是$(1+x)^{n+2}$的展开式中的x^{m+2}的系数,即C_{n+2}^{m+2}.

故 $C_n^m+2C_{n-1}^m+\cdots+(n+1-m)C_m^m=C_{n+2}^{m+2}$.

例3 设年利率为i,依复利计算,想要在第一年末提取1元,第二年末提取4元,…,在第n年末提取n^2元,要能永远如此提取,问至少需要多少本金?

(第18届普特南试题)

解 n年后要提取1元(本利和),该项本金应为$(1+i)^{-n}$元;要提取n^2元(本利和),该项本金应为$n^2(1+i)^{-n}$元,所以本金总数为$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(1+i)^{-n}$.

显然,上式可视为数列$\{n^2\}$当$x=\frac{1}{1+i}$时的母函数,而数列$\{n^2\}$的母函数为

$$f(x)=0\cdot 1+1^2\cdot x+2^2\cdot x^2+3^2\cdot x^3+\cdots+n^2x^n+\cdots$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}(C_{n+1}^2+C_n^2)x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n+1}^2 x^n + \sum_{n=2}^{\infty} C_n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+1}^2 x + \sum_{n=2}^{\infty} C_n^2 x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}^2 x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}^2 x^{n+2}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{x^2}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

注意到 $x = \frac{1}{1+i}$,故 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(1+i)^{-n} = \frac{(1+i)(2+i)}{i^3}$.

【解题思维策略分析】

对于某些组合计数问题也可运用母函数方法.一件物体我们取 k($k=0$ 表不取,$k=1$ 表取 1 次,$k=2$ 表重复取 2 次,…)次,可形式地用多项式 $1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots$ 表示,其中 k 表取的次数.这样一来,我们可证明(证略):

结论 1 (i) 设有 n 个相异的物体,如果用 P_r 记每次不许重复地从中取出 r 个的不同取法的总数,那么数列:$P_0, P_1, \cdots, P_r, \cdots$ 的母函数是

$$\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{n\text{个括号}} = (1+x)^n;$$

(ii) 设有 n 个相异的物体,如果用 P'_r 记每次允许无限重复地从中取出 r 个的不同取法的总数,那么数列:$P'_0, P'_1, \cdots, P'_r, \cdots$ 的母函数是

$$\underbrace{(1+x+\cdots+x^r+\cdots)\cdots(1+x+\cdots+x^r+\cdots)}_{n\text{个括号}} = \frac{1}{(1-x)^n};$$

(iii) 设有 n 个物体,其中有 n_1 个 A_1,n_2 个 A_2,…,n_s 个 A_s,$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$,设从这 n 个物体中每次取 r 个的不同取法的总数为 P''_r,那么数列:$P''_0, P''_1, \cdots, P''_r \cdots$ 的母函数是

$$(1+x+\cdots+x^{n_1})(1+x+\cdots+x^{n_2})\cdots(1+x+\cdots+x^{n_s}).$$

例 4 今有一角币 1 张,二角币 1 张,五角币 1 张,一元币 4 张,五元币 2 张,用这些纸币任意付款,则可付出不同数额的款子共有多少种? (1986 年上海市竞赛题)

解 此为有限重复组合问题,由题设,其母函数为 $f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^5)(1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40})(1+x^{50}+x^{100})$,展开知 x 的最高次数为 148,这说明凡超过数额为 148 角币的款子付不出来.但实际上为 4 角、9 角、14 角、19 角…144 角,共有 29 种款子也付不出来,故可付出的不同数额的款子共为 119 种.

例 5 在掷硬币所得结果序列中,可以数出一个反面继以一个正面(记为"反正")的次数,一个正面继以一个正面(记为"正正")的次数,一个反面继以一个反面(记为"反反")的次数,一个正面继以一个反面(记为"正反")的次数.例如,掷硬币 15 次的结

果序列为:正正反反正正正正反正正反反反反,其中有5个"正正",3个"正反",2个"反正",4个"反反",掷币15次,有多少种不同的结果序列,它们都恰好有2个"正正"、3个"正反"、4个"反正"和5个"反反"?

(第4届美国邀请赛题)

解 掷硬币所得结果序列可看作是一系列反(记为(反))、正(记为(正))的组合,其次,每一个"正反"(记为(正)(反)),"反正"(记为(反)(正)),因为在掷硬币的15次的结果序列中,"正反"或"反正"只涉及括号和括号之间的关系,而与括号内的正的个数或反的个数无关.由此可得:满足题设要求的每个这样的结果序列必有这种形式:

(反)(正)(反)(正)(反)(正)(反)(正). (*)

其中有3个"正反",4个"反正".

再考虑(*)式的各个组合中,反、正的位置以便保证每个序列将有2个"正正",5个"反反"的顺序,这意味着将2个(正)放到(*)式中4个(正)旁边,且将5个(反)放到(*)式中4个(反)旁边,这也可看作对4个(正)可无限制地取2个,且对4个(反),可无限制地取5个的组合问题,因而其母函数分别为$g(x)$及$h(x)$,即为$(1-x)^{-4}$及$(1-x)^{-4}$.考虑$g(x)$中x^2的系数及$h(x)$中x^5的系数,便有$C_{4+2-1}^{2}\cdot C_{4+5-1}^{5}=560$,即为所求种数.

结论2 对于含n个未知数的一次不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r(r\in\mathbf{N}^+), \quad ①$$

可看作有r个篮球,要分发给n个班级的问题,不同的分法种数对应着①的非负整数解的个数.

设①有a_r个非负整数解,则数列$\{a_r\}$的母函数是

$$\underbrace{(1+x+\cdots+x^k+\cdots)\cdots(1+x+\cdots+x^k+\cdots)}_{n个}=\frac{1}{(1-x)^n}.$$

类似地,设方程$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n=r$ ②

的非负整数解的个数为$b_r(r\in\mathbf{N}^+,p_i\in\mathbf{N}^+)$,则$\{b_r\}$的母函数就是

$$\frac{1}{(1-x^{p_1})(1-x^{p_2})\cdots(1-x^{p_n})}.$$

例6 方程$2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$的非负整数解共有多少组?

(1985年全国高中联赛题)

解法1 其母函数为$\dfrac{1}{(1-x^2)(1-x)^9}=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{(1-x)^{10}}=$

$$\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{(1-x)^2}+\frac{D}{(1-x)^3}+\cdots+\frac{N}{(1-x)^{10}},$$

运用待定系数法可求得$A,B,C,D,\cdots,N$,故

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^9}=\frac{1}{1024(1+x)}+\frac{1}{1024(1-x)}+\frac{1}{512(1-x)^2}+\frac{1}{256(1-x)^3}+\cdots+\frac{1}{2(1-x)^{10}}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{1}{1024}(-1)^r+\frac{1}{1024}C_r^r+\frac{1}{256}C_{r+2}^r+\frac{1}{128}C_{r+3}^r+\frac{1}{64}C_{r+4}^r+\frac{1}{32}C_{r+5}^r+\cdots+\frac{1}{2}C_{r+9}^r\right]x^r.$$

因此当 $r=3$ 时,便求得 x^3 的系数为$\frac{89088}{512}=174$.

解法 2 由于 x_1 只可能取 0 或 1,当 $x_1=0$ 时,原不定方程成为 $x_2+x_3+\cdots+x_{10}=3$,其非负整数解对应的母函数为$\frac{1}{(1-x)^9}=\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{9+r-1}^r x^r$,此时 $r=3$,故非负整数解的个数为 $C_{9+3-1}^3=165$;当 $x_1=1$ 时,原不定方程成为 $x_2+x_3+\cdots+x_{10}=1$,其非负整数解对应的母函数为$\frac{1}{(1-x)^9}=\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{9+r-1}^r x^r$,此时 $r=1$,故非负整数解的个数为 $C_{9+1-1}^1=9$.故原不定方程非负整数解的个数为 $165+9=174$.

注 上述两种解法,解法 1 是一般解法,虽计算量大一些,但有一般意义,解法 2 是特殊分解法,也是处理问题的一种重要策略方法.

例 7 x,y,z 均为正整数,方程 $x+y+z=15$ 有多少组解?

(1985 年上海市竞赛题)

解 令 $x=x'+1,y=y'+1,z=z'+1$,则本题化为求 $x'+y'+z'=12$ 的非负整数解,其解对应的母函数为$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{3+r-1}^r x^r$,当 $r=12$ 时,$C_{3+12-1}^{12}=C_{14}^2=91$,此即为所求组数.

注 将此例中的 15 改为 $n\in\mathbf{N}^+$,同理可求得正整数解的组数为 $C_{3+(n-3)-1}^{n-3}=C_{n-1}^{n-3}$,此时便为第一届莫斯科奥林匹克题:“有多少种方法将 n 表示为 3 个正整数的和?”

讨论自然数 n 的分拆种数与解上述不定方程类似,下面看一例.

例 8 将正整数 n 表为若干个 1 与若干个 2 之和,和项顺序不同的认为是不同的写法,所有写法种数记作 $\alpha(n)$.将 n 表为若干个大于 1 的整数之和,和项顺序不同也认为是不同的写法,所有写法种数记作 $\beta(n)$.证明:对每个 $n,\alpha(n)=\beta(n+2)$.

(第 17 届普特南竞赛题)

解 找出关于 $\alpha(n),\beta(n)$ 的两个母函数.首先,n 作为 k 个 1 与 2 的有序和的表达式的数目显然等于$(x+x^2)^k$ 的展开式中 x^n 的系数.所以

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)x^n=\sum_{k=0}^{\infty}(x+x^2)^k=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

又 n 作为 k 个大于 1 的整数的有序和的表达式的数目等于 $(x^2+x^3+\cdots)^k$ 的展开式中 x^n 的系数，所以

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\beta(n)x^n=\sum_{k=0}^{\infty}(x^2+x^3+\cdots)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^k$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{1-x}\right)^{-1}=\frac{1-x}{1-x-x^2}=1+\frac{x^2}{1-x-x^2}.$$

于是 $\sum_{n=0}^{\infty}\beta(n)x^n=x^2+x^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)x^n$，

即 $\beta(2)x^2+\beta(3)x^3+\beta(4)x^4+\cdots=x^2+\alpha(1)x^3+\alpha(2)x^4+\cdots$

比较同次项系数而得 $\alpha(n)=\beta(n+2)$.

涉及递归数列的通项的问题，也可运用母函数方法来解答. 下看三例：

例 9 给定正整数 $a_0,a_1,\cdots,a_{100}$，已知 $a_1>a_0,a_2=3a_1-2a_0,a_3=3a_2-2a_1,\cdots,a_{100}=3a_{99}-2a_{98}$. 证明：$a_{100}>2^{99}$. （第 2 届全俄奥林匹克题）

解 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$

则 $-3xf(x)=-3a_0x-3a_1x^2-\cdots-3a_{n-1}x^n-\cdots$

$2x^2f(x)=2a_0x^2+\cdots+2a_{n-2}x^n+\cdots$

三式相加整理得 $f(x)=\dfrac{x}{1-3x+x^2}$.

所以 $f(x)=\dfrac{x}{(1-2x)(1-x)}=\dfrac{(1-x)-(1-2x)}{(1-2x)(1-x)}=\dfrac{1}{1-2x}-\dfrac{1}{x}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)x^n.$$

故有 $a_n=2^n-1$，从而 $a_{100}=2^{100}-1>2^{99}$.

例 10 把一个圆分成 $n(n\geqslant 2)$ 个扇形，依次记为 $s_1,s_2,\cdots,s_n$，每一扇形都可用红、白、蓝三种不同颜色的任一种涂色，要求相邻的扇形的颜色互不相同，问有多少种涂色法？ （1989 年浙江省竞赛题）

解 设涂法总数为 $a_n(n\geqslant 2)$，由题设得递归关系：

$a_2=6$，当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n+a_{n-1}=3\cdot 2^{n-1}$.

设 $f(x)=a_2+a_3x+a_4x^2+\cdots+a_nx^{n-2}+\cdots$

则 $xf(x)=a_2x+a_3x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots$

而 $-3\cdot\dfrac{1}{1-2x}=-3\cdot 1-3\cdot 2x-3\cdot 2^2x^2-\cdots-3\cdot 2^nx^n-\cdots$

由 $x\cdot f(x)+x^2\cdot f(x)-3\cdot\frac{1}{1-2x}=a_2x-3-6x=-3$,

即 $f(x)=\frac{6x}{(x+x^2)(1-2x)}=\frac{1}{x}\cdot(\frac{-2}{1+x}+\frac{2}{1-2x})$

$$=\frac{1}{x}[-2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k+2\sum_{k=0}^{\infty}2^kx^k]$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}[-2\cdot(-1)^k+2\cdot 2^k]x^k=\sum_{k=0}^{\infty}[2(-1)^{k+1}+2^{k+1}]x^{k-1}.$$

故有 $a_n=2(-1)^n+2^n$ 种涂法(注意 $f(x)$ 中 x^{n-2} 系数为 $b_{n-2}=a_n$).

注 上例提供了解带自由项的非齐次递推关系的方法,其中关键是要知道自由项 $3\cdot 2^{n-1}$ 的母函数.

例 11 圆周上分布着 20 个点,现用 10 条既无公共端点又互不相交的弦来连接它们.试问:可以有多少种不同的连法? (第 13 届莫斯科奥林匹克题)

解 以 a_n 记用n 条互不相交的弦两两连结圆周上 $2n$ 个点的所有不同方法数目.考虑一般情形,显然 $n=1$ 无意义.我们规定 $a_0=a_1=1$,由题意可得递推关系:

$$a_n=a_0a_{n-1}+a_1a_{n-2}+a_2a_{n-3}+\cdots+a_{n-2}a_1+a_{n-1}a_2.$$

设数列$\{a_n\}$的母函数为 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$,因 $a_0=a_1=1$,则

$$x\cdot f^2(x)=x\cdot(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)^2$$
$$=a_0^2x+(a_0a_1+a_1a_0)x^2+\cdots+(a_0a_{n-1}+a_1a_{n-2}+\cdots+a_{n-1}a_0)x^n+\cdots$$
$$=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=f(x)-1,$$

即母函数适合方程 $x\cdot f^2(x)-f(x)+1=0$,于是有 $2x\cdot f(x)=1\pm\sqrt{1-4x}$,但因 $f(0)=a_0=1$,故有 $f(x)=\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x})$. (*)

应用公式 5,把$(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ 展开,并代入(*)则可求得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}C_{2k}^{k}\cdot x^k,则\ a_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

故 $a_2=2,a_3=5,a_4=14,a_5=42,\cdots,a_{10}=16796$.

例 12 一副三色牌,共有纸牌 32 张,其中红黄蓝每种颜色的牌各 10 张,编号分别是 1,2,…,10;另有大小王牌各一张,编号均为 0.从这副牌中任取若干张牌,然后按如下规则计算分值:每张编号为 k 的牌计为 2^k 分,若它们的分值之和为 2004,就称这些牌为一个"好"牌组.试求"好"牌组的个数. (2004 年全国女子奥林匹克题)

解 对于 $n\in\{1,2,\cdots,2004\}$,用 a_n 表示分值之和为n 的牌组数目,则 a_n 等于函

数 $f(x)=(1+x^{2^0})^2(1+x^{2^1})^3\cdots(1-x^{2^{10}})^3$ 的展开式中 x^n 的系数(约定 $|x|<1$).

由于 $f(x)=\frac{1}{1+x}[(1+x^{2^0})(1+x^{2^1})\cdots(1+x^{2^{10}})]^3$

$$=\frac{1}{(1+x)(1-x)^3}(1-x^{2^{11}})^3=\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}(1-x^{2^{11}})^3,$$

而 $n\leqslant 2004<2^{11}$,所以 a_n 等于 $\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}$ 的展开式中 x^n 的系数．由于

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$=(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k}+\cdots)[1+2x+3x^2+\cdots+(2k+1)x^{2k}+\cdots].$$

故知 x^{2k} 的系数为 $a_{2k}=1+3+5+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2,k=1,2,\cdots$.

从而,所求的“好”牌组的个数为 $a_{2004}=1003^2=1006009$.

【模拟实战】

习题 A

1. 设 $a_n=(-1)^n(n+1)$,求数列 $\{a_n\}$ 的母函数.
2. 记 $a_0=a_1=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$,求数列 $\{a_n\}$ 的母函数.
3. 求和:$S=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kC_n^k(m\leqslant n)$.
4. 求证:$C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{n+m}^n=C_{n+m+1}^{n+1}$.

习题 B

1. 红、白、黑三种颜色的球各 10 个,从中抽出 12 个,但要求三种颜色的球都有,问有多少种不同的取法?
2. 给出不定方程 $x+2y+3z=15$,
   (1) 求非负整数解的个数;
   (2) 求正整数解的个数.
3. 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=23$ 的正整数解的个数,要求 $x_1\leqslant 9,x_2\leqslant 8,x_3\leqslant 7,x_4\leqslant 6$.



4. 已知 $a_0=-1, a_1=1, a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}+3^n (n\geqslant 3)$，求 a_n.

5. 某公及其后代不论男女皆编入家谱，但他及后代的配偶均不编入家谱，家谱只标明该成员是男或女以及他们之间的父子(女)、母子(女)关系.已知某公家谱上共有 n 名男女成员，每个成员至多有两个子女，而且若有两个子女则必一男一女.问某公的家谱有多少种可能?



第三十章　差分方法与差分多项式

【基础知识】

对于函数 $f(x)$，称 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ 为 $f(x)$ 的一阶差分，简称差分．显然，差分有如下简单性质：

性质 1　若 $\Delta f(n)=0$，则 $f(n)=f(1)(n\in\mathbf{N}^+)$；

若 $\Delta f(n)\geqslant 0$，则 $f(n)\geqslant f(1)(n\in\mathbf{N}^+)$；

若 $\Delta f(n)\leqslant 0$，则 $f(n)\leqslant f(1)(n\in\mathbf{N}^+)$．　(30－1)

对于函数 $f(x)$ 的 r 阶差分可定义如下：

一般地，已知 r 阶差分 $\Delta^r f(x)$，则定义

$$\Delta^{r+1}f(x)=\Delta(\Delta^r f(x))=\Delta^r f(x+1)-\Delta^r f(x)\qquad(30-2)$$

为 $f(x)$ 的 $r+1$ 阶差分．

由如上定义有 $\Delta^2 f(x)=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)$，$\Delta^3 f(x)=f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$，… 则可归纳得到并可用数学归纳法证得如下结论：

性质 2

$$\Delta^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x+n-k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x+k).\qquad(30-3)$$

事实上，当 $n=1$ 结论显然成立．设 $n-1$ 时结论成立，即有

$$\Delta^{n-1}f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\cdot C_{n-1}^k\cdot f(x+k),$$则

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\cdot C_{n-1}^k\cdot\Delta f(x+k)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\cdot C_{n-1}^k\cdot f(x+k+1)-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}\cdot C_{n-1}^k\cdot f(x+k)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\cdot C_{n-1}^{k-1}\cdot f(x+k)-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\cdot C_{n-1}^k\cdot f(x+k)\\&=f(x+n)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\cdot(C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k)f(x+k)+(-1)^n f(x)\end{aligned}$$

$$= (-1)^n f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \cdot C_n^k \cdot f(x+k) + f(x+n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot C_n^k \cdot f(x+k).$$

从而由数学归纳法原理,结论成立.

多项式有很好的差分性质,由 $\Delta x^n = (x+1)^n - x^n = nx^{n-1} + \cdots$,对于多项式

$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$,则

$\Delta f(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1$,

$\Delta^2 f(x) = n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2} + \cdots + a_3 x + a_2, \cdots$

一般地,我们有(可用数学归纳法证得)

性质 3 若 $f(x)$ 的最高次项系数是 a_n,为一元 n 次多项式,则 $\Delta^n f(x) = n! \cdot a_n$. (30 - 4)

推论 若 $f(x)$ 为一元 n 次多项式,则必有 $\Delta^{n+1} f(x) = 0$. (30 - 5)

特别地,当 $m > n$ 时,均有 $\Delta^m f(x) = 0$.

对于一般的函数,也包括多项式函数,有

性质 4 对任何非负整数 n,则 $f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \Delta^k f(x)$. (30 - 6)

事实上,当 $n = 0$ 时,结论显然成立.假设对于 n 结论也成立,即

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \Delta^k f(x),$$

则 $f(x+n+1) = f(x+n) + \Delta f(x+n)$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \Delta^k f(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \Delta^{k+1} f(x)$$

$$= C_n^0 + (C_n^1 + C_n^0)\Delta f(x) + (C_n^2 + C_n^1)\Delta^2 f(x) + \cdots + (C_n^n + C_n^{n-1})\Delta^n f(x) + C_n^n \Delta^{n+1} f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \Delta^k f(x).$$

由数学归纳法原理,知结论成立.

由于数列可看作是一个定义在非负整数集上的函数,所以可以把数列写成 $\{f(n)\}$.于是,我们可讨论数列的差分,已学过的等差数列实质上就是 1 阶差分数列,亦称 1 阶等差数列.于是,一般地,定义 p 阶差分数列为

$\Delta^p f(n) = \Delta(\Delta^{p-1} f(x)), p = 1,2,\cdots$ (30 - 7)

若数列 $\{f(n)\}$ 的 p 阶差分数列不是零数列(指各项都为 0 的数列),而 $p+1$ 阶差分数列是零数列,则称 $\{f(n)\}$ 是 p 阶等差数列.

性质 5 设数列$\{f(n)\}$($n=0,1,\cdots$)是一个 p 阶等差数列，则

$$f(n)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k f(0),\text{当 } n\leqslant p\text{ 时},\\ \sum_{k=0}^{p}C_n^k\Delta^k f(0),\text{当 } n>p\text{ 时}.\end{cases}\qquad(30-8)$$

事实上，由性质 4，令 $x=0$，即得 $f(n)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k f(0)$.

当 $n>p$ 时，由 $\Delta^{p+1}f(0)=\cdots=\Delta^n f(0)=0$,

故有 $f(n)=\sum_{k=0}^{p}C_n^k\Delta^k f(0)$.

从而，由上可知：数列$\{f(n)\}$是一个 p 阶等差数列的充分必要条件是$f(n)$是一个 n 的p 次多项式. 对于高阶等差数列的前 n 项和，我们有

性质 6 设$f(1),f(2),\cdots,f(n)\cdots$是一个高阶等差数列，则此数列前 n 项和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)$，有 $\sum_{k=1}^{n}f(k)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}\Delta^k f(1)$. (30-9)

事实上，当 $n=1$ 时，结论显然，假设对 n 结论成立. 那么对于 $n+1$，由性质 5，有

$$\begin{aligned}&f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+f(n+1)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}\Delta^k f(1)+\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k f(1)=\sum_{k=0}^{n-1}(C_n^{k+1}+C_n^k)\Delta^k f(1)+\Delta^n f(1)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+1}^{k+1}\Delta^k f(1)+\Delta^n f(1)=\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}\Delta^k f(1).\end{aligned}$$

由数学归纳法原理，结论成立.

最后，我们介绍一类特殊的多项式，即差分多项式. 根据差分的定义，我们能有 m 次差分多项式的差分恰好等于$m-1$ 次差分多项式的这样一个极好的差分性质的差分多项式吗?

经探索，我们可以这样定义差分多项式.

设 $m\in\mathbf{N}^+$，一元 m 次多项式

$$P_m(x)=\frac{1}{m!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)\qquad(30-10)$$

称为 m 次(阶)差分多项式.

规定 $P_0(x)=1$，并称之为零阶差分多项式.

这样定义的差分多项式，不仅有上面的很好的差分性质，它的根为 $0,1,\cdots,m-1$ 这些特点，还可以看出：差分多项式是二项式系数的一种推广. 因此，我们也引入类似于二项式系数的记号来专门表示它：$P_0(x)=\binom{x}{0}=1$，$m\geqslant1$ 时，$P_m(x)=\binom{x}{m}$.

类似于二项系数,有

性质 7 $\binom{x}{m-1}+\binom{x}{m}=\binom{x+1}{m}$,或 $P_{m-1}(x)+P_m(x)=P_m(x+1)$,

$$(30-11)$$

此即为 $\Delta\binom{x}{m}=\binom{m+1}{m}-\binom{x}{m}=\binom{x}{m-1}$.由性质 7,并取 $x=1,2,\cdots,n$,有

性质 8 $\sum\limits_{k=1}^{n}P_m(k)=P_m(1)+P_m(2)+\cdots+P_m(n)=P_{m+1}(n+1)$. (30 - 12)

对于差分多项式,我们有

性质 9 当 $r\leqslant m$ 时,有 $\Delta^r\binom{x}{m}=\binom{x}{m-r}$.

当 $r>m$ 时,有 $\Delta^r\binom{x}{m}=0$. (30 - 13)

性质 10 任何一个一元 n 次多项式 $f(x)$ 可表为

$$f(x)=b_n\binom{x}{n}+b_{n-1}\binom{x}{n-1}+\cdots+b_n\binom{x}{2}+b_1\binom{x}{1}+b_0$$

$$=b_n\cdot P_n(x)+b_{n-1}\cdot P_{n-1}(x)+\cdots+b_1\cdot P_1(x)+b_0, \qquad (30-14)$$

其中 $b_0=f(0)$,$b_k=\Delta^k f(0)(k=1,2,\cdots,n)$.

事实上,对 $f(x)=b_n\cdot p_n(x)+\cdots+p_1\cdot p_1(x)+b_0$ 两边依次取 1 阶、2 阶、…,直至 n 阶差分,得

$\Delta f(x)=b_n\cdot P_{n-1}(x)+b_{n-1}\cdot P_{n-2}(x)+\cdots+b_2P_1(x)+b_1$,

$\Delta^2 f(x)=b_n\cdot P_{n-2}(x)+b_{n-1}\cdot P_{n-3}(x)+\cdots+b_2$,

$\Delta^k f(x)=b_n\cdot P_{n-k}(x)+b_{n-1}P_{n-k-1}(x)+\cdots+b_k$,

…

$\Delta^n f(x)=b_n$.

在以上 n 个等式及原式中均令 $x=0$,得

$b_0=f(0),\cdots,b_k=\Delta^k f(0)(k=1,2,\cdots,n)$.

从而 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\cdot P_k(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\Delta^k f(0)\cdot P_k(x)$,

其中 $\Delta^0 f(0)=f(0)$.

由性质 10 知,任给一个一元多项式,都可由一些差分多项式的代数和表示.

例如,$f(x)=\frac{1}{6}x(x^2-9x+14)=P_3(x)-2P_2(x)+P_1(x)$,

$f(x)=x^3=6P_3(x)+6P_2(x)+P_1(x)$.

由于差分多项式是整值多项式，当讨论整值多项式的问题时，或讨论有关整除的问题时，常涉及差分多项式.

【典型例题与基本方法】

例 1 证明：对每一自然数 $n(n \neq 0)$ 和每一实数 $x \neq \frac{n\pi}{2k}(k = 0,1,2,\cdots,n;N$ 是任意自然数)，有

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x.$$

(IMO－8试题)

证明 设 $f(n) = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} - \cot x + \cot 2^n x$，

则
$$\begin{aligned}\Delta f(n-1) &= f(n) - f(n-1)\\ &= \frac{1}{\sin 2^n x} - (\cot x - \cot 2^n x) + (\cot x - \cot 2^{n-1} x)\\ &= \frac{1}{\sin 2^n x} - \frac{\sin(2^n x - 2^{n-1} x)}{\sin 2^{n-1} x \cdot \sin 2^n x} = 0 = \Delta f(n).\end{aligned}$$

又 $f(1) = \frac{1}{\sin 2x} - \cot x + \cot 2x = 0$，

故 $f(n) = f(1) = 0$，即

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x.$$

例 2 设 $a > 0, b > 0$ 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. 证明，对一切自然数 n，都有

$(a+b)^n - a^n - b^n \geqslant 2^{2n} - 2^{n+1}$.

(1988年全国高中联赛题)

证明 令 $f(n) = (a+b)^n - a^n - b^n - 2^{2n} + 2^{n+1}$

则
$$\begin{aligned}\Delta f(n) &= f(n+1) - f(n)\\ &= (a+b)[(a+b)^n - a^n - b^n] + a^n b + ab^n - 2^{2(n+1)} + 2^{n+2} -\\ &\quad [(a+b)^n - a^n - b^n - 2^{2n} + 2^{n+1}]\\ &= (a+b-1)[(a+b)^n - a^n - b^n] + a^n b + ab^n - 2^{2n+2} + 2^{n+2} + 2^{2n} - 2^{n+1}\end{aligned} \quad (*)$$

由于 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$，则知 $ab = a + b$. 再由 $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geqslant 4$，可得 $ab = a + b \geqslant 4$，于是 $(a+b-1)[(a+b)^n - a^n - b^n]$

$$\geqslant 3 \cdot \frac{1}{2}(C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^1 ab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b)$$

$$\geqslant \frac{3}{2}[C_n^1\cdot 2\sqrt{(a^{n-1}b)(ab^{-1})}+C_n^2\cdot 2\sqrt{(a^{n-2}b^2)(a^2b^{n-2})}+\cdots$$

$$+C_n^{n-1}\cdot 2\sqrt{(ab^{n-1})(a^{n-1}b)}]$$

$$=3\cdot(ab)^{\frac{n}{2}}(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})$$

$$\geqslant 3\cdot 2^n\cdot(2^n-2), \quad ①$$

及 $a^nb+ab^n\geqslant 2\sqrt{(a^nb)(ab^n)}=2(ab)^{\frac{n+1}{2}}\geqslant 2^{n+2}$. ②

将①、②两式代入(*)式得

$$\Delta f(n)\geqslant 3\cdot 2^{2n}-3\cdot 2^{n+1}+2^{n+2}-2^{2n+2}+2^{n+2}+2^{2n}-2^{n+1}=0,$$

又 $f(1)=(a+b)-a-b-2^2+2^2=0$,则

$$f(n)\geqslant f(1).$$

故对 $n\in\mathbf{N}$,都有 $(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$.

下面看性质 2 的一个应用.

取 $x=1$ 及 $n=k$,有 $\Delta^kf(1)=\sum\limits_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}C_k^lf(l+1)$,

则 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_n^{k+1}\Delta^kf(1)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sum\limits_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}C_k^lC_n^{k+1}f(l+1)$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^lf(l+1)\sum_{k=l}^{n-1}(-1)^kC_n^{k+1}C_k^l$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^lf(l+1)\sum_{k=l}^{n-1}(-1)^k\frac{n}{k+1}C_{n-1}^kC_k^l$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^lf(l+1)n\cdot\frac{(-1)^l}{n}=\sum_{l=0}^{n-1}f(l+1)=\sum_{k=0}^{n-1}f(k+1).$$

(其中注意到 $\sum\limits_{k=l}^{n-1}\cdot\frac{1}{k+1}C_{n-1}^k\cdot C_k^l=\frac{(-1)^l}{n}$.)

取 $f(x)=x^3$,则上式右端为自然数立方和 $1^3+2^3+\cdots+n^3$,而左端是 $f(x)=x^3$ 的各阶差分在 $x=1$ 处的值乘以相应的组数的和 $C_n^1f(1)+C_n^2\Delta f(1)+C_n^3\Delta^2f(1)+C_n^4\Delta^3f(1)$,而 $\Delta f(1)=7,\Delta^2f(1)=12,\Delta^3f(1)=6$,故 $1^3+2^3+\cdots+n^3=C_n^1+7C_n^2+12C_n^3+6C_n^4=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2=(1+2+\cdots+n)^2$.此即为 1989 年全国高中联赛第一试第五题的逆命题.

由性质 2 知,多项式的 n 阶差分 $\Delta^nf(x)$ 中包含 $f(x)$ 的连续 $n+1$ 个值 $f(x+n)$, $f(x+n-1),\cdots,f(x)$.故在某些问题中,若涉及多项式的连续若干个值时,可考虑与差分联系起来.

例 3 求证:对于多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, $|f(1)|, |f(2)|, \cdots, |f(n)|, |f(n+1)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{n!}{2^n}$.

(1979 年贵州省竞赛题或 1980 年美国竞赛题的推广)

证明 这里涉及 $f(x)$ 从 $f(1)$ 开始的连续 $n+1$ 个值,故可考虑 $\Delta^n f(1)$,由性质 2 及 3,有 $\Delta^n f(1) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(1+n-k) = n!$.

反设对 $k = 0, 1, \cdots, n$ 均有 $|f(1+n-k)| < \frac{n!}{2^n}$,

则 $n! \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k |f(1+n-k)| < \frac{n!}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = n!$,此乃矛盾,故证.

例 4 设 $p(x)$ 为 $3n$ 次多项式,适合 $p(0) = p(3) = \cdots = p(3n) = 2$, $p(1) = p(4) = \cdots = p(3n-2) = 1$, $p(2) = p(5) = \cdots = p(3n-1) = 0$,并且 $p(3n+1) = 730$,求 n.

(1984 年美国奥林匹克题)

解 我们有 $\Delta^{3n+1}P(0) = \sum\limits_{k=0}^{3n+1}(-1)^k C_{3n+1}^k P(3n+1-k)$

$$= 730 + \sum_{j=0}^{n}(-1)^{3j+1} C_{3n+1}^{3j+1} \cdot 2 + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{3j} C_{3n+1}^{3j}$$

$$729 - 2\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_{3n+1}^{3j+1} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j C_{3n+1}^{3j} = 0.$$

为求 $M = \sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_{3n+1}^{3j+1}$ 和 $N = \sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_{3n+1}^{3j}$,利用三次单位根 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 以及多项式 $f(x) = (1-x)^{3n+1} = \sum\limits_{k=0}^{3n+1}(-1)^k C_{3n+1}^k x^k$

$$= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_{3n+1}^{3j} \cdot x^{3j} - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_{3n+1}^{3j+1} \cdot x^{3j+1} - \sum_{j=1}^{n}(-1)^j C_{3n+1}^{3j-1} \cdot x^{3j-1},$$

根据此展开式及 ω 之性质有

$f(1) = N - M - L = 0$,其中 $L = \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^j C_{3n+1}^{3j-1}$,

$f(\omega) = N - M\omega - L\omega^2 = (1-\omega)^{3n+1}$,

$f(\omega^2) = N - M\omega^2 - L\omega = (1-\omega^2)^{3n+1}$.

于是 $N = \frac{1}{3}[f(1) + f(\omega) + f(\omega^2)] = 2(\sqrt{3})^{3n-1} \cdot \cos\frac{3n+1}{6}\pi$,

$$M = -\frac{1}{3}[f(1) + \omega^2 f(\omega) + \omega f(\omega^2)] = 2(\sqrt{3})^{3n-1} \cdot \cos\frac{3n-1}{6}\pi.$$

将其代入(*)式得 $729-4(\sqrt{3})^{3n-1}\cdot\cos\frac{3n-1}{6}\pi+2(\sqrt{3})^{3n-1}\cdot\cos\frac{3n+1}{6}\pi=0$.当 $n=2t$ 时,求得 $t=2$,即 $n=4$;当 $n=2t+1$ 时,可知方程无整数解.故 $n=4$ 为所求.

【解题思维策略分析】

例 5 已知数列 $a_0,a_1,\cdots$ 满足 $a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i(i=1,2,\cdots)$.求证:对于任何自然数 n 和 r,$P(x)=a_0^rC_n^0(1-x)^n+a_1^rC_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2^rC_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+C_{n-1}^rx^{n-1}(1-x)+a_n^rC_n^nx^n$ 是 x 的次数不超过 r 的多项式或零多项式.

(1986 年全国高中联赛题的推广)

证明 简记 $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k^rC_n^kx^k(1-x)^{n-k}$,由已知 $\{a_i\}$ 为公差 $d=a_1-a_0$ 的等差数列.

当 $d=0$,则 $P(x)=a_0^r\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-1}=a_0^r[x+(1-x)]^n=a_0^r$,结论成立.

$d\neq0$ 时,则 $a_k^r=(a_0+kd)^r$ 为 k 的 r 次多项式,由性质 10,有 $a_k^r=\sum\limits_{j=0}^{r}b_jP_j(k)$,其中 $b_j=\Delta^ja_0^r$,则

$$
\begin{aligned}
P(x)&=\sum_{k=0}^{n}\Big[\sum_{j=0}^{r}b_jP_j(k)\Big]\cdot P_k(n)x^k\cdot(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{j=0}^{r}b_j\Big[\sum_{k=0}^{n}P_k(n)\cdot P_j(k)x^k\cdot(1-x)^{n-k}\Big]\\
&=\sum_{j=0}^{r}b_j\Big[\sum_{k=j}^{n}P_k(n)\cdot P_j(k)x^k\cdot(1-x)^{n-k}\Big].
\end{aligned}
$$

由 $P_k(n)\cdot P_j(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{j!(k-j)!}=\frac{n!}{j!(n-j)!}\cdot\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!}$

有 $P_k(n)\cdot P_j(k)=P_j(n)\cdot P_{k-j}(n-j)$.

于是
$$
\begin{aligned}
P(x)&=\sum_{j=0}^{r}b_j\Big[\sum_{k=j}^{n}P_j(n)\cdot P_{k-j}(n-j)x^k\cdot(1-x)^{n-k}\Big]\\
&=\sum_{j=0}^{r}b_jP_j(n)\Big[\sum_{k=j}^{n}P_{k-j}(n-j)x^k\cdot(1-x)^{n-k}\Big].
\end{aligned}
$$

在上式右边代换 $k-j=t$ 得

$$
\begin{aligned}
P(x)&=\sum_{j=0}^{r}b_j\cdot P_j(n)\Big[\sum_{t=0}^{n-j}P_t(n-j)x^{t+j}\cdot(1-x)^{(n-j)-t}\Big]\\
&=\sum_{j=0}^{r}b_j\cdot P_j(n)x^j[x+(1-x)]^{n-j}=\sum_{j=0}^{r}b_j\cdot P_j(n)x^j.
\end{aligned}
$$

由性质 3 知，$b_r=\Delta^r a_0^r=r!d^r\neq 0$. 故 $P(x)$ 为 r 次多项式，证毕.

由性质 8 与 10，对于一元 r 次多项式 $f(x)$，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)=\sum\limits_{k=0}^{r}\Delta^k f(0)\cdot P_{k+1}(n+1)$.

利用上述结论，我们再给出 $S_n=1^3+2^3+\cdots+n^3$ 的一种解法：

令 $f(x)=x^3$，则 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$，注意到，$x^3=6\cdot P_3(x)+6\cdot P_2(x)+P_1(x)$，立得

$$S_n=6P_4(n+1)+6P_3(n+1)+P_2(n+1)=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

若记 $S_0=0$，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和，则

$a_n=\Delta S_{n-1}=S_n-S_{n-1}$.

特别地，对于数列 $a_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，若存在数列 $b_j(j=1,2,\cdots,n,\cdots)$，使得 $a_k=b_{k+1}-b_k(k=1,2,\cdots,n)$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=b_{n+1}-b_1$；使得 $a_k=b_k-b_{k+1}(k=1,2,\cdots,n)$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=b_1-b_{n+1}$.

例 6 观察 $\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$，$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$. 由这些例子的启发，叙述一般规律，并加以证明. 对任何大于 1 的整数 n，证明存在正整数 i 和 j，使得

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\frac{1}{(i+2)(i+3)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}.$$

（1973 年加拿大奥林匹克题）

解 所给的例子暗示的一般规律是：$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$，即

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},n=1,2,3,\cdots$$

于是 $\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}$

$$=\sum_{k=i}^{j}a_k=b_i-b_{j+1}=\frac{1}{i}-\frac{1}{j+1}=\frac{1}{n}.$$

把这个和式与 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)n}$ 相比较，知 $i=n-1$，$j+1=(n-1)n$. 即证.

例 7 已知 $x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$，满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$，$\sum\limits_{i=0}^{n}x_i=0$. 求证：

$|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$. （1989年全国高中联赛题）

证明 记 $S_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$，由 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0,\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$ 知

$S_n=0$ 且 $|S_i|\leqslant\frac{1}{2},i=1,2,\cdots,n-1$.

不妨设 $S_0=0$，则 $x_i=\Delta S_{i-1}=S_i-S_{i-1}(1\leqslant i\leqslant n,i\in\mathbf{N})$，于是

$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta S_{i-1}}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{i}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{i+1}=\sum_{i=1}^{n-1}S_i(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})$，从而

$|\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{i}|\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}|S_i|(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})$.

注 用以确定数列的递推关系的方程也称为差分方程，数列项的最大下标与最小下标的差称为该差分方程的阶数.对于常系数线性差分方程我们有：

结论 r 阶线性常系数差分方程 $a_{n+k}=b_1a_{n+k-1}+b_2a_{n+k-2}+\cdots+b_ka_n$ 的解具有形式：(1) 当特征方程 $x^k=b_1x^{k-1}+\cdots+b_k$ 有 k 个互异的根，则 $a_n=C_1x_1^n+C_2x_n^2+\cdots+C_kx_k^n$；(2) 当特征方程的根有 $r(\leqslant k)$ 重根时，则 $a_n=(C_1+C_2n+\cdots+C_rn^{r-1})x_r^n+C_{r+1}x_{r+1}^n+\cdots+C_kx_k^n$，其中 $C_1,\cdots,C_k$ 由初值 $a_1,\cdots,a_k$ 组成的方程组确定.

例8 设 a_n 为下述自然数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n 且每位数字只能取1、3或4.求证：a_{2n} 是完全平方数. （1991年全国高中联赛题，参见第十章例5）

证明 设 $N=\overline{x_1x_2\cdots x_k}$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in\{1,3,4\}$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$.假定 $n>4$，删去 x_1 时，则当 x_1 依次取1,3,4时，$x_2+x_3+\cdots+x_k$ 分别等于 $n-1,n-3,n-4$，故当 $n>4$ 时，$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}$， ①

并且易知，$a_1=1,a_2=1,a_3=2,a_4=4$. ②

①式为4阶差分方程，其特征方程 $x^4-x^3-x-1=0$ 的四个根为 $\pm\mathrm{i},\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$.

因此①式的解为 $a_n=C_1\mathrm{i}^n+C_2(-\mathrm{i})^n+C_3(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+C_4(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$，利用初值②可得 $a_n=\frac{2-\mathrm{i}}{10}\cdot\mathrm{i}^n+\frac{2+\mathrm{i}}{10}(-\mathrm{i})^n+\frac{1}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}+\frac{1}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}$，因此

$$\begin{cases}a_{2k}=\frac{1}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}]^2;\\a_{2k+1}=\frac{1}{5}[(-1)^k+(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2k+3}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2k+3}].\end{cases}$$

从而不难验明 $a_{2k}\cdot a_{2k+2}=a_{2k+1}^2$. ③

最后再用数学归纳法证明本题结论.显然,$n=1$ 时结论正确.设 a_{2n} 是完全平方数,则由③式知 a_{2n+2} 是完全平方数,因此结论对任意自然数 n 成立.

例 9 函数 $f(x,y)$ 对所有的非负整数满足:(1)$f(0,y)=y+1$;(2)$f(x+1,0)=f(x,1)$;(3)$f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$.试确定 $f(4,1981)$.

(IMO-22 试题,参见第三章习题 B 第 4 题)

解 由条件(3),表明当 $f(x,y)$ 已知时,可给出 $f(x+1,y)$ 关于 y 的差分方程.而条件(2)则给出其初值.由于条件(1)给出了 $f(0,y)$ 的表示式,所以关于 $f(1,y)$ 就有 $f(1,y+1)=f(0,f(1,y))=f(1,y)+1$,$f(1,0)=f(0,1)=2$,解此差分方程得

$f(1,y)=y+2$.于是可得关于 $f(2,y)$ 的差分方程和初值.

$f(2,y+1)=f(1,f(2,y))=f(2,y)+2$,$f(2,0)=f(1,1)=3$.解此差分方程得 $f(2,y)=2y+3$.于是再得关于 $f(3,y)$ 的差分方程和初值:

$f(3,y+1)=f(2,f(3,y))=2f(3,y)+3$,$f(3,0)=f(2,1)=5$.

解此差分方程得 $f(3,y)=2^{y+3}-3$.于是得关于 $f(4,y)$ 的差分方程和初值,$f(4,y+1)=f(3,f(4,y))=2^{f(4,y)+3}-3$,$f(4,0)=f(3,1)=2^4-3$.解此差分方程得 $f(4,y)=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{y+3\text{重}}$,所以 $f(4,1981)=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{1984\text{重}}$.

【模拟实战】

习题 A

1. 证明恒等式:$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$. (北京市竞赛题)

2. 求证:$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$.

(匈牙利奥林匹克题)

3. 在数列$\{a_n\}$时,$a_1=1$,且满足 $a_{n+1}=3a_n+2n-1(n=1,2,\cdots)$,求通项公式 a_n.

4. 设 $p(x)$ 为 $2n$ 次多项式,$p(0)=p(2)=\cdots=p(2n)=0$,$p(1)=p(3)=\cdots=p(2n-1)=2$,$p(2n+1)=-30$.求 n.

习题 B

1. 已知 n 次多项式 $p(x)$ 满足 $p(k)=\dfrac{1}{C_{n+1}^{k}}$，其中 $k=0,1,2,\cdots,n$. 求 $p(n+1)$.

(IMO－22 预选题)

2. 已给自然数 n，求出所有次数低于 n 的多项式 $p(x)$，使满足条件

$\sum\limits_{i=0}^{n} p(i)\cdot(-1)^{i}\cdot C_{n}^{i}=0.$ (IMO－28 预选题)

3. 设 $g(x)$ 是 n 次多项式. 求证：当 $a\geqslant 3$ 时，$|1-g(0)|,|a-g(1)|,|a^{2}-g(2)|,\cdots,|a^{n+1}-g(n+1)|$ 中至少有一个不小于 1.

4. 求和：$S_{n}=2^{3}+5^{3}+8^{3}+\cdots+(3n-1)^{3}$.

5. 试证：若 x 取 $m+1$ 个连续整数时，m 次多项式 $f(x)$ 的值皆为整数，则对任意整数 x，$f(x)$ 的值恒为整数，即 $f(x)$ 是整值多项式.

参考解答

第一章　集合中的对应原理

习题 A

1. 注意到，对于每一个整点(u,v)都有4个相邻点$(u+1,v)$，$(u-1,v)$，$(u,v+1)$，$(u,v-1)$．我们设法作出一个映射，把这5个点映射成5个不同的数，从而把点集的问题转化为数集的问题．

事实上，令$f:(u,v)\to f(u,v)=u+2v$即可．在这个映射下，每个点和它的四个相邻点恰好对应于5个相继整数：$u+2v$，$u+2v\pm1$，$u+2v\pm2$．于是，P与P的相邻点中恰有一个属于S'就转化为上面的5个相继整数恰好有一个对应于S，而这是不难做到的．例如，可设$S=\{(x,y)\mid x+2y$能被5整除$\}$，则S满足题目要求．

2. 用"1"对应杯口朝上，"-1"对应杯口朝下，显然，这在杯口状态集与数集$\{1,-1\}$建立了一个映射．经过k次翻动后，代表茶杯情况的m个数字的乘积是F_k．开始时茶杯全朝上，故$F_0=1^m=1$．茶杯经k次翻动后，再作第$k+1$次翻动，改变了n个数字的符号，故$F_{k+1}=(-1)^n\cdot F_k=F_k$．由此可见，对所有的$k$，$F_k=1$．但是，杯口全朝下时，代表茶杯杯口情形的$m$个数字的乘积是$(-1)^m=-1$．这说明了无论经多少次翻动，都不能使杯口全朝下．

3. 按从小到大的顺序，依次将此$n+2$个点记为$A_1,A_2,\cdots,A_{n+2}$，并将每一点对应着一个数字a_i，即
$$a_i=\begin{cases}1, & \text{当 } A_i \text{ 为有理点时},\\ -1, & \text{当 } A_i \text{ 为无理点时}.\end{cases}$$

显然，这个对应是点集合到数集$\{-1,1\}$之间的一个映射．同时，对每条线段A_iA_{i+1}，则有
$$a_ia_{i+1}=\begin{cases}1, & \text{当 } A_i,A_{i+1} \text{ 同为有理点或同为无理点时},\\ -1, & \text{当 } A_i,A_{i+1} \text{ 中一个为有理点，另一个为无理点时}.\end{cases}$$

我们设一端点为有理点，另一端点为无理点的线段有k条．现有两种方法求此$n+1$条线段对应值的值：其一，积显然为$(-1)^k$；其二，积为
$$(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n+1}a_{n+2})=a_1a_2^2a_3^2\cdots a_{n+1}^2a_{n+2}=a_1a_{n+2}=-1.$$

故$(-1)^k=-1$．因此，k为奇数．

4. 此题实质证$f(n+1)-f(n)\leqslant f(n+2)-f(n+1)$．

因将每个n的拆法前加一个"1"，便可得到一个$n+1$的拆法，故$f(n+1)-f(n)$表示$n+1$的拆法中$(a_1\neq1)$的拆法数．同理，$f(n+2)-f(n+1)$是$n+2$的拆法$(a_1\neq1)$中的拆法数．

考虑到$n+1\geqslant2$，把一个$a_1\neq1$的$n+1$的拆法中的a_p加上1，就可变为一个$a_1\neq1$的$n+2$中的a_{p+1}的拆法，这样就构造了从$a_1\neq1$的$n+1$的拆法到$a_1\neq1$的$n+2$的拆法的一个对应，显

然这个对应是一个单射，所以有 $f(n+1)-f(n) \leqslant f(n+2)-f(n+1)$.

习题 B

1. 先作这样的观察，若(a,b)是这 48 个数中的一对数，比如 $a=2^7\cdot 3^8\cdot 5^9\cdot 11$，$b=2^5\cdot 3^7\cdot 5^9\cdot 11\cdot 13$，则乘积 $ab=(2^6\cdot 3^7\cdot 5^9\cdot 11)^2\cdot 3\cdot 13$.由于$(2^6\cdot 3^7\cdot 5^9\cdot 11)^2$已经是平方数了，这样只须考虑的是 ab 与除平方之外余下的质数 3 和 13 的关系.设(a,b)是已知 48 个数中的任意两个数，把乘积 ab 化为一个完全平方数和一些(a,b)与上面的质数的一次幂中的质数为元素的集合相对应.比如前面例子中的(a,b)对应$\{3,13\}$.由于从 48 个数中选出的不同的数对共有 $C_{48}^2=1128$ 对，而 10 个不同的质数集共有 $2^{10}=1024$ 个子集，并且 $1128>1024$，所以必有两个不同的数对(a,b)，(c,d)，它们对应着同一个质数集的子集$\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}(0\leqslant k\leqslant 10)$，从而有 $ab=m^2p_1p_2\cdots p_k$，$cd=n^2p_1p_2\cdots p_k$，$abcd=(mnp_1p_2\cdots p_k)^2$ 是一个完全平方数.

如果两个数对(a,b)和(c,d)没有公共元素，则 a,b,c,d 这四个数即为所求.如果这两个数对有公共元素，不妨设 $b=d$，则 ac 一定是完全平方数.因此，考察除去(a,c)的另外 46 个数，由于这 46 个数的乘积仅有不超过 10 个的不同的质因数，而且仍有 $C_{46}^2=1035>1024=2^{10}$，所以一定可以从中找出两个不同的数对$(x,y)$和$(u,v)$，使得 $xyuv$ 是完全平方数.如果这两个数对没有公共元素，那么 x,y,u,v 即为所求；如果它们有公共元素，如 $x=v$，则 yu 为完全平方数，这样，a,c,y,u 即为所求.

2. 对于 M 的任一个 10 元子集 T，若存在 $k\in T$，使得 $f(T\setminus\{k\})=k$，就称 T 为"好集".作映射 f:好集 $T\to T\setminus\{k\}(k\in T)$，则这个映射显然是一个从所有好集的集合到 M 的 9 元子集的集合单射，从而好集 T 的个数 $\leqslant C_{20}^9$.

又 M 的 10 元子集的个数为 C_{20}^{10}，且 $C_{20}^{10}>C_{20}^9$，所以，M 中必存在一个 10 元子集不是好集，也就是存在一个 10 元子集 T，对于任一 $k\in T$，都有 $f(T\setminus\{k\})\neq k$.

3. 将每项都是 1 或 2、各项之和为 n 的所有数列的集合记为A_n，每项都是大于 1 的正整数、各项之和为 n 的所有数列的集合记为 B_n.

对任意的$(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1},a_m)=a\in A_{n+2}$，令 $a'=(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})$.显然，当 $a_m=1$ 时，$a'\in A_{n+1}$；当 $a_m=2$ 时，$a'\in A_n$.容易看出：从 A_{n+2} 到 $A_{n+1}\cup A_n$ 的映射$f:a\to a'$ 是双射，故有 $\alpha(n+2)=\alpha(n+1)+\alpha(n)$.注意到 $\alpha(1)=1$，$\alpha(2)=2$，便知 $\alpha(n)=f_n$.这里$\{f_n\}$为斐波那契数列，对于任意的$\{b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b_k\}=b\in B_{n+2}$，令 $b'=(b_1,b_2,\cdots,b_{k-1})$，当 $b_k=2$，$b'=(b_1,b_2,\cdots,b_{k-1})$，当 $b_k>2$，则当 $b_k=2$ 时，$b'\in B_n$；当 $b_k>2$ 时，$b'\in B_{n+1}$.容易验证：从 B_{n+2} 到 $B_{n+1}\cup B_n$ 的映射 $f:b\to b'$ 是双射.故有 $\beta(n+2)=\beta(n+1)+\beta(n)$，又因 $\beta(3)=1$，$\beta(4)=2$，所以 $\beta(n+2)=f_n=\alpha(n)$.

4. 对 $k=0,1,2,3,4$ 定义 $F_k=\{A\mid A\subseteq S,\ |A|=31, A\text{ 的元素和}\equiv k(\bmod 5)\}$.由于 $31\equiv 1(\bmod 5)$，若$\{x_1,x_2,\cdots,x_{31}\}$在 F_0 中，则$\{x_1+k,x_2+k,\cdots,x_{31}+k\}$在 F_k 中(这里 x_i+k 大于 1990 时，利用 $x_i+k-1990$ 代替).显然，这是 F_0 到 F_k 的一一对应.因此，$|F_0|=|F_1|=|F_2|=|F_3|=|F_4|$，而 F_0,F_1,F_2,F_3,F_4 无公共元素.$\sum\limits_{k=0}^{4}|F_4|=C_{1990}^{31}$，所以 $|F_0|=\dfrac{1}{5}C_{1990}^{31}$.

第二章 集合中的最大、最小问题

习题 A

1. 由 $2003 < 2^{11}(=2048)$，作集合 $A=\{\overline{a_1a_2\cdots a_{11}}\}$，其中 $a_i=0$ 或 $1(i=1,2,\cdots,11)$. A 中的数每位数字有两种可能(0,1)，从而知集合 A 元素个数为 $|A|=2^{11}>2003$. 于是 A 中必有两个不同的元素 x,y，它们除以 2003 所得的余数相同，从而 $2003\mid(x-y)$. 令 $p=|x-y|$，则显然 p 不超过 11 位(因 A 中元素最多 11 位). 又因 x,y 均由 0、1 两数字构成，它们之差的数字只可能为 0,1,8,9 四种，不可能为 2,3,4,5,6,7，故结论成立.

2. (1) 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则显然至少产生下列 $2n-3$ 个不同的数：$a_1+a_2<a_1+a_3<\cdots<a_1+a_n<a_2+a_n<\cdots<a_{n-1}+a_n$.

(2) 显然，不是常数的等差数列满足要求.

反之亦然，这是因为：设 n 元集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中只产生了 $2n-3$ 个不同的数，且

$a_1<a_2<\cdots<a_n$.

由 $a_1+a_{n-1}<a_2+a_{n-1}<a_2+a_n$，得 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}$.

由 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}<a_3+a_{n-1}<a_3+a_n$ 得 $a_2+a_n=a_3+a_{n-1}$.

如此下去，就有 $a_{i-1}+a_n=a_i+a_{n-1}$，$1<i<n-1$.

由 $a_1+a_{n-1}=a_2+a_{n-2}$，于是，$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}=\cdots=a_2-a_1$.

3. 首先，全体奇数的集合 $\{1,3,\cdots,99\}$ 中的 50 个元素都可以成为队员的编号. 下面证明：不可能再增加了. 若运动队有 51 个队员，从小到大的编号记为 $a_1,a_2,\cdots,a_{50},a_{51}$. ① 作差 $a_{51}-a_1,a_{51}-a_2,\cdots,a_{51}-a_{50}$，② 这就得到 $51+50=101$ 个数. 由于 ①，② 中的数不超过 1 ~ 100 的范围，由抽屉原理知，必有两数相等，但 ① 中的数互不相等，② 中的数也互不相等，只能是 ① 中某数 a_i 等于 ② 中某数 $a_{51}-a_j$，得 $a_i=a_{51}-a_j$，即 $a_i+a_j=a_{51}$. 这说明编号 a_{51} 等于另两队员编号之和(当 $i\neq j$ 时)，或等于某一队员编号的两倍(当 $i=j$ 时)，这与条件矛盾. 故最多有 50 名队员.

4. 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，且 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，则 $\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{x_1+x_3}{2}<\cdots<\frac{x_1+x_n}{2}<\frac{x_2+x_n}{2}<\frac{x_3+x_n}{2}<\cdots<\frac{x_{n-1}+x_n}{2}$，因此，$A_S$ 中至少有 $2n-3$ 个元素.

另一方面，若取 $S=\{2,4,6,\cdots,2n\}$，则 $A_S=\{3,4,5,\cdots,2n-1\}$，只有 $2n-3$ 个元素. 由此，A_S 的元素的个数最小值为 $2n-3$.

5. 对于任意 $i,j\in\{0,1,\cdots,9\}$，X 应当包含 ij 和 ji 之一(否则序列 $ijij\cdots$ 不满足要求)，这种无序的 (i,j) 对共有 $10+C_{10}^2=55$ 个，故 $|X|\geqslant 55$.

另一方面，如果 $X=\{ij\mid 0\leqslant i\leqslant j\leqslant 9\}$，则 $|X|=55$，且对任一无穷序列，设 i 为它所含的最小数字，j 为 i 的后一项，则 $ij\in X$. 因此，X 最少含 55 个元素.

6. 考虑 S 中 2 或 3 或 5 的倍数的个数，有 $[\frac{150}{2}]+[\frac{150}{3}]+[\frac{150}{5}]+[\frac{150}{2\cdot 3}]-[\frac{150}{2\cdot 5}]-[\frac{150}{3\cdot 5}]+[\frac{150}{2\cdot 3\cdot 5}]=110$.

当 $n=110$ 时，可以全取 2 或 3 或 5 的倍数，所以，在这个子集里无论如何也找不到 4 个两两互素

的数,因此,$n \geqslant 111$.下面证明 $n = 111$ 合乎要求.

为此构造如下 6 个数组:$A_1 = \{1\} \cup \{S$ 中 35 个素数$\}$,$A_2 = \{2 \cdot 67, 3 \cdot 43, 5 \cdot 17, 7 \cdot 19, 11 \cdot 13\}$,$A_3 = \{2 \cdot 53, 3 \cdot 47, 5 \cdot 23, 7 \cdot 17\}$,$A_4 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2\}$,$A_5 = \{2 \cdot 19, 3^3, 5 \cdot 13, 7 \cdot 11\}$,$A_6 = \{2^3, 3 \cdot 23, 5 \cdot 11, 7 \cdot 13\}$.令 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_6$.上述每一个 $A_i(i = 1,2,\cdots,6)$ 中至少要有 4 个元素并且两两互素,且 $A_i \cap A_j = \varnothing(1 \leqslant i < j \leqslant 60)$,为证明本题结论,必须保证 $|A| = 58$.这样,若从 S 中取出 111 个数,则 A 中至少被取出 19 个数,由抽屉原理,必有某 $A_i(i = 1,2,\cdots,6)$ 被选出 4 个,而这四个数是两两互素的.

习题 B

1. 首先证明 S 至多有 5 个元素.事实上,若 S 至少有 6 个元素,则其中元素个数不超过 4 的非空子集合至少要有 $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 = 56$(个).这些子集合的和不大于 54(即 $15 + 14 + 13 + 12 = 54$),由抽屉原则,56 个不超过 54 的正整数至少有两个相等,即至少有两个子集合的和相等,若这两个子集合不相交,则与题设"S 的任意两个不相交的子集合的和不相等"矛盾,若这两个子集合相交,删去公共元素之后同样出现矛盾.所以,S 最多有 5 个元素.

下面来构造这个 5 元素集合,使其元素尽可能地大(因而数集的和尽可能地大).S 含 15,14,13 之后,不能含有 12,否则出现 $15 + 12 = 14 + 13$,S 可含 11,但不含有 10 与 9,否则出现 $15 + 10 = 14 + 11$,$15 + 9 = 11 + 13$,最后一个元素取 8,则 $S = \{15,14,13,11,8\}$,且 $15 + 14 + 13 + 11 + 8 = 61$.于是,所求最大的和为 61.

2. 令 $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k(1 \leqslant k \leqslant 11)$,由题设知,存在下标 m,使 $S_{m-1} < 1500 \leqslant S_m$.于是,对于 $2 \leqslant k \leqslant m$,有 $a_k \leqslant S_{k-1} + 1$,这是由于若 $a_k > S_{k-1} + 1$,而 $a_1 + \cdots + a_{k-1} = S_{k-1}$.这样,就不存在 $S \subsetneq A$,使 $\delta(S) = S_{k-1} + 1$.所以 $S_k = S_{k-1} + a_k \leqslant 2S_{k-1} + 1$. ①

由题设知 $S_1 = a_1 = 1$,于是①用数学归纳法可推证得 $S_k \leqslant 2^k - 1(1 \leqslant k \leqslant m)$.由 $1500 \leqslant S_m \leqslant 2^m - 1$,得 $m = 11$.再由①得 $\frac{S_{k+1} - 1}{2} \leqslant S_k \leqslant 2^k - 1(k = 1,2,\cdots,10)$.由于 S_k 是自然数,因此,$\lceil \frac{S_{k+1} - 1}{2} \rceil \leqslant S_k \leqslant 2^k - 1$(这里$\lceil x \rceil$表示大于或等于 x 的最小正整数).特别地,有 $S_{10} \geqslant \lceil \frac{S_{11} - 1}{2} \rceil \geqslant \lceil \frac{1500 - 1}{2} \rceil = 750$.又 $S_8 \leqslant 2^8 - 1 = 255$,于是 $2a_{10} > a_9 + a_{10} = S_{10} - S_8 \geqslant 495$.所以,$a_{10} \geqslant 248$.

另一方面,我们可以根据以上的一些不等式,构造一个符合要求的集合 A,并且 $a_{10} = 248$.具体地,取 $A = \{1,2,4,8,16,32,64,128,247,248,750\}$.由于 $255 = 2^7 + 2^6 + \cdots + 2 + 2^0$,于是,利用二进制表示可见,当 $n \leqslant 255$ 时,可找到 $S \subsetneq \{1,2,4,\cdots,128\}$,使 $\delta(S) = n$.从而,当 $n \leqslant 255 + 247 = 502$ 时,存在 $S \subsetneq \{1,2,4,128,247\}$,使 $\delta(S) = n$;当 $n \leqslant 502 + 248 = 750$ 时,存在 $S \subsetneq \{1,2,\cdots,128,247,248\}$,使 $\delta(S) = n$;当 $n \leqslant 750 + 750 = 1500$ 时,存在 $S \subsetneq A$,使 $\delta(S) = n$.

3. 考虑 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的全排列.显然,这个全排列的种数是 $n!$ 个,设 A 中有 f_k 个 k 元子集作为元素,这里 $f_k(k = 1,2,\cdots,n)$ 是非负整数,则 $|A| = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

当 $f_k > 0$ 时,对于 f_k 个 k 元子集中的任何一个子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$,在 $1,2,\cdots,n$ 的全排列中,取

出前 k 个元素恰组成子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 的全排列，共有 $k!(n-k)!$ 个. 由于 A 中任意两个元素互不包含，因此对于 A 内的所有元素，用上述方法取出的全排列必然两两不同，于是，有 $\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot k!(n-k)! \leqslant n!$. 注意到，若正整数 n 固定，则当 $k = [\frac{n}{2}]$ 时，C_n^k 达到最大值，有 $|A| = \sum_{k=1}^{n} f_k \leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{C_n^k} = C_n^{[\frac{n}{2}]} \cdot \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot k!(n-k)! \leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$. 当 A 取 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中全部 $[\frac{n}{2}]$ 元子集组成的集合时，恰达到 $|A| = C_n^{[\frac{n}{2}]}$. 综前所述，$A$ 的元素个数的最大值为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$（其中 $[\frac{n}{2}]$ 表示不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数）.

4. 所求 $\max a = 665$. 先证 $a \leqslant 665$. 显然 A 的 999 元子集 $X_0 = \{999, 1000, 1001, \cdots, 1997\}$ 不存在 $x, y \in X_0$ 使得 $x < y$ 且 $x \mid y$. 事实上，X_0 的最小元素为 999，它的最小倍数除本身外为 $2 \cdot 999 = 1998 > 1997$，此比 X_0 的最大的元素还大，成立. 这样，a 就不能为 999, 1000, 1001, …, 1997 中的任一个数.

下面再证 $a \neq 666, 667, 668, \cdots, 997, 998$. 构造集合：

$B_i = \{666 + i\} \cup X_0 \setminus \{2(666 + i)\}, i = 0, 1, \cdots, 332.$

对 B_i 来说 $(666 + i) \cdot 3 \geqslant 1998$，而 $(666 + i) \cdot 2 \notin B_i$，故 $666 + i$ 除本身外其他倍数都不在 B_i 中. 上面已证 X_0 的任一非本身的倍数都不在 X_0 中，$666 + i < 999 (i = 0, 1, 2, \cdots, 332)$，故 X_0 中任一元素的倍数不可能为 $666 + i (i = 0, 1, \cdots, 332)$，使 B_i 中除 $666 + i$ 外的其他元素的倍数（不包括本身）都不在 B_i 中，这样 B_i 中仍不存在两元素满足 $x < y, x \mid y$，而 B_i 中 $(i = 0, 1, \cdots, 332)$ 包含了 666, 667, …, 998. 故 $a \neq 666, 667, \cdots, 998$，则 $a \leqslant 665$.

下证 665 是可取的. 反设存在一个含 665 的 999 元子集 X，不存在这样的 $x, y \in X, x < y$ 使 $x \mid y$，则 $665 \cdot 2, 665 \cdot 3 \notin X$，构造如下 997 个抽屉，它包含了 A 中除 $665, 665 \cdot 2, 665 \cdot 3$ 外的所有元素，且每个元素又出现一次、$K_1 = \{1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2^2, \cdots, 1 \cdot 2^{10}\}$，$K_2 = \{3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, \cdots, 3 \cdot 2^9\}$，$K_3 = \{5, 5 \cdot 2, 5 \cdot 2^2, \cdots, 5 \cdot 2^8\}$，$K_4 = \{7, 7 \cdot 2, 7 \cdot 2^2, \cdots, 7 \cdot 2^8\}$，…，$K_{332} = \{663, 663 \cdot 2, 663 \cdot 3\}$，$K_{334} = \{667, 667 \cdot 2\}$，$K_{335} = \{669, 669 \cdot 2\}$，…，$K_{995} = \{1991\}$，$K_{996} = \{1993\}$，$K_{997} = \{1997\}$. 从而 X 中除 665 外的其他 998 个元素归入这 997 个抽屉里，定有两个在同一个抽屉，而同一抽屉里的数互为倍数关系，矛盾. 证毕.

第三章　函数值、值域的求解

习题 A

1. 首先设 $n \leqslant 100$ 与 $n + 11 > 100$，即 $90 \leqslant n \leqslant 100$，于是，$f(n) = f[f(n + 11)] = f(n + 11 - 10) = f(n + 1)$. 因此，$f(90) = f(91) = \cdots = f(100) = f(101) = 91$.

设 $n < 90$，取 $m \in \mathbf{N}$，使得 $90 \leqslant n + 11m \leqslant 100$，则有 $f(n) = f^{(2)}(n + 11) = \cdots = f^{(m+1)}(n + 11m) = f^{(m)}(f(n + 11m)) = f^{(m)}(91) = 91$. 这就证明了对任意 $n \leqslant 100$，都有 $f(n) = 91$.

2. 因 $1789 = 9 + 4 \cdot 9 + 4^2 \cdot 9 + 4^3 \cdot 9 + 4^4 \cdot 2^2$，而 $f(4n + 9) = f[f(f(n))] = 4f(n) + 9$，所以 $f(1789) = 9 + 4 \cdot f(9 + 4 \cdot 9 + 4^2 \cdot 9 + 4^3 \cdot 2^2) = 9 + 4[9 + 4 \cdot f(9 + 4 \cdot 9 + 4^2 \cdot 2^2)]$

$= 9+4\cdot 9+4^2\cdot f(9+4\cdot 9+4^2\cdot 2^2) = 9+4\cdot 9+4^2\cdot 9+4^3\cdot f(9+4\cdot 2^2)$
$= 9+4\cdot 9+4^2\cdot 9+4^3\cdot 9+4^4\cdot f(2^2) = 9+4\cdot 9+4^2\cdot 9+4^3\cdot 9+4^4\cdot(2^3+3)$
$= 3581.$

3. 首先证明，$g(n)\equiv h(n), n\in\mathbf{N}$，由此及条件(3)即可得到$f(n)\equiv g(n)-h(n)+1\equiv 1, n\in\mathbf{N}$.

设有某个 $n\in\mathbf{N}$，使 $g(n)\neq h(n)$. 因为$f(n)\geqslant 1$，所以对任意 $n\in\mathbf{N}$，有 $h(n)=g(n)+1-f(n)\leqslant g(n)$. 于是 $h(n)<g(n)=k$. 根据条件(2)，存在 $n_1,\cdots,n_{k-1}\in\mathbf{N}$，使得当 $i=1,\cdots,k-1$ 时，$g(n_i)=i$，从而 $h(n_i)<k$. 于是 $h(n_1),\cdots,h(n_{k-1}),h(n)$ 这 k 个数都属于集合$\{1,2,\cdots,k-1\}$. 由抽屉原理，$h(n_1),h(n_2),\cdots,h(n_{k-1}),h(n)$ 中必有两个相等，与条件(1) 矛盾. 结论证毕.

习题 B

1. 令 $f(v)=g(v)\cdot 2^{v^2}$，所给递推关系就变为

$g(v+2)-2g(v+1)+g(v)=v\cdot 16^{-v-1}(v=0,1,2,\cdots)$.

从 0 到 $v-1$ 对上式求和，得到 $g(v+1)-g(v)=\dfrac{1}{15^2}[1-(15v+1)\cdot 16^{-v}]$，再求一次和(从 0 到 $v-1$) 得 $g(v)=\dfrac{1}{15^3}[15v-32+(15v+2)\cdot 16^{-v+1}]$，从而$f(v)=\dfrac{1}{15^3}[15v+2+(15v-32)\cdot 16^{v-1}]\cdot 2^{(v-2)^2}(v=0,1,2,\cdots)$.

以 13 为模，得 $15v+2+(15v-32)\cdot 16^{v-1}\equiv 2v+2+(2v-6)\cdot 3^{v-1}\equiv 2(v+1)+(v-3)\cdot 3^{v-1}\pmod{13}$. 由于 $1990\equiv 1\pmod{13}$，$3^3\equiv 1\pmod{13}$，因此，对于 $v=1989,1990,1991$，有 $f(v)\equiv 0\pmod{13}$.

2. 对自然数 n 分情况讨论. 情况 1：n 为奇数. 此时，$f(n)=2$，所以 $l_n=1$. 情况 2：n 为偶数. 此时，设 $n=2^\alpha(2m+1)$，其中 $\alpha\geqslant 1, m\geqslant 0$.

若满足 $1<t<2^{\alpha+1}$ 的奇数 t 都是 n 的约数，则 $f(n)=2^{\alpha+1}$，$f(f(n))=3$，$f(f(f(n)))=2$. 因此，$l_n=3$. 若满足 $1<t<2^{\alpha+1}$ 的奇数 t 不全是 n 的约数，则必有一个最小正奇数 $t_0(1<t_0<2^{\alpha+1})$，它不是 n 的约数. 于是，有 $f(n)=t_0$，$f(f(n))=f(t_0)=2$. 因此，$l_n=2$. 综上所述，则有

$$l_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ 3, & n\text{ 为偶数 }2^\alpha(2m+1), \alpha\geqslant 1, m\geqslant 0,\text{并且满足 }1<t<2^{\alpha+1}\text{ 的所有奇数 }t\text{ 都是 }n\text{ 的约数},\\ 2, & n\text{ 为偶数 }2^\alpha(2m+1), \alpha\geqslant 1, m\geqslant 0,\text{并且存在不是 }n\text{ 约数的奇数 }t_0,\text{满足 }1<t_0<2^{\alpha+1}.\end{cases}$$

3. 首先注意对大的 k 值，$f_1(k)$ 远小于 k. 由于 f_1 不单调，可将这个事实表达成如下形式：若 $A\leqslant B$，则A 的位数 $\leqslant B$ 的位数 $\leqslant 1+\lg B$，$f_1(A)<(1+\lg B)^2<(4\log_2 16B)^2$. 利用这个不等式两次，得到 $f_2(2^{1990})$ 的估计：$f_1(2^{1990})<4^2\cdot(1994)^2<2^{26}$，$f_2(2^{1990})<(4\cdot 30)^2=14400$. 所以 $f_2(2^{1990})$ 的数字和最多是 $36(=4\cdot 9)$，因此，$f_3(2^{1990})\leqslant 36^2=1296$，$f_4(2^{1990})<(9+9+9)^2=729$，$f_5(2^{1990})<(6+9+9)^2=576$. 另一方面，因为 $f_1(k)\equiv k^2\pmod 9$，所以，$f_1(2^{1990})\equiv(2^{1990})^2\equiv(-2)^2\equiv 4\pmod 9$，$f_2(2^{1990})\equiv 4^2\equiv -2\pmod 9$，$f_3(2^{1990})\equiv(-2)^2\equiv 4\pmod 9\cdots$ 所以当 n 为奇数时，$f_n(2^{1990})\equiv 4\pmod 9$. 当 n 为偶数时，$f_n(2^{1990})\equiv -2\pmod 9$.

若 $x^2 \equiv 4 \pmod 9$ 且 $x \leqslant 24$，则 $x^2 \in H = \{4,49,121,256,400\}$，通过简单计算即知(对每一个 $h \in H$)，$f_3(h) = f_5(h) = f_7(h) = \cdots = 169, f_4(h) = f_6(h) = f_8(h) = \cdots = 256$. 由于 $f_5(2^{1990}) \in H$，所以当 $n \geqslant 8$ 时，$f_n(2^{1990}) = \begin{cases} 169, 若\ n\ 为偶数, \\ 256, 若\ n\ 为奇数. \end{cases}$ 从而 $f_{1991}(2^{1990}) = 256$.

4. 由所给三个条件，得 $f(1,0) = f(0,1) = 2, f(1,1) = f[0, f(1,0)] = f(0,2) = 3, f(1,2) = f[0, f(1,1)] = f(0,3) = 4$. 这可看到：当 $x = 1, y = 0,1,2$ 时，有 $f(1,y) = y + 2$. ① 假设当 $y = k$ 时 ① 式成立，则当 $y = k+1$ 时，$f(1,k+1) = f[0, f(1,k)] = f(0,k+2) = (k+1)+1 = (k+1)+2$. 由归纳原理知 ① 普遍成立.

再由条件(2)、(3) 和 ① 得 $f(2,0) = f(1,1) = 3, f(2,1) = f[1, f(2,0)] = f(1,3) = 5, f(2,2) = f[1, f(2,1)] = f(1,5) = 7$. 这时看到当 $x = 2, y = 0,1,2$ 时，有 $f(2,y) = 2y + 3$. ② 假设当 $y = k$ 时 ② 式成立，则当 $y = k+1$ 时，$f(2,k+1) = f[1, f(2,k)] = f(1,2k+3) = (2k+3)+2 = 2\cdot(k+1)+3$. 故由归纳原理知 ② 也普遍成立.

又由条件(2)、(3) 和 ② 得，$f(3,0) = f(2,1) = 5, f(3,1) = f[2, f(3,0)] = f(2,5) = 13, f(3,2) = f[2, f(3,1)] = f(2,13) = 29$. 由于 $5 = 2^3 - 3, 13 = 2^4 - 3, 29 = 2^5 - 3$，可知当 $x = 3, y = 0,1,2$ 时，有 $f(3,y) = 2^{y+3} - 3$. ③ 假设当 $y = k$ 时，③ 式成立，那么当 $y = k+1$ 时，$f(3,k+1) = f[2, f(3,k)] = f(2, 2^{k+3} - 3) = 2(2^{k+3} - 3) + 3 = 2^{(k+1)+3} - 3$. 由归纳原理知，③ 式也普遍成立.

最后由条件(2)、(3) 和 ③，得 $f(4,0) = f(3,1) = 2^{2^2} - 3, f(4,1) = f[3, f(4,0)] = f(3, 2^{2^2} - 3) = 2^{2^{2^2}} - 3$. 用 $2^{(S)}$ 表示 $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$，其中有 S 层 2 的幂，则 $f(4,0) = 2^{(3)} - 3, f(4,1) = 2^{(4)} - 3, f(4,2) = f[3, f(4,1)] = f[3, 2^{(4)} - 3] = 2^{2^{(4)}} - 3 = 2^{(5)} - 3$，假设 $f(4,k) = 2^{(k+3)} - 3$ 成立，则 $f(4,k+1) = f[3, f(4,k)] = f[3, 2^{(k+3)} - 3] = 2^{2^{(k+3)}} - 3 = 2^{(k+4)} - 3$，由归纳原理，知对任意正整数 y，有 $f(4,y) = 2^{(y+3)} - 3$.

故 $f(4,1981) = 2^{(1984)} - 3$(其中 2^{1984} 表示 1984 层 2 的幂).

第四章　多元函数的条件最(极)值求解

习题 A

1. 由 $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 1$ 得 $2(x+y)^2 = 1 + xy$，即 $2(x+y)^2 = f(x,y) - (x+y) + 1$，移项得 $2(x+y)^2 + (x-y) - [1 - f(x,y)] = 0$. 视此方程为关于 $x+y$ 的二次方程，由 $x+y$ 为实数，得 $\Delta = 1 + 8[1 + f(x,y)] \geqslant 0$，解得 $f(x,y) \geqslant -\frac{9}{8}$，故 $f(x,y)$ 的最小值为 $-\frac{9}{8}$.

2. 令 $a(2x+y-z) + b(x-y+z) + c(x+2y-z) = 7x + 5y - 2z$. 比较两边的系数，可得 $a = 1, b = 2, c = 3$. 分别用 1、2、3 乘已知三个条件，得 $-1 \leqslant 2x + y - z \leqslant 8, 4 \leqslant 2(x - y + z) \leqslant 18, -9 \leqslant 3(x + 2y - z) \leqslant 21$，此三式相加，得 $-6 \leqslant 7x + 5y - 2z \leqslant 47$，故 $-6 \leqslant f(x,y,z) \leqslant 47$，即 $f(x,y,z)$ 的最大值和最小值分别为 47 和 -6.

3. 将 $|5x+y| + |5x-y| = 20$ 两边平方，化简得 $25x^2 + y^2 + |25x^2 - y^2| = 200$. 若 $|5x| > |y|$，则得 $50x^2 = 200, x = \pm 2, |y| \leqslant 10$；若 $|5x| \leqslant |y|$，则得 $2y^2 = 200, y = \pm 10, |5x| \leqslant 10, |x| \leqslant 2$. 故所给方程图象为矩形 $ABCD$，其中 $A(2,-10), B(2,10), C(-2,10), D(-2,-10)$.

由对称性，仅需在 AB、BC 边考虑，并易见，在 AB 上，$Q = x^2 - xy + y^2 = 4 - 2y + y^2, 3 \leqslant Q \leqslant 124$，在 BC 上，$84 \leqslant Q \leqslant 124$，故 $Q_{最大} = 124, Q_{最小} = 3$.

4. 将表达式平方，得 $S^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2(x^2+y^2+z^2)$. 由算术平均与几何平均不等式，有 $\frac{1}{2}(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}) \geqslant y^2, \frac{1}{2}(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}) \geqslant z^2, \frac{1}{2}(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2}) \geqslant x^2$，此三式相加，得 $\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \geqslant x^2 + y^2 + z^2$. 于是 $S^2 \geqslant 3(x^2+y^2+z^2) = 3$，即 $S \geqslant \sqrt{3}$，又因 $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，满足条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，且 $S = \sqrt{3}$，故 S 的最小值是 $\sqrt{3}$.

5. 如果同时将 a 与 d 互换，b 与 c 互换，则题设条件与结论都没有变化. 因此，不妨设 $a + b \geqslant c + d$，于是，有 $\frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b} = \frac{b+c}{c+d} - c(\frac{1}{c+d} - \frac{1}{a+b}) \geqslant \frac{\frac{1}{2}(a+b+c+d)}{c+d} - (c+d)(\frac{1}{c+d} - \frac{1}{a+b}) = \frac{a+b}{2(c+d)} - \frac{1}{2} + \frac{c+d}{a+b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a+b}{2(c+d)} \cdot \frac{c+d}{a+b}} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

另一方面，当 $a = \sqrt{2} + 1, b = \sqrt{2} - 1, c = 2, d = 0$ 时，有 $\frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$. 故所求最小值为 $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

习题 B

1. 显然，当 $0 < a < 1$ 时，所求的最大值为 ka. 当 $a > 1$ 时，对于任意 $s, t \in \mathbf{N}$，都有

$a(a^{s-1} - 1)(a^{t-1} - 1) \geqslant 0$，从而有 $a^s + a^t \leqslant a + a^{s+t-1}$.

利用上述不等式，可以得到 $a^{k_1} + a^{k_2} + \cdots + a^{k_r} \leqslant (r-1)a + a^{k-(r-1)}$， ①

考虑方程 $a + a^m = a^{m+1}$，则有 $a^{m-1} \cdot (a-1) = 1$，易解得 $m = \log_a(\frac{a}{a-1})$，且可以看出：

$$\begin{cases} a + a^m \leqslant a^{m+1}, 当\ m \geqslant \log_a(\frac{a}{a-1})\ 时, \\ a + a^m \geqslant a^{m+1}, 当\ m \leqslant \log_a(\frac{a}{a-1})\ 时. \end{cases} \quad ②$$

利用 ② 式递推，可得

$$(r-1)a + a^{k-(r-1)} \leqslant \begin{cases} a^k, 当\ r \leqslant (k+1) - \log_a(\frac{a}{a-1}), \\ k_a, 当\ r \geqslant (k+1) - \log_a(\frac{a}{a-1}). \end{cases} \quad ③$$

由 ① 和 ③ 式，即得 $a^{k_1} + a^{k_2} + \cdots + a^{k_r} \leqslant \max\{a^k, ka\}$. ④ 显然，④ 式右端的括号中的两个值都是可以取得的，所以，所求的最大值为

$$\max\{ka, a^k\} = \begin{cases} ka, 当\ a \leqslant k^{\frac{1}{k-1}}, k \geqslant 2\ 时; \\ a^k, 当\ k = 1\ 或\ a > k^{\frac{1}{k-1}}, k \geqslant 2\ 时. \end{cases}$$

2. 我们考虑，当 S 最大取什么值时，可以同时满足三个不等式 $x \geqslant S$,① $y+\frac{1}{x} \geqslant S$,② $\frac{1}{y} \geqslant S$,③ 并且其中至少有一个取等号.

由于 $x=y=1$ 时，$S=1$，因此可设 $S>0$，由③得 $y \leqslant \frac{1}{S}$，由①得 $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{S}$，由②得 $S \leqslant \frac{1}{x}+y \leqslant \frac{2}{S}$，即 $S^2 \leqslant 2$，亦即 $S \leqslant \sqrt{2}$.

另一方面，$x=\sqrt{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，有 $S=\sqrt{2}$.

因此，S 可能的最大值是$\sqrt{2}$，并且当 $x=\sqrt{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，S 取到最大值.

3. 设 $y_0=1, y_k=1+x_1+x_2+\cdots+x_k(1 \leqslant k \leqslant n)$，则 $x_k=y_k-y_{k-1}$. 由已知 $\frac{x_k}{1+x_1+x_2+\cdots+x_k} \leqslant S$，即 $\frac{y_k-y_{k-1}}{y_k} \leqslant S$，于是得 $1-S \leqslant \frac{y_{k-1}}{y_k}(k=1,2,\cdots,n)$. ①

由已知可得 $S \leqslant 1$ 且 $y_k>0(k=0,1,2,\cdots,n)$，因此可将①式所表达的 n 个不等式相乘，从而得到 $(1-S)^n \leqslant \frac{y_0}{y_n}$，注意到 $y_0=1, y_n=2$，因此 $(1-S)^n \leqslant \frac{1}{2}$，即 $S \geqslant 1-2^{-\frac{1}{n}}$.

另一方面，若取 $\frac{y_{k-1}}{y_k}=1-S=2^{-\frac{1}{n}}(k=1,2,\cdots,n)$，即取 $y_0=1, y_1=2^{\frac{1}{n}}, y_2=2^{\frac{2}{n}}, y_3=2^{\frac{3}{n}}, \cdots, y_n=2$，则 $S=1-2^{-\frac{1}{n}}$. 此时 $x_k=y_k-y_{k-1}=2^{\frac{k}{n}}-2^{\frac{k-1}{n}}(k=1,2,\cdots,n)$. 这即说明，当 $x_k=2^{\frac{k}{n}}-2^{\frac{k-1}{n}}(k=1,2,\cdots,n)$ 时，S 可取到最小值 $1-2^{-\frac{1}{n}}$.

4. (1) 所给函数式可化为 $f(x)=\frac{(k-1)x^2}{x^4+x^2+1}+1$，由平均值不等式，有 $x^4+1 \geqslant 2x^2$，则 $x^4+x^2+1 \geqslant 3x^2$，$0 \leqslant \frac{x^2}{x^4+x^2+1} \leqslant \frac{1}{3}$. 如果 $k \geqslant 1$，那么 $k-1 \geqslant 0$，从而有 $0 \leqslant \frac{(k-1)x^2}{x^4+x^2+1} \leqslant \frac{1}{3}(k-1)$，$1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{3}(k+2)$. 所以，当 $k \geqslant 1$ 时，$f(x)$ 的最大值是 $\frac{1}{3}(k+2)$，$f(x)$ 的最小值是 1. 如果 $k<1$，那么 $k-1<0$，从而，有 $0 \geqslant \frac{(k-1)x^2}{x^4+x^2+1} \geqslant \frac{1}{3}(k-1)$，$1 \geqslant f(x) \geqslant \frac{1}{3}(k+2)$，所以，当 $k<1$ 时，$f(x)$ 的最大值是 1，最小值是 $\frac{1}{3}(k+2)$.

(2) $f(x)$ 中的实数 k，能使对每三个实数 a,b,c，都存在一个三角形，具有边长 $f(a), f(b)$ 和 $f(c)$，当且仅当 $f(x)$ 中的实数 k 能使 $2\min f(x)>\max f(x)$. 如果 $k \geqslant 1$，那么上式等价于 $2>\frac{1}{3}(k+2)$，即 $1 \leqslant k<4$；如果 $k<1$，那么上式等价于 $\frac{2}{3}(k+2)>1$，即 $-\frac{1}{2}<k<1$. 所求的所有实数为 $-\frac{1}{2}<k<4$.

第五章　无理函数最(极)值的求解

习题 A

1. 由 $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+[0-(-3)^2]}$,此式表示 $f(x)$ 是 x 轴上的点 $(x,0)$ 到两定点 $A(1,1)$、$B(5,-3)$ 的距离之和,作图(图略)知,连 AB 与 x 轴的交点 P 就是使 $f(x)$ 的值最小的点,所以 $|AB|=4\sqrt{2}$ 就是 $f(x)$ 的最小值.

2. 将函数式化为 $f(x)=\sqrt{(x+1)^2+9}+\sqrt{(x-1)^2+9}>3+3=6$,由 $\sqrt{x^2+2x+10}+\sqrt{x^2-2x+10}=f(x)$,① 分子有理化得 $\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+2x+10}-\sqrt{x^2-2x+10}}=f(x)$,即 $\sqrt{x^2+2x+10}-\sqrt{x^2-2x+10}=\dfrac{f(x)}{4x}$.② 由①±②得 $2\sqrt{x^2+2x+10}=f(x)+\dfrac{4x}{f(x)}$,③ $2\sqrt{x^2-2x+10}=f(x)-\dfrac{4x}{f(x)}$,④ 又由③^2+④^2,得 $x^2=\dfrac{f^2(x)[f^2(x)-40]}{4[f^2(x)-4]}\geqslant 0$.于是 $f^2(x)\geqslant 40$ 或 $f^2(x)\leqslant 0$(舍去),所以 $f(x)\geqslant 2\sqrt{10}$,即当 $x=0$ 时,$f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{10}$.

3. 由 $f(x)=\sqrt{(x+3)^2+(1-0)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(1-0)^2}$,令点 $P(x,1)$,$F_1(3,0)$,$F_2(-3,0)$,此三点构成三角形,则 $f(x)=|PF_1|+|PF_2|>|F_1F_2|=6$.又令 $b=1$,则有 $\sqrt{(x+3)^2+(b-0)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(b-n)^2}=f(x)$,此方程表示动点 (x,b) 到两定点 $F_1(3,0)$,$F_2(-3,0)$ 的距离之和为 $f(x)(>|F_1F_2|)$ 的点的轨迹,即表示一个椭圆,其方程为 $\dfrac{x^2}{\frac{f^2(x)}{4}}+\dfrac{b^2}{\frac{f^2(x)}{4}-9}=1$.将 $b=1$ 代入得 $\dfrac{4x^2}{f^2(x)}+\dfrac{4}{f^2(x)-36}=1$,则 $x^2=\dfrac{f^2(x)[f^2(x)-40]}{4[f^2(x)-36]}\geqslant 0$.于是 $f^2(x)\geqslant 40$(舍去 $f^2(x)\leqslant 36$),故当 $x=0$ 时,$f(x)_{最小}=2\sqrt{10}$.

4. $f(x)=\sqrt{4(x-\frac{3}{2})^2-1}+\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{3}{2})^2}$,因由 $4x^2-12x+8\geqslant 0$ 且 $4+3x-x^2\geqslant 0$,有 $\frac{1}{4}\leqslant(x-\frac{3}{2})^2\leqslant\frac{25}{4}$,于是,令 $(x-\frac{3}{2})^2=6t+\frac{1}{4}$,则 $t\in[0,1]$,且 $f(x)=g(t)=\sqrt{24t}+\sqrt{6-6t}=\sqrt{24}\cdot\sqrt{t}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{1-t}$,由(5-3)式知 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{30}$,最小值为 $\sqrt{6}$.

5. 由于函数的定义域为 $[\frac{p}{m},\frac{q}{n}]$,则可令 $x=(\frac{q}{n}-\frac{p}{m})t+\frac{p}{m}$,则 $t\in[0,1]$,且 $f(x)=g(t)=\sqrt{m(\frac{q}{n}-\frac{p}{m})t}+\sqrt{n(\frac{q}{n}-\frac{p}{m})(1-t)}$.于是由(5-3)式知,$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{(m+n)(\frac{q}{n}-\frac{p}{m})}$,最小值为 $\min\{\sqrt{m(\frac{q}{n}-\frac{p}{m})}\sqrt{n(\frac{q}{n}-\frac{p}{m})}\}$.

6. 也可按第5题求.这里另解如下:令 $\sqrt{1+x}=u$,$\sqrt{4-2x}=v$,消去 x 得 $\frac{u^2}{3}+\frac{v^2}{6}=1(u\geqslant 0,v\geqslant 0)$,其图象是椭圆 $\frac{u^2}{3}+\frac{v^2}{6}=1$ 在第一象限的部分.原问题变为求 $f(x)=u+v$,即直线 $v=$

$-u+f(x)$ 上的点在 uOv 平面的第一象限内时,其截距 $f(x)$ 的取值范围.

作图(图略),由直线与椭圆部分有公共点,得到当且仅当直线 $v=-u+f(x)$ 过点 $A(\sqrt{3},0)$ 时,有最小截距$\sqrt{3}$,即 $f(x)$ 的最小值为$\sqrt{3}$;当且仅当直线 $v=-u+f(x)$ 与椭圆部分相切时,其截距最大,即 $f(x)$ 的最大值为 3.故 $f(x)$ 的值域为$[\sqrt{3},3]$.

习题 B

1. 令 $f(x)=m$,有 $-2x+m-3=\sqrt{-2x^2+12x-14}$.

令 $\Gamma_1: y=-2x+m-3, \Gamma_2: y=\sqrt{-2x^2+12-14}$,即$\frac{y^2}{4}+\frac{(x-3)^2}{2}=1(y\geqslant 0)$.

作图(图略),Γ_1 是斜率为 -2 的直线系,Γ_2 为中心在$(3,0)$,长轴平行于 y 轴的椭圆在x轴的上方部分.由图,Γ_1 过点 $A(3-\sqrt{2},0)$,m 的最小值为 $9-2\sqrt{2}$,Γ_1 与 Γ_2 在第一象限内相切时,m 最大.由 $-2x+m-3=\sqrt{-2x^2+12x-14}$ 有等根,即 $6x^2-4mx+m^2-6m+23=0$ 有等根,则 $\Delta=0$,即 $m^2-18m+69=0$,求得 $m=9+2\sqrt{3}$(舍去负值).故 $f(x)$ 的值域为$[9-2\sqrt{2},9+2\sqrt{3}]$.

2. 由$f(x)=\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+(0-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+(0-\sqrt{2})^2}$,可设点 $A(x-\frac{1}{x},\sqrt{3}), B(x-\frac{1}{x},\sqrt{2})$,作图(图略).设 O 为坐标系原点,则 $|OA|-|OB|\leqslant|AB|$.显然,当 $x=1$ 时,$A(0,\sqrt{3}), B(0,\sqrt{2}), O(0,0)$ 三点共线时,$|AB|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,故 $f(x)$ 的最大值为$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

3. 由$f(x)=\sqrt{(\frac{1}{2}x^2-3)^2+(x-2)^2}+\sqrt{(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2})+(x-0)^2}$,可令点 $P(\frac{1}{2}x^2,x), M(3,2), N(\frac{1}{2},0)$,则 $f(x)=|PM|+|PN|$.

因 $P(\frac{1}{2}x^2,x)$ 是抛物线 $y^2=2x$ 上任一点,而点 $M(3,2)$ 在此抛物线内部,点 $N(\frac{1}{2},0)$ 恰为上经抛物线的焦点,又抛物线的准线为 $l: x=-\frac{1}{2}$,作图(图略).由抛物线定义,有 $|PN|=|PQ|$,其中 $|PQ|$ 是点 P 到准线 l 的距离,所以 $f(x)=|PM|+|PN|=|PM|+|PQ|\geqslant|MQ_0|$,其中 Q_0 为 $MQ_0\perp l$ 的垂足.设 MQ_0 交抛物线 $y^2=2x$ 于点P_0,则 $Q_0(-\frac{1}{2},2), P_0(2,2)$,于是,当且仅当 P 为$(2,2)$ 时,即 $x=2$,$f(x)$ 有最小值 $|MQ_0|$,而 $|MQ_0|=\frac{7}{2}$,故 $f(x)$ 的最小值为$\frac{7}{2}$.

4. 由 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\frac{3}{4}(x_1+x_2)^2+\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2\geqslant\frac{3}{4}(x_1+x_2)^2$,又 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2\leqslant(x_1+x_2)^2$,则

$\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1+x_2)\leqslant\sqrt{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}\leqslant x_1+x_2$,其中左边等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立,右边 x_1x_2 中一个为 0 时成立.

同理,有$\frac{\sqrt{3}}{2}(x_i+x_{i+1})\leqslant\sqrt{x_i^2+x_1x_{i+1}+x_{i+1}^2}\leqslant x_i+x_{i+1}$,其中 $i=2,3,\cdots,n$,且 $x_{n+1}=x_1$.

将上述 n 个不等式两边相加,则有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足$\sqrt{3}\leqslant f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 2$,其中左边等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$ 时取到,右边等号当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中一个为1,其余全为0时取到,故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最大值为2,最小值为$\sqrt{3}$.

5. 记 $f_1(x)=\sqrt{15-12\cos x}=\sqrt{(\sqrt{3}\cos x-2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}\sin x-0)^2}=|AM|$,

$f_2(x)=\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin x}=\sqrt{(\sqrt{3}\cos x-0)^2+(\sqrt{3}\sin x-1)^2}=|CM|$,

$f_3(x)=\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=\sqrt{(\sqrt{3}\cos x-0)^2+(\sqrt{3}\sin x-2)^2}=|BM|$,

$f_4(x)=\sqrt{10-4\sqrt{3}\sin x-6\cos x}=\sqrt{(\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}\sin x-2)^2}=|DM|$,

其中 $M(\sqrt{3}\cos x,\sqrt{3}\sin x)$,$A(2\sqrt{3},0)$,$B(0,2)$,$C(0,1)$,$D(\sqrt{3},2)$.

点 M 是以原点为圆心,$\sqrt{3}$ 为半径的圆 $x^2+y^2=3$ 上的点,直线 AB 的方程为$\sqrt{3}x+3y-6=0$,直线 CD 的方程为$\sqrt{3}x-3y+3=0$.由点到直线的距离公式知,O 点到直线AB 的距离为$\sqrt{3}$,知 AB 与圆相切,切点坐标 $M_0(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$.又 M_0 在直线 CD 上,因 $|AM|+|BM|\geqslant|AM_0|+|BM_0|=|AB|=4$,$|CM|+|DM|\geqslant|CM_0|+|DM_0|=|CD|=2$.故 $f(x)$ 在 M_0 点即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 时,取最小值 $|AB|+|CD|=6$.

6. 因$(\sqrt{x+\frac{1}{2}})^2+(\sqrt{y+\frac{1}{2}})^2=2=(\sqrt{2})^2$,则可以 $AC=\sqrt{2}$ 为直径作 $\odot O$,且弦 $AB=\sqrt{x+\frac{1}{2}}$,$BC=\sqrt{y+\frac{1}{2}}$,$CD=1$,$DA=1$,则 $f(x,y)=AB+BC=AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD=\sqrt{2}BD$.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,$AB=0$,此时 $y=\frac{3}{2}$,则 $BC=\sqrt{2}$,从而 $BD=1$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$AB=1=CD$,此时,$y=\frac{1}{2}$,则 $AB=BC=1$,从而 $BD=\sqrt{2}$.

即知 $1\leqslant B\leqslant\sqrt{2}$.故 $1\cdot\sqrt{2}\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$,即所求值域为$[\sqrt{2},2]$.

7. 由 $x^2-x+1>0$(因 $\Delta<0$),且平方后出现 x^3 项,则不能用两点间距离公式.

又 $2x^4-18x^2+12x+68=2(x^2-5)^2+2(x+3)^2$,

则 $f(x)=\sqrt{2}[\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-x+1)+\sqrt{(x^2-5)^2+(x+3)^2}=\sqrt{2}(|PQ|+|PM|)$.

设 $P(x,x^2)$ 是抛物线 $y=x^2$ 上一点,它到直线 $y=x-1$ 的距离为 $|PQ|=\frac{|x^2-x+1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|x^2-x+1|=\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-x+1)$,点 P 到点$M(-3,5)$ 的距离为 $|PM|=\sqrt{(x+3)^2+(x^2-5)^2}$.

当 $|PQ|+|PM|$ 的值最小时,M、P、Q 三点共线,此直线就是过点 M 且垂直于直线$y=x-1$的直线.即 $|PQ|+|PM|$ 的最小值就是点 M 到直线 $y=x-1$ 的距离$\frac{|-3-5-1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{9}{2}\sqrt{2}$.此时

$P_1(-2,4)$ 或 $P_2(1,1)$,即 $x=-2$ 或 $x=1$ 时,所求函数取最小值为$\frac{9}{2}\sqrt{2}$.

8. 由$f(x,y)=(x-y)^2+(-x-1-\frac{1}{y})^2$,可将此式看作直线 $y=-x-1$ 上的点$(x,-x-1)$和双曲线 $xy=1$ 上的点$(y,\frac{1}{y})$间的距离的平方．作图象可知 $A(1,1)$,$B(-1,1)$,$C(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.因此,所求最小值为 $|BC|^2=(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{1}{2}$,即所求最小值为$\frac{1}{2}$.

注　由$f(x,y)=(x-y)^2+[(x+1)-(-\frac{1}{y})]^2$ 也可求得最小值为$\frac{1}{2}$.

第六章　函数不动点及应用

习题 A

1. 设一次函数 $f(x)=ax+b(a\neq 1)$,则由 $a^4(x-\frac{b}{1-a})+\frac{b}{1-a}=16x+15$,即有

$$\begin{cases}a^4=16,\\ \frac{b(1-a^4)}{1-a}=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-2,\\ b=-3.\end{cases}$$

因此,所求一次函数为 $f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x+3$.

2. 由已知 $f(x)=x$ 没有实根,因此,当 $a>0$ 时,对所有实数 x 都有 $f(x)>x$,于是,有 $f(f(x))>f(x)>x$.故 $a>0$ 时,方程 $f(f(x))=x$ 没有实根.

同理,当 $a<0$ 时,可得 $f(x)<x$,从而有 $f(f(x))<f(x)<x$,故 $a<0$ 时,方程 $f(f(x))=x$ 也没有实根.

由已知,$f(x)$ 是二次三项式,即 $a\neq 0$,故命题获证.

3. 由条件(4)得 $f(2)=f(1)\cdot f(2)$,从而有 $f(1)=1$.设当 $n\leqslant k$ 时,都有 $f(n)=n$.现在证明 $f(k+1)=k+1$.

如果 $k+1=2j(j\in\mathbf{N})$,那么 $1\leqslant j\leqslant k$,从而得 $f(k+1)=f(2j)=f(2)\cdot f(j)=2j=k+1$.如果 $k+1=2j+1(j\in\mathbf{N})$,那么 $1\leqslant j\leqslant k$,从而得 $2j=f(2j)<f(2j+1)<f(2j+2)=2j+2$.又由条件(2)得 $f(2j+1)=2j+1$.

由数学归纳法原理知,对一切非零自然数 n,都有 $f(n)=n$.

4. 若令 $f(x)=\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}$,此题则求 $f(x)$ 的不动点,x 必大于 0.如果 $p<0$,则 $\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}\geqslant\sqrt{x^2-p}>x$,在这种情况下原方程无解.故可设 $p\geqslant 0$,由原方程有 $2\sqrt{x^2-1}=x-\sqrt{x^2-p}$,平方后整理,得 $2x^2+p-4=-2x\sqrt{x^2-9}$.再平方,整理得 $8(2-p)x^2=(p-4)^2$.当 $p=2$ 时,此方程无解,当 $p=4$ 时,$x=0$ 不是原方程的解,从而得 $2-p>0$,即在 $0\leqslant p<2$ 时,可能有解 $x=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$.将此代入原方程,检验,得 $|3p-4|=4-3p$,推得 $3p-4\leqslant 0$,故只有当 $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{3}$ 时,原方程有实根,或有不动点,实根为 $x=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$.

习题 B

1. 先设 x 是实变量，易知当 $x>0$ 时，$p_1(x)$ 是单调递增函数，今用数学归纳法证明：当 $|x|>2$ 时，$p_n(x)>|x|$ 对任意自然数 n 都成立. 显然，当 $n=1$ 时，$p_1(x)=|x|=x^2-|x|-2>x^2-2|x|=|x|(|x|-2)>0$，即结论成立. 设对于小于 n 的所有自然数结论亦成立，即 $|x|>2$ 推得 $p_k(x)>|x|$，$k=1,2,\cdots,n-1$，则对自然数 n，由 $p_{n-1}(x)>|x|$ 及 $p_1(x)$ 的单调递增性可知 $p_1(p_{n-1}(x))>p_1(|x|)=p_1(x)$，即 $p_n(x)>p_1(x)>|x|$（当 $|x|>2$ 时）.

不等式 $p_n(x)>|x|$（当 $|x|>2$ 时）说明方程 $p_n(x)=x$ 当 $|x|>2$ 时无实根. 换言之，方程所有实根都满足 $|x|\leqslant 2$. 故可将它的实根表为 $x=2\cos t$，只须求出相应的 t 值即可. 对 $x=2\cos t$，则 $p_1(x)=x^2-2=4\cos^2 t-2=2\cos 2t$. 设 $p_{n-1}(x)=2\cos 2^{n-1}t$，则 $p_n(x)=4\cos^2 t-2=2\cos 2t$. 设 $p_{n-1}(x)=2\cos 2^{n-1}t$，则 $p_n(x)=4\cos^2 2^{n-1}t-2=2\cos 2^n t$. 因此，对一切自然数 n 都成立 $p_n(x)=2\cos 2^n t$. 于是，原方程变为 $2\cos 2^n t=2\cos t$，即 $\sin\dfrac{(2^n-1)t}{2}\cdot\sin\dfrac{(2^n+1)t}{2}=0$，解得其根为 $\alpha_1=\dfrac{2k\pi}{2^n-1}$，$\alpha_2=\dfrac{2l\pi}{2^n+1}$. 由此可知原方程的根为 $x=2\cos\dfrac{2k\pi}{2^n-1}(k=0,1,2,\cdots,2^{n-1}-1)$，共 2^{n-1} 个，$x=2\cos\dfrac{2l\pi}{2^n+1}(l=0,1,2,\cdots,2^{n-1})$，共 $2^{n-1}+1$ 个.

现在，我们来证明在上述 $2\cdot 2^{n-1}+1$ 个根中，除 $l=k=0$ 所对应的两个根相等外，没有其他相同的. 这样，根的个数一共是 2^n 个. 在这两组根中，同组内没有相同的角是容易知道的，现证在不同的组内也没有相同的角，反证法证. 假设 $\dfrac{2k\pi}{2^n-1}=\dfrac{2l\pi}{2^n+1}$，则 $k(2^n+1)=l(2^n-1)$，因 $2^n+1=(2^n-1)+2$，故 2^n+1 和 2^n-1 的公因数都是 2 的因数，但 2^n+1 和 2^n-1 又都是奇数，因此它们的公因数只能是 1，也即它们是互素的. 这样一来，k 为 2^n-1 的倍数，这是不可能，因 $k<2^n-1$，所以除 $k=l=0$ 外不可能使上面等式成立.

2. 先证下面的命题：对于任意自然数 k，只要 $n\geqslant k$，则 $f(n)\geqslant k$. 当 $k=1$ 时，显然，由于 1 是 $f(n)$ 的值域中最小数，所以此命题成立. 假设这件事对于某自然数 k 成立，当 $n\geqslant k+1$ 时，$n-1\geqslant k$，由假设，$f(n-1)\geqslant k$，当然 $f[f(n-1)]\geqslant k$，由已知条件 $f(n)>f[f(n-1)]$ 得 $f(n)>k$，从而推得 $f(n)\geqslant k+1$. 这样便证明了 $n\geqslant k+1$ 时，此命题成立. 所以不等式 $f(n)\geqslant k$ 对于任意自然数 k 和任何不小于 k 的自然数 n 成立，取 $k=n$，则有 $f(n)\geqslant n$. 令 $n=f(k)$，则 $f[f(k)]\geqslant f(k)$. 因为 $f(k+1)>f[f(k)]$，故由此可得 $f(k+1)>f(k)$，这说明 $f(k)$ 是严格递增的，由于对任意 n，$f(n+1)>f[f(n)]$，而 $f(k)$ 严格递增，故 $n+1>f(n)$，即 $n\geqslant f(n)$，前面已证 $f(n)\geqslant n$，故 $f(n)=n$.

3. 若存在满足条件的函数 $f(x)$，我们令 $g(x)=f[f(x)]=x^2-1996$，设 a,b 是 $x=x^2-1996$ 的两个实根，则 a,b 是函数 $g(x)$ 的不动点.

设 $f(a)=p$，则 $f[f(p)]=f[f(f(a))]=f(a)=p$，从而 p 也是 $g(x)$ 的不动点，$p\in\{a,b\}$. 同理 $f(b)\in\{a,b\}$.

令 $h(x)=g[g(x)]=(x^2-1996)^2-1996$. 因 $h(x)=x$，即 $(x^2-1996)^2-1996=x$，等价于 $(x^2-x-1996)(x^2+x-1995)=0$，所以，$h(x)$ 有四个不动点 a,b,c,d. 又由 $h[g(c)]=$

$g(g(g(c)))=g[h(c)]=g(c)$，得知 $g(c)$ 是 $h(x)$ 的不动点，由于 $g(c)=c^2-1996$，又 $c^2+c-1995=0$，因此，$g(c)=-c-1$. 显然 $g(c)\neq a, g(c)\neq b, g(c)\neq c$，所以 $g(c)=d$. 同理 $g(d)=c$. 设 $f(c)=r$，则 $h[f(c)]=f[h(c)]=f(c)$，因此，r 也是 $h(x)$ 的不动点.

若 $r\in\{a,b\}$，则 $d=g(c)=f(f(c))=f(r)\in\{a,b\}$，矛盾. 若 $r=c$，则 $g(c)=f(f(c))=f(r)=f(c)=r=c$，矛盾. 若 $r=d$，则 $d=g(c)=f(f(c))=f(r)=f(d)$，$d=f(d)=f(f(d))=g(d)$，矛盾. 综上所述，满足条件的函数 $f(x)$ 不存在.

4. 在条件(1)中，令 $x=y$，得 $f((x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x)$. ①

则 $x+f(x)+xf(x)$ 是 f 的一个不动点(即使得 $f(z)=z$ 成立的 z).

设 $A=x+f(x)+xf(x)$，在①式中，令 $x=A$，得

$$\begin{cases}f(A)=A\\ f(A+f(A)+Af(A))=A+f(A)+Af(A)\end{cases}\Rightarrow f(A^2+2A)=A^2+2A.$$

所以，A^2+2A 也是 f 的一个不动点.

若 $A\in(-1,0)$，则有 $A^2+2A=(A+1)^2-1\in(-1,0)$，且 $A^2+2A\neq A$，

从而，$(-1,0)$ 中有两个不动点，与 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(-1,0)$ 内严格递增矛盾.

若 $A\in(0,+\infty)$，则 $A^2+2A\in(0,+\infty)$，$A^2+2A\neq A$，这也与 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增矛盾.

所以，$A=0$，即 $x+f(x)=xf(x)=0$，解得 $f(x)=-\frac{x}{1+x}$.

下面验证 $f(x)=-\frac{x}{1+x}$ 确实符合条件. 显然，$\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{1+x}$ 在 S 中严格递增.

对任意的 x、$y\in S$，有 $f(x+f(y)+xf(y))=f(x+\frac{-y}{1+y}+\frac{-y}{1+y}\cdot x)$

$$=f(\frac{x-y}{1+y})=-\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}}=\frac{y-x}{1+x}\cdot y+f(x)+yf(x)=y+\frac{-x}{1+x}+\frac{-x}{1+x}\cdot y=\frac{y-x}{1+x}.$$

从而，条件(1)成立.

因此，所求的所有的函数为 $f(x)=-\frac{x}{1+x}$.

第七章 广义凸函数及简单应用

习题 A

1. 考虑函数 $f(x)=m+x$，对于 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$(m+x_1)(m+x_2)\geqslant(m+\sqrt{x_1x_2})^2\Leftrightarrow x_1+x_2\geqslant2\sqrt{x_1x_2}$，从而由(7-12)式，有 $\prod\limits_{i=1}^{n}(m+x_i)\geqslant(m+\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i})^n$.

2. 考虑函数 $f(x)=\frac{1}{x^k}+x^k$，对于 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，由 $(x_1^k+x_2^k)^2\geqslant4x_1^kx_2^k$，有 $\frac{1}{x_1^k}+\frac{1}{x_2^k}\geqslant$

$\frac{4}{x_1^k+x_2^k}$,于是$\frac{1}{2}[(x_1^k+\frac{1}{x_1^k})+(x_2^k+\frac{1}{x_2^k})]\geqslant\frac{x_1^k+x_2^k}{2}+\frac{2}{x_1^k+x_2^k}$,由(7-15)式有$[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^k+\frac{1}{x_i^k})^m]^{\frac{1}{m}}\geqslant\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}+\frac{n}{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}\geqslant\frac{1}{n^k}+n^k$.故$\sum_{i=1}^{n}(x_i^k+\frac{1}{x_i^k})^m\geqslant n(n^k+\frac{1}{n^k})^m$.

3. 考虑函数$f(x)=\frac{1}{x}-1$,对于$x_1,x_2\in(0,+\infty)$且$x_1+x_2=1$,有$(\frac{1}{x_1}-1)(\frac{1}{x_2}-1)\geqslant(\frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}}-1)^2\Leftrightarrow 1\geqslant 1$.由(7-13)式,有$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_i}-1)\geqslant(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}-1)^2$,即$\prod_{i=1}^{1}(\frac{1}{x_i}-1)\geqslant(n-1)^n$.

习题 B

1. 用数学归纳法证明$|r|>0$的情形($r=0$可类似证明).当$n=2$时,由题设知$f^{p_1}(x_1)\cdot f^{p_2}(x_2)\geqslant f[(p_1x_1^r+p_2x_2^r)^{\frac{1}{r}}]$成立.假设$n=k$时,结论成立.当$n=k+1$时,由函数$y=x^\alpha(x\in\mathbf{R}^+)$,当$\alpha>0$时为增函数,当$\alpha<0$时为减函数的性质及归纳假设,令$q=p_k+p_{k+1}$,$y^r=\frac{p_kx_k^r}{q}+\frac{p_{k+1}x_{k+1}^r}{q}$,则$p_1+p_2+\cdots+p_{k+1}+q=\sum_{i=1}^{k+1}p_i=1$,$y\in A$,于是

$$f[(\sum_{i=1}^{k+1}p_ix_i^r)^{\frac{1}{r}}]=f[(p_1x_1^r+p_2x_2^r+\cdots+p_{k-1}x_{k-1}^r+qy^r)^{\frac{1}{r}}]$$
$$\leqslant\prod_{i=1}^{k-1}f^{p_i}(x_i)\cdot f^q(y)=\prod_{i=1}^{k-1}f^{p_i}(x_i)\cdot f^q[(\frac{p_k\cdot x_k^r}{q}+\frac{p_{k+1}\cdot x_{k+1}^r}{q})^{\frac{1}{r}}]$$
$$\leqslant\prod_{i=1}^{k-1}f^{p_i}(x_i)\cdot[f^{p_k/q}(x_k)\cdot f^{p_{k+1}/q}(x_{k+1})]^q=\prod_{i=1}^{k+1}f^{p_i}(x_i).$$

综上,归纳原理,命题获证.

2. 可按例4的方法证.也可由平均值不等式,有$\sum_{i=1}^{n}(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a)^n\geqslant n\sum_{i=1}^{n}(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a)$.

再利用例7的方法或结论,即得$\sum_{i=1}^{n}(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a)^n\geqslant n[(\frac{s}{n})^m+(\frac{n}{s})^m+a]^n$.

第八章　函数方程的求解

习题 A

1. 在已知条件式中,令$m=0$得$2f(n)=f(3n)$,$n\in\mathbf{Z}^*$.当$n=m=0$时,有$f(0)=0$.又在已知条件式中令$n=m$,得到$f(2n)+f(0)=f(3n)$,即$f(2n)=f(3n)$.于是,一方面对任意$m\in\mathbf{Z}^*$,有$f(4m)=f(6m)=f(9m)$.而另一方面,在已知条件式中,取$n=3m$,得到$f(4m)+f(2m)=f(9m)$.因此,对任意$m\in\mathbf{Z}^*$,都有$f(2m)=0$.于是,对任意$n\in\mathbf{Z}^*$,都有$f(n)=\frac{1}{2}f(3n)=\frac{1}{2}f(2n)=0$,故$f(n)\equiv 0$.这说明所求$f(n)$只当$f(n)\equiv 0$时才满足原条件式.

2. 在已知条件中令$x=y=1$,则得$2f(1)=2[f(1)]^2$,即$f(1)=0$或$f(1)=1$.若$f(1)=0$,则

在已知条件式中令 $y=1$,使得 $f(x)=0$.若 $f(1)=1$,则令 $y=-1$,得 $f(x)+x=(x+1)\cdot f(x)$,即 $x[f(x)-1]=0$,因此,对任意 $x\neq 0$,都有 $f(x)=1$,故 $f(x)=\begin{cases}1,当 x\neq 0时,\\ a,当 x=0时.\end{cases}$,其中 $a\in k$,经验证,它们满足题中条件.

3. 由 $f(\frac{1+x}{x})=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+2x+1-2x}{x}+\frac{1}{x}=(\frac{x+1}{x})^2-\frac{1}{x}=(\frac{x+1}{x})^2-\frac{1+x-x}{x}=(\frac{1+x}{x})^2-(\frac{1+x}{x})+1$,知 $f(x)=x^2-x+1$.

4. 在条件(2)中,令 $n=1$ 得 $f(m+1)+f(m-1)=0$.(*)又用 $m+2$ 代上式中的 m,有 $f(m+3)+f(m+1)=0$.此两式相减,得 $f(m+3)=f(m-1)$,再用 $m+1$ 代这个式中的 m,有 $f(m+4)=f(m)$,即 $f(n)$ 是周期函数,且4为其一个周期.又由(*)式,令 $m=1$,有 $f(2)=-1$,又 $f(1)=0$,在(*)式中令 $m=2$,得 $f(3)=0$,故

$$f(n)=\begin{cases}0,当 n 为奇数;\\ 1,当 n=4k,k\in\mathbf{Z};\\ -1,当 n=4k+2,k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

5. 设 $y=-f(x)$,则 $f(0)=2x+f[f(-f(x))-x]$,即 $f(0)-2x=f[f(-f(x))-x]$ 对所有 x 成立.从而,对任意实数 $f(0)-2x=y$,存在实数 z,使得 $y=f(z)$,即函数 f 是满射.因此,存在实数 a,使得 $f(a)=0$.设 $x=a$,则原函数方程化为 $f(y)=2a+f[f(y)-a]$,即 $f(y)-a=f[f(y)-a]+a$.由于 f 是满射,对于每个实数 x,存在一个实数 y,使得 $x=f(y)-a$,所以,$x=f(x)+a$,即 $f(x)=x-a$ 对所有实数 x 成立.经验证 a 为任意实数,$f(x)=x-a$ 均满足原函数方程.

习题 B

1. 在原条件式中令 $y=1$,得 $f(x)\equiv f(x)\cdot f(1)-f(x+1)+1(x\in\mathbf{Q})$,即 $f(x+1)\equiv f(x)+1$.从而,对所有 $x\in\mathbf{Q},n\in\mathbf{Z}$,有 $f(x+n)=f(x)+n$.因此,$f(n)=f(1)+n-1=n+1$.其实,在原条件式中取 $x=\frac{1}{n},y=n,x\in\mathbf{Z}$,得到 $f(\frac{1}{n}\cdot n)=f(\frac{1}{n})\cdot f(n)-f(\frac{1}{n}+n)+1$,从而 $2=f(\frac{1}{n})(n+1)-f(\frac{1}{n})-n+1$,即 $f(\frac{1}{n})=1+\frac{1}{n}$.最后,取 $x=p,y=\frac{1}{q},p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}$,得到 $f(p\cdot\frac{1}{q})=f(p)\cdot f(\frac{1}{q})-f(p+\frac{1}{q})+1$,由此得 $f(\frac{p}{q})=(p+1)(\frac{1}{q}+1)-\frac{1}{q}-p=\frac{p}{q}+1$.于是,只有函数 $f(x)=x+1$ 满足题设所有条件.

2. 设 f 满足已知条件.当 $x\geqslant 2$ 时,有 $f(x)=f[(x-2)+2]=f[(x-2)\cdot f(2)]\cdot f(2)=0$,所以 $f(x)=0$,若 $0\leqslant x<2$,设 $y\geqslant 2-x$,于是 $x+y\geqslant 2,f(x+y)=0,f[yf(x)]\cdot f(x)=f(y+x)=f(x+y)=0$.又由已知 $f(x)\neq 0$,当 $0\leqslant x<2$ 时,因此,$f(yf(x))=0,yf(x)\geqslant 2,y\geqslant\frac{2}{f(x)}$.这就是说,由 $y\geqslant 2-x$,可得 $y\geqslant\frac{2}{f(x)}$,但由上述推理过程的可逆性,知由 $y\geqslant\frac{2}{f(x)}$ 也可得 $y\geqslant 2-x$,因此,有 $2-x=\frac{2}{f(x)},f(x)=\frac{2}{2-x}(0\leqslant x<2时)$,故满足条件的函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-x},0\leqslant x<2\text{时},\\ 0,\text{当 }x\geqslant 2\text{时}.\end{cases}$$

3. 不存在.事实上,如果存在 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足所有条件,那么由条件(a),存在 $\frac{1}{4}$ 的整数倍 c,使得 $f(x)<c$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立,且 $f(x_0)\geqslant c-\frac{1}{4}$ 对某个 $x_0\in\mathbf{R}$ 成立.

由条件(c)和(b)可知,$f(2)=f(1+\frac{1}{1^2})=f(1)+[f(\frac{1}{1})]^2=2$,因此 $c>2,c-\frac{1}{4}>0$.由 c 和 x_0 的定义及条件(c)可知 $c>f(x_0+\frac{1}{x_0^2})=f(x_0)+[f(\frac{1}{x_0})^2]\geqslant c-\frac{1}{4}+[f(\frac{1}{x_0})]^2$,即 $[f(\frac{1}{x_0})]^2\leqslant\frac{1}{4}$,于是得 $f(\frac{1}{x_0})\geqslant-\frac{1}{2}$.再由 c 和 x_0 的定义及条件(c),得 $c>f(\frac{1}{x_0}+x_0^2)=f(\frac{1}{x_0})+[f(x_0)]^2\geqslant-\frac{1}{2}+(c-\frac{1}{4})^2=-\frac{1}{2}+c^2-\frac{1}{2}c+\frac{1}{16}=c^2-\frac{1}{2}c-\frac{7}{16}$,从而有 $\frac{7}{16}>c^2-\frac{1}{2}c-c=c(c-1\frac{1}{2})>2\cdot\frac{1}{2}=1$,矛盾.故满足题设条件的函数 f 不存在.

4. 令已知条件式为①,在①中令 $x=y=0$,得到 $f(0)=0$.又在①中令 $y=0$ 得到 $f(x^3)=x\cdot[f(x)]^2,x\in\mathbf{R}$,② 将上式改写成 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}\cdot[f(x^{\frac{1}{3}})]^2,x\in\mathbf{R}$,②′ 可见,当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)\geqslant0$,当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)\leqslant0$.令 $S=\{a\mid a>0\text{且}f(ax)=af(x),x\in\mathbf{R}\}$,显然 $1\in S$.下面证明:若 $a\in S$,则 $a^{\frac{1}{3}}\in S$.事实上,若 $a\in S$,则由②式和 S 的定义,有 $ax\cdot[f(x)]^2=af(x^3)=f(ax^3)=f[(a^{\frac{1}{3}}x)^3]=a^{\frac{1}{3}}x\cdot[f(a^{\frac{1}{3}}x)]^2$,约去公因式,有 $[a^{\frac{1}{3}}\cdot f(x)]^2=[f(a^{\frac{1}{3}}x)]^2$,由于 $f(x)$ 与 x 广义同号,$f(a^{\frac{1}{3}}x)$ 与 $a^{\frac{1}{3}}x$ 广义同号,即与 x 广义同号,因此 $a^{\frac{1}{3}}f(x)=f(a^{\frac{1}{3}}x),x\in\mathbf{R}$,③ 即 $a^{\frac{1}{3}}\in S$.

我们接着再证若 $a,b\in S$,则 $a+b\in S$.事实上,若 $a,b\in S$,则利用①②③可得 $f[(a+b)x]=f[(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3]=(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})\cdot\{(f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2-f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})\cdot f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})+[f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})]^2\}=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})\cdot[f(x^{\frac{1}{3}})]^2=(a+b)\cdot f(x),x\in\mathbf{R}$,所以 $a+b\in S$.

因为 $1\in S$,所以 $1+1=2\in S$,依此类推,可知任意自然数 $a\in S$.特别地,有 $1996\in S$,即 $f(1996x)=1996f(x)$.

5. 令已知条件式为①,则在①中取 $x=0$,得 $f(0)f(yf(0)-1)=-f(0)$.

若 $f(0)\neq0$,则由上式得 $f(x)\equiv-1$,不满足①,故必有 $f(0)=0$.

在①中取 $y=0$,得 $f(x)f(-1)=-f(x)$,即 $f(x)[f(-1)+1]=0$.

若 $f(-1)+1\neq0$,则由上式得 $f(x)\equiv0$,它满足①.下面考虑剩下的情形.

若 $f(-1)+1=0$,则 $f(-1)=-1$. ②

设对某些 $a\in\mathbf{R}$,有 $f(a)=0$,则在①中取 $x=a,y=-1$,得 $a^2f(-1)=0$,有 $a=0$,即只有 $a=0$ 时,才有 $f(a)=0$. ③

在①中取 $x=y=1$,得 $f(1)f[f(1)-1]=0$.

所以，$f(f(1)-1)=0$，从而，$f(1)-1=0$，即 $f(1)=1$. ④

在 ① 中取 $x=1$，得 $f(y-1)=f(y)-1$. ⑤

由 ① 和 ⑤ 得 $f(x)f(yf(x))-f(x)=x^2f(y)-f(x)$，即 $f(x)f(yf(x))=x^2f(y)$. ⑥

在 ⑥ 中取 $x=-1$，得 $-f(-y)=f(y)$， ⑦

在 ⑥ 中取 $y=1$，得 $f(x)f(f(x))=x^2$. ⑧

所以，$f(yf(x))=\dfrac{x^2}{f(x)}\cdot f(y)=f(f(x))f(y)\quad(\forall x\neq 0)$，

即 $f(f(x)y)=(f(x))f(y)\quad(\forall x、y\in\mathbf{R})$. ⑨

在 ⑥ 中令 $x=y\neq 0$（利用 ③），得 $f(xf(x))=x^2\quad(\forall x\neq 0)$.

所以，$f(xf(x))=x^2\quad(\forall x\in\mathbf{R})$. ⑩

由 ⑩ 和 ⑦ 得函数 f 的值域是 $\mathbf{R}$（即 $f(x)$ 取遍 $\mathbf{R}$）. ⑪

由 ⑪ 和 ⑨ 得 $f(yz)=f(y)f(z)\quad(\forall y、z\in\mathbf{R})$. ⑫

在 ⑫ 中用 $z+1$ 代替 z 得 $f(yz+y)=f(y)f(z+1)$，

再由 ⑤ 和 ⑫ 得 $f(yz+y)=f(y)(f(z)+1)=f(y)f(z)+f(y)=f(yz)+f(y)$.

在上式中令 $y\neq 0,z=\dfrac{x}{y}$，得 $f(x+y)=f(x)+f(y)\quad(\forall y\neq 0)$.

从而，$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad(\forall x、y\in\mathbf{R})$. ⑬

在 ⑩ 中用 $x+1$ 代替 x，并利用 ⑬ 和 ⑧ 得

$f(xf(x)+f(x)+x+1)=x^2+2x+1$，

$f(xf(x))+f(f(x))+f(x)+1=x^2+2x+1,x^2+\dfrac{x^2}{f(x)}+f(x)=x^2+2x+1$，

即 $\dfrac{x^2}{f(x)}+f(x)=2x\quad(x\neq 0)$，故 $x^2+f^2(x)=2xf(x)\quad(\forall x\in\mathbf{R})$，即 $(x-f(x))^2=0$.

于是，$f(x)=x\quad(\forall x\in\mathbf{R})$.

综上所述，本题的解为（检验是显然的）：

$f(x)=0\quad(\forall x\in\mathbf{R})$ 及 $f(x)=x\quad(\forall x\in\mathbf{R})$.

第九章　数列项的求值与通项公式的求解

习题 A

1. 令 $y_n=\sqrt{b^2+4ax_n}$，则 $y_0=b,x_n=\dfrac{y_n^2-b^2}{4a}$，从而，有 $y_{n+1}^2=(y_n+2a)^2$，而 $y_n>0$，则 $y_{n+1}-y_n=2a$. 故 $\{y_n\}$ 是公差为 $2a$ 的等差数列. 由此推得 $y_{n+1}=y_0+2an=2an+b$. 故 $x_n=\dfrac{y_n^2-b^2}{4a}=an^2+bn$.

2. 由 $a_1>0,a_{n+1}=10\sqrt{a_n}$，两边取对数，得 $\lg a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}\lg a_n$. 令 $x_n=\lg a_n$，则 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+1$，$x_n=\dfrac{1}{2}x_{n-1}+1$. 两式相减，得 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}(x_n-x_{n-1})$，且 $x_2-x_1=\dfrac{1}{2}$. 从而 $x_{n+1}=x_1+\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-$

$x_k) = 1 + 1 - (\frac{1}{2})^n = 2 - (\frac{1}{2})^n$.故 $a_n = 10^{2-(\frac{1}{2})^{n-1}}$.

3. 用数学归纳法可以证明 $a_n = \frac{1}{n!}, n = 2,3,\cdots$① 事实上,当 $n = 2$ 时,由递推公式及 $a_0 = 1$, $a_1 = 2$,立即可知 $a_2 = \frac{1}{2}$.若 $n \leqslant k$ 时,① 式成立,其中 $k \geqslant 2$,则由 $k(k+1)a_{k+1} = k(k-1)a_k - (k-2)a_{k-1} = k(k-1)\cdot\frac{1}{k!} - (k-2)\frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!}$,可得 $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$,从而当 $n = k+1$ 时,① 式成立.由 ① 可知,$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{50}}{a_{51}} = \frac{1}{2} + 4 + 3 + \cdots + 51 = 1327\frac{1}{2}$.

4. 由于每行数都成等差数列,且 $a_{42} = \frac{1}{8}, a_{43} = \frac{3}{16}$,所以第四行数的公差为 $\frac{1}{16}$,同时 $a_{4k} = \frac{k}{16}$, $k = 1,2,3,4,\cdots,n$.再由每列数成等比数列,且所有公比相等,利用 $a_{24} = 1, a_{44} = \frac{1}{4}$,可知共同的公比为 $\frac{1}{2}$.于是可得 $a_{kk} = (\frac{1}{2})^{k-4}\cdot\frac{k}{16}, k = 1,2,\cdots,n$.由此可知 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum\limits_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^k$.记 $S = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$,则 $\frac{S}{2} = \sum\limits_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^{k+1} = \sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)(\frac{1}{2})^k + n(\frac{1}{2})^{n+1}$,从而 $\frac{S}{2} = S - \frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=2}^{n}(\frac{1}{2})^k - n(\frac{1}{2})^{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$.于是 $S = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

习题 B

1. 会有. 事实上, 记已给的数列为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 对于 $n = 1,2,\cdots$ 令

$$b_n = \begin{cases} a_n, a_n < 10^3, \\ a_n \text{ 的末尾四位数}, a_n \geqslant 10^3. \end{cases}$$

显然,$0 \leqslant b_n < 10^4$,且 $b_n \equiv b_{n-1} + b_{n-2} (\mathrm{mod} 10^4), n = 3,4,\cdots$① 考虑有序数列 $(b_1, b_2), (b_2, b_3), \cdots, (b_{10^8}, b_{10^8+1})$,由抽屉原理可知存在 $1 \leqslant k < m \leqslant 10^8$,使得 $b_k = b_m, b_{k+1} = b_{m+1}$.记 $l = m - k$,由 ① 和一切 b_n 满足 $0 \leqslant b_n < 10^4$ 可得 $b_n = b_{n+l}, n = 1,2,3,\cdots$ 由于 $1 \leqslant l \leqslant 10^8 - 1$,所以存在 l 使得 $18 \leqslant 1 + l \leqslant 10^8$ 且 $b_{1+l} = b_1 = 0$.因为当 $n \geqslant 18$ 时,$a_n > 10^3$,从而 a_{1+l} 的末尾四位数全为 0.

2. 由 $S_n = 2a_n - 1$ 可知,$a_1 = 2a_1 - 1$,得 $a_1 = 1$.又 $a_k = S_k - S_{k-1} = (2a_k - 1) - (2a_{k-1} - 1) = 2a_k - 2a_{k-1}$,所以 $a_k = 2a_{k-1}$.可见,数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1,公比为 2 的等比数列.由 $b_{k+1} = a_k + b_k$,可得 $b_2 = a_1 + b_1, b_3 = a_2 + b_2, \cdots, b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$,将这一组等式相加,$b_n = S_{n-1} + b_1 = \frac{2^{n-1}}{2-1} + 3 = 2^{n-1} + 2$,所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S'_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} + 2n = 2^n + 2n - 1$.

第十章　数列一般项性质问题的求解

习题 A

1. 用数学归纳法易证 $a_n > 0, n = 1,2,3,\cdots$ 对于 $n \geqslant 3$,由递推公式可得 $a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 2, a_{n+1}\cdot$

$a_{n-1}=a_n^2+2$. 于是 $a_{n+1}a_{n-1}-a_na_{n-2}=a_n^2-a_{n-1}^2$,即 $\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}$, $n=3,4,\cdots$. 依此递推可得 $\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_3+a_1}{a_2}$. 又 $a_3=3$,所以 $a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}$, $n=2,3,\cdots$ 由于 $a_1=a_2=1$,用数学归纳法易证对任何自然数 n, a_n 都是正整数.

2. 由 77 与 100 互素,令 $k\cdot 77\equiv b_k\pmod{100}$,则 $B\equiv\{b_k\mid k=1,2,\cdots,100\}$ 是模 100 的完全剩余类,即 $B=\{0,1,2,\cdots,99\}$. 将 $b_1,b_2,\cdots,b_{100}$ 按脚标递增的顺序依次顺时针方向排列在圆周上,于是数列 $a_0,a_1,a_2\cdots$ 中每一项的末两位数都对应圆周上的一个数. 因数列中每相邻两项或差 77,或差 54, $2\times 77\equiv\pmod{100}$,故数列中每相邻两项在圆周上所对应的数或相邻,或只间隔一个数,即圆周上每两个相邻的数中都至少有一个是数列中某一项的末两位数,既然 $b_{100}=00$ 与 $b_1=77$ 在圆周上相邻,故在所说数列中必有某项的末两位或均为 0 或均为 7.

3. 问题即证明存在两个自然数 u、v,使得 $x_n=x_ux_v$.

设 $\frac{n}{n+a}=\frac{u}{u+a}+\frac{v}{v+a}\ (u\leqslant v)$,则 $v=\frac{nu+na}{u-n}$. ①

因 $nu+na$ 都是正数,故 $u>n$. 令 $p=u-n$,则 $p\in\mathbf{N}$,代入 ① 整理得

$v=n+\frac{n(n+a)}{p}$. 欲使 u、v 存在,必须 p 是 $n(n+a)$ 的因子. 由 $u\leqslant v$ 知

$u=n+p\leqslant v=n+\frac{n(n+a)}{p}$,整理得 $p^2\leqslant n(n+a)$,即

$p\leqslant\sqrt{n(n+a)}$.

因此,当 p 是 $n(n+a)$ 的因子且 p 不大于 $\sqrt{n(n+a)}$ 时,满足条件的 u、v 存在. 因为 $p=1$ 总满足上述条件,故 x_n 总可表示为其他两项的乘积.

由 $v_0=0$, $v_1=1$ 及 $v_{n+1}=8v_n-v_{n-1}$ 得 $v_{n+1}\equiv 8v_n-v_{n-1}\pmod{15}$. 据此可以得到下表:

v_n	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
$v_n\pmod{15}$	0	1	8	3	1	5	9	7	2	9	10
v_n	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}	v_{20}	v_{21}
$v_n\pmod{15}$	11	3	13	11	0	4	2	12	4	5	6
v_n	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}	v_{26}	v_{27}	v_{28}	v_{29}	v_{30}	v_{31}	…
$v_n\pmod{15}$	13	8	6	10	14	12	7	14	0	1	…

则 $v_n\pmod{15}$ 是一个以 30 为循环周期的数列,其中 $v_0\pmod{15}=0$, $v_{15}\pmod{15}=0$. 故在数列 $\{v_n\}$ 中存在被 15 整除的项,且有无穷多项.

习题 B

1. 若第一项为一位数，则第二项以后均为 0，显然成立.

若第一项为 n 位数，下面证明该数列的各项不可能进位.

假设可以进位，则一定在奇数项进位，设为第 $2k+1$，则第 $2k$ 项为$\underbrace{999\cdots9}_{(n-1)个}t$.

对 t 进行讨论：因$\underbrace{999\cdots9}_{(n-1)个}t$是由第 $2k-1$ 项的数减去一个数得到的.

（ⅰ）若减数为 9，则必有 $t=0$，否则第 $2k$ 项会形成$\underbrace{999\cdots9}_{(n-2)个}8s$ 的形式，与假设矛盾. 故第 $2k$ 项为 $99\cdots90$，而第 $2k+1$ 项不可能进位，矛盾.

（ⅱ）若减数不为 9，设第 $2k-1$ 项为 $99\cdots9m$，则一定是减 m. 故第 $2k$ 项仍为 $99\cdots90$，而第 $2k+1$ 项不可能进位，矛盾.

综上所述，对任一数列，每项的位数只减不增，故必存在一个数出现无穷多次.

2. 以 $M(m)$ 表示 m 的倍数. 由 $f_1-ab=1-ab=M(m)$ 知 m 与 ab 互素. 又由此减去 $f_2-2ab^2=1-2ab^2=M(m)$ 得

$2ab^2-ab=ab(2b-1)=M(m)$.

由 ab 与 m 互素可知 $2b-1=M(m)$. ①

当 $n>2$ 时，$f_n-anb^n=f_{n-1}+f_{n-2}-anb^n$

$=f_{n-1}-(n-1)ab^{n-1}+(n-1)ab^{n-1}+f_{n-2}-(n-2)ab^{n-2}+(n-2)ab^{n-2}-anb^n$

$=M(m)+(n-1)ab^{n-1}+M(m)+(n-2)ab^{n-2}-anb^n$

$=M(m)+ab^{n-2}[(n-1)b+n-2-nb^2]=M(m)$. 由此知

$(n-1)b+n-2-nb^2=M(m)$. ②

② $\times 4$ 得 $4(n-1)b+4n-8-4nb^2=$

$2(n-1)(2b-1)-n(4b^2-1)+5n-10=M(m)+5(n-2)=M(m)$.

因 $n-2$ 为任意自然数，故只有 $m=5$ 适合. 再由 ①，$2b-1=M(5)$. 由 $0<b<5$ 知 $b=3$. 又由 $1-ab=1-3a=M(5)$，$0<a<5$ 得 $a=2$.

以下只须用数学归纳法证明对任意自然数 n，$f_n-2n\cdot3^n$ 能被 5 整除即可（略）.

3. (1) 取 $x_1=x_2=\cdots=x_m=1$，由 $x_ix_{m+i}=x_{i+1}x_{m+i-1}+1(1\leqslant i\leqslant m)$，有

$x_{m+i}=x_{m+i-1}+1(1\leqslant i\leqslant m-1)$，$x_{2m}=x_{m+1}x_{2m-1}+1$.

于是，$x_{m+1}=x_m+1=2$，有 $x_{k+m}=k+1(1\leqslant k\leqslant m-1)$.

又 $x_{2m}=2m+1$，故一组特解为 $x_i=1(1\leqslant i\leqslant m)$，

$x_{m+i}=i+1(1\leqslant i\leqslant m)$，$x_{2m}=2m+1$.

(2) $(x_1x_{m-1}+1)(x_mx_{2m}-1)$

$=x_1x_{m-1}(x_mx_{2m}-1)+x_mx_{2m}-1$

$=x_1x_{m-1}x_{m+1}+x_{2m-1}+x_mx_{2m}-1$

$=(x_2x_m+1)x_{m-1}x_{2m-1}+x_mx_{2m}-1$

$=(x_2x_m+1)(x_mx_{2m-2}+1)+x_mx_{2m}-1$

$= x_m(x_2x_mx_{2m-2} + x_2 + x_{2m-2} + x_{2m})$.

当 $x_m \neq 0$ 时，$x_m \mid (x_{m-1}+1)$，于是有 $x_0 = \dfrac{x_1x_{m-1}+1}{x_m} \in \mathbf{Z}$.

当 $x_m = 0$ 时，$x_1x_{m-1} = -1$. 而 $x_0x_m = x_1x_{m-1}+1$ 对所有整数 x_0 成立，故由 $x_1, x_2, \cdots, x_{2m}$ 出发，可求出 x_0，对 $x_0, x_1, \cdots, x_{2m-1}$ 适合一样的关系，由数学归纳法知结论成立.

4. 假设存在 α 及 $\{a_n\}$ 满足条件，则有

$a_n(1+\frac{1}{n}) > a_n(1+\frac{\alpha}{n}) \geqslant 1 + a_{n+1}$，即 $a_n > \frac{n}{n+1}(1+a_{n+1})$. ①

从而，$a_n > n \times \frac{1}{n+1}$. 若有 $k \leqslant n$ 满足 ②

$a_k > k \times (\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n+1})$, ③

则由 ①、② 知 $a_{k-1} > \frac{k-1}{k}(1+a_k) = \frac{k-1}{k} + \frac{k-1}{k}\cdot a_k > (k-1)\times(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n+1})$.

于是，③ 对于所有 $\leqslant n$ 的 k 均成立，特别地有 $a_1 > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$. ④

因 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}n$,

当 n 无限增大时，④ 的右端趋于无穷，矛盾. 故满足题设条件的 α 不存在.

5. 不妨设 $A_i(1 \leqslant i \leqslant 29)$ 中的元素均不超过 1988，每个集合中元素个数 $N_i(1988) \geqslant \frac{1988}{\mathrm{e}} = 731.3\cdots$ 即 $|A_i| \geqslant 732$. 不妨设 $|A_j| = 732$（否则在此集合中去掉若干元素），$1 \leqslant i \leqslant 29$.

考虑下面元素与集合的表：

集合 \ 元素	1	2	3	$\cdots$	1988
A_1	$n_{1,1}$	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$	$\cdots$	$n_{1,1988}$
A_2	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$	$n_{2,3}$	$\cdots$	$n_{2,1988}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
A_{29}	$n_{29,1}$	$n_{29,2}$	$n_{29,3}$	$\cdots$	$n_{29,1988}$

其中 $n_{i,j} = \begin{cases}1, j \in A_i, \\ 0, j \notin A_i,\end{cases}$ 表中每行之和为 732，故总和为 732×29.

又设第 j 列和为 $b_j(1 \leqslant j \leqslant 1988)$，则 $\sum\limits_{j=1}^{1988} b_j = 732 \times 29$. ①

而 $\sum\limits_{j=1}^{1988} C_{b_j}^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 29} |A_i \cap A_j|$. ②

由 Cauchy 不等式，有 $\sum\limits_{j=1}^{1988} C_{b_j}^2 = \frac{1}{2}(\sum b_j^2 - \sum b_j)$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1988}\left(\sum b_j\right)^2 - \sum b_j\right] = \frac{1}{2}\left(\sum b_j\right) \times \left(\frac{\sum b_j}{1988} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 732 \times 29 \times \left(\frac{732 \times 29}{1988} - 1\right) > \frac{1}{2} \times 29 \times 28 \times 200,$$

即 $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 29} |A_i \cap A_j| > \frac{1}{2} \times 29 \times 28 \times 200$.

此不等式左边有 C_{29}^2 项,其中至少有一项 $|A_i \cap A_j| > 200$,结论成立.

第十一章　数列不等式的证明

习题 A

1. 由 $a_1 = 5$ 及递推公式,可得 $a_n > 0$.递推公式可以写成 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + \frac{16}{a_n} + 8)$.

又因 $a_n > 0, \frac{16}{a_n} > 0$,有 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + \frac{16}{a_n} + 8) \geqslant \frac{1}{4}(2\sqrt{a_n \cdot \frac{16}{a_n}} + 8) = 4$,故 $a_{n+1} \geqslant 4$.

又 $a_1 = 5 > 4$,则 $a_n \geqslant 4(n = 1,2,\cdots)$.

2. 对递推式的变形,可通过裂项求和法变成"连续相差"的形式.

由题设可得,$2(k+1)a_{k+1} = (2k-1)a_k$,有 $-a_k = 2[(k+1)a_{k+1} - ka_k]$.

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\sum_{k=1}^{n}[(k+1)a_{k+1} - ka_k] = 2[(n+1)a_{n+1} - a_1],$$

即 $1 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2(n+1)a_{n+1}$.

易知,对一切 $n \in \mathbf{N}, a_n > 0$,故 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k < 1$.

3. 由递推式有 $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} + 2, x_n > 0$ 且 $x_{n+1} > x_n$.于是,

$$x_{n+1}^2 = x_0^2 + \sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}^2 - x_k^2) = x_0^2 + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{x_k^2} + 2\right) = 25 + 2(n+1) + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k^2}.$$

取 $n = 999$,则 $x_{1000}^2 = 25 + 2000 + \sum\limits_{k=0}^{999}\frac{1}{x_k^2} > 45^2$.

又 $x_{1000}^2 = 2025 + \sum\limits_{k=0}^{99}\frac{1}{x_k^2} + \sum\limits_{k=100}^{999}\frac{1}{x_k^2} < 2025 + \frac{100}{x_0^2} + \frac{900}{x_{100}^2}2033 < 45.1^2$

(其中,$x_{100}^2 = 25 + 200 + \sum\limits_{k=0}^{99}\frac{1}{x_k^2} > 225$),故 $45 < x_{1000} < 45.1$.

4. 由题设知 $a_2 = 2, a_n > 0$. $n = 1$ 时,$\frac{1}{a_1} = 1 > 2(\sqrt{2} - 1)$,命题成立.

当 $n \geqslant 2$ 时,由 $a_n a_{n+1} = n + 1$,得 $a_{n-1}a_n = n$.

所以,$a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) = 1$,故$\frac{1}{a_n} = a_{n+1} - a_{n-1}$,

从而,有$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_1}+\sum\limits_{k=2}^{n}(a_{k+1}-a_{k-1})=a_{n+1}+a_n-2\geqslant 2\sqrt{a_na_{n+1}}-2=2(\sqrt{n+1}-1)$.

5. 当 $k>1$ 时,$a_k^2=a_{k-1}^2+2+\frac{1}{a_{k-1}^2}$,且 $a_k>1$.

从而,$a_{k-1}^2+2<a_k^2\leqslant a_{k-1}^2+3$,$k=2,3,\cdots,n$,其中仅当 $k=2$ 时等号成立.

注意到 $a_1=1$,对上式求和,得 $2n-1<a_n^2<3n-2$,

故$\sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}(n\geqslant 2)$.令 $n=100$,可得 $14<a_{100}<18$.

6. 由$\sqrt{k-1}<\sqrt{k}<\sqrt{k+1}$,可得$\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$,

即 $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$.

求和可得 $2\sum\limits_{k=2}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2(\sqrt{81}-1)=16$,

$1+2\sum\limits_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=1+2(\sqrt{80}-1)=2\sqrt{80}-1<17$.

问题得证.

7. 显然,对 $n\in\mathbf{N}$,均有 $a_n>0$.根据递推关系的结构特征,令 $a_n=\tan\alpha_n$,$\alpha_n\in(0,\frac{\pi}{2})$.

由已知条件有 $a_n=\tan\alpha_n=\tan\frac{\alpha_{n-1}}{2}$.因 $a_0=1=\tan\frac{\pi}{4}$,故 $a_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

由于当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$\tan x>x$.所以,$a_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}>\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

8. 欲证 $a_1+a_2+\cdots+a_n<$ (或 $>$) b_n,只要证明 $a_1<$ (或 $>$) b_1,且 $a_k<$ (或 $>$) b_k-b_{k-1} · $(k\geqslant 2)$ 即可.

设 $a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$,$b_n=2(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$.则 $b_1=2(1-\frac{1}{\sqrt{2}})=2-\sqrt{2}>\frac{1}{2}=a_1$.

又 $k\geqslant 2$ 时,$b_k-b_{k-1}=2(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}})-2(1-\frac{1}{\sqrt{k}})$

$$=\frac{2}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}>\frac{2}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1})}$$

$$=\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}=a_k.$$

故 $b_n=b_1+\sum\limits_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})>a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

习题 B

1. 令 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}$.下面建立关于 a_n 的递推关系,然后证明结论.

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{n+1-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}\right),$$

即 $a_{n+1}=\frac{n+1}{2n}\cdot a_n+\frac{n+1}{n}$.又 $a_2=\sum_{k=1}^{2-1}\frac{2}{2-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}=2$,

同理可得 $a_3=3,a_4=\frac{10}{3},a_5=\frac{10}{3}$.

设 $a_k\leqslant\frac{10}{3}(k\geqslant 5)$.则当 $k\geqslant 5$ 时,

$$a_{k+1}=\frac{k+1}{2k}\cdot a_k+\frac{k+1}{k}$$

$$\leqslant\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{10}{3}+\frac{k+1}{k}=\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)\leqslant\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{5}\right)<\frac{10}{3}.$$

问题得证.

2. 根据条件 $\sum_{i=1}^{k}a_i\leqslant 1$,若有某个 $a_k<a_{k-1}$,则 $a_{k-1}\leqslant a_k-a_{k+1}+a_{k-2}<a_{k+2}$,从而自 a_k 起,数列 $\{a_n\}$ 单调递增,和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 将随 n 的增加而趋于无穷,不可能永远小于 1.

所以,$\{a_n\}$ 是单调递减的,即 $a_k-a_{k+1}\geqslant 0$.

令 $b_k=a_k-a_{k-1}$,则由 $a_k-2a_{k+1}+a_{k+2}\geqslant 0$ 可得 $b_k\geqslant b_{k-1},b_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots$

又由于 $1\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_k=(b_1+a_2)+a_2+\cdots+a_k$

$$=b_1+2a_2+\cdots+a_k=b_1+2b_2+3a_3+\cdots+a_k$$

$$=\cdots\geqslant b_1+2b_2+\cdots+kb_k\geqslant(1+2+\cdots+k)b_k=\frac{k(k+1)}{2}\cdot b_k.$$

故 $b_k\leqslant\frac{2}{k(k+1)}<\frac{2}{k^2}$.命题成立.

3. 用数学归纳法易证 $x_n>\sqrt{2},n=0,1,2,\cdots$ ①

由递推公式,得 $0<x_n-\sqrt{2}=\frac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_{n-1}}-\sqrt{\frac{2}{x_{n-1}}}\right)^2=\frac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1}-\sqrt{2})^2$,再由

① 得 $0<x_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2\sqrt{2}}(x_{n-1}-\sqrt{2})^2,n=1,2,3,\cdots$ ②

注意到 $0<\frac{x_{n-1}-\sqrt{2}}{x_{n-1}}<1$,可得另一种估计 $0<x_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(x_{n-1}-\sqrt{2}),n=1,2,3,\cdots$ ③

从 ③ 可递推得,$0<x_{30}-\sqrt{2}<\frac{1}{2^{30}}(x_0-\sqrt{2})<\frac{10^9}{2^{30}}$.由于 $10^9<2^{30}$,所以 $0<x_{30}-\sqrt{2}<1$.利用

② 递推得 $0<x_{36}-\sqrt{2}<\frac{1}{2\sqrt{2}}(x_{35}-\sqrt{2})^2<\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{1+2}(x_{34}-\sqrt{2})^4<\cdots<\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{1+2+4+8+16+32}(x_{30}-\sqrt{2})$,

即 $0<x_{36}-\sqrt{2}<\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{63}$.显然 $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{63}<10^{-9}$,从而要证之不等式成立.

第十二章 不等式证明中的变形技巧

习题 A

1. 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$，有 $\frac{x_k}{1+x_k^2} - \frac{1}{1+x_k} = \frac{x_k - 1}{(1+x_k^2)(1+x_k)}$.

若 $x_k \geqslant 1$，则 $(1+x_k^2)(1+x_k) \geqslant 4$，若 $x_k < 1$，则 $(1+x_k^2)(1+x_k) < 4$. 于是，无论何种情况，有 $\frac{x_k-1}{(1+x_k^2)(1+x_k)} \leqslant \frac{x_k-1}{4}$. 由此可得 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{1+x_k^2} - \frac{1}{1+x_k}\right) \leqslant \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1) = 0$，故原不等式成立.

2. 由于 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2+a_kb_k-a_kb_k}{a_k+b_k} = \sum_{k=1}^{n}a_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}$. 又 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k} \leqslant \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+b_k)^2}{a_k+b_k} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$，所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$.

3. 由轮换对称性，不妨设 $x_1 = \min\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，记 $x_{5+k} = x_k$，$k = 1,2,3,4,5$. 由于 $(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2 - 4\sum_{k=1}^{5}x_kx_{k+1} = \sum_{k=1}^{5}x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{5}x_kx_{k+1} + 2\sum_{k=1}^{5}x_kx_{k+2} = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 - 4x_1x_5 + 4x_1x_4 + 4x_2x_5 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 + 4(x_2 - x_1)x_5 + 4x_1x_4 > 0$，所以原不等式成立.

4. 由于 $\frac{1}{1+a_ia_{i+1}} - \frac{1}{1+a_i^2} = \frac{a_i(a_i - a_{i+1})}{(1+a_ia_{i+1})(1+a_i^2)}$,

$\frac{1}{1+a_ia_{i+1}} - \frac{1}{1+a_{i+1}^2} = \frac{a_{i+1}(a_{i+1} - a_i)}{(1+a_ia_{i+1})(1+a_{i+1}^2)}$,

所以 $\frac{2}{1+a_ia_{i+1}} - \frac{1}{1+a_i^2} - \frac{1}{1+a_{i+1}^2} = \frac{a_i - a_{i+1}}{1+a_ia_{i+1}}\left(\frac{a_i}{1+a_i^2} - \frac{a_{i+1}}{1+a_{i+1}^2}\right) = \frac{(a_i - a_{i+1})^2(1-a_ia_{i+1})}{(1+a_ia_{i+1})(1+a_i^2)(1+a_{i+1}^2)} \geqslant 0$. 于是得到 $2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_ia_{i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_{i+1}^2+1} = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}$，即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_ia_{i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^2}$.

5. **证法 1** 设 $y_i = \frac{1}{1+x_i}$，则 $x_i = \frac{1-y_i}{y_i}$ $(i = 1,2,\cdots,5)$，且 $\sum_{i=1}^{5}y_i = 1$.

所以 $\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{y_i - y_i^2}{5y_i^2 - 2y_i + 1} \leqslant 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{5y_i - 5y_i^2}{5y_i^2 - 2y_i + 1} \leqslant 5 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{3y_i + 1}{5y_i^2 - 2y_i + 1} - 1\right) \leqslant 5 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{3y_i + 1}{5(y_i - \frac{1}{5})^2 + \frac{4}{5}} \leqslant 10$,

而 $\sum_{i=1}^{5}\frac{3y_i+1}{5(y_i - \frac{1}{5})^2 + \frac{4}{5}} \leqslant \sum_{i=1}^{5}\frac{3y_i+1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\times\sum_{i=1}^{5}(3y_i + 1) = \frac{5}{4}\times(3+5) = 10$.

故原不等式获证.

证法 2 令 $f(x) = \frac{x}{4+x_2}$ $(x \geqslant 0)$，则由柯西不等式有 $(4+x^2)(\frac{1}{4}+1) \geqslant (1+x)^2$,

即$\frac{1}{4+x^2} \leqslant \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$.

从而$f(x)=\frac{x}{4+x^2} \leqslant \frac{5}{4} \cdot \frac{x}{(1+x)^2}=\frac{5}{4}[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}]$.

又$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{25} \geqslant \frac{2}{5} \cdot (\frac{1}{1+x})$,则$-\frac{1}{(1+x)^2} \leqslant \frac{1}{25}-\frac{2}{5} \cdot (\frac{1}{1+x})$,

于是$f(x)=\frac{x}{4+x^2} \leqslant \frac{5}{4}[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{25}-\frac{2}{5(1+x)}]=\frac{5}{4}[\frac{3}{5(1+x)}+\frac{1}{25}]$,

故$\sum_{i=1}^{5} f(x_i) \leqslant \frac{5}{4} \sum_{i=1}^{5}[\frac{3}{5(1+x_i)}+\frac{1}{25}]=\frac{3}{4} \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{1+x_i}+\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{5}=1$.

6. 设$abc=k^3$,令$a=\frac{kx}{y}, b=\frac{ky}{z}, c=\frac{kz}{x}(x, y, z, k \in \mathbf{R}^+)$,则所证不等式$\Leftrightarrow \frac{xy}{yz+kzx}+\frac{yz}{zx+kxy}+\frac{zx}{xy+kyz} \geqslant \frac{3k}{1+k^3}$. 由排序不等式得

上式左$\geqslant \frac{3}{1+k} \geqslant \frac{3k}{1+k^3}$,故原不等式获证.

7. 设$a=\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}, b=\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}, c=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$,则$a^2=\frac{x^2}{y^2+z^2}, \frac{a^2}{1+a^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$,同理得$\frac{b^2}{1+b^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}, \frac{c^2}{1+c^2}=\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$,

原命题可转化为“已知$a, b, c \in \mathbf{R}^+$,且$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1$,求证:$a+b+c>2$”.

因为$\frac{a}{2} \geqslant \frac{a^2}{1+a^2}, \frac{b}{2} \geqslant \frac{b^2}{1+b^2}, \frac{c}{2} \geqslant \frac{c^2}{1+c^2}$,

所以$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2} \geqslant 1$,即$a+b+c \geqslant 2$.

又易知上等式取等号的充要条件为$a=b=c$,而此时$a=b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}, a+b+c=\frac{3\sqrt{2}}{2}>2$,故等号不成立,所以$a+b+c>2$.

8. 设$x=\frac{a}{a-b}, y=\frac{b}{b-c}, z=\frac{c}{c-a}$,则$(x-1)(y-1)(z-1)=\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}=xyz$,将上式展开整理得$x+y+z=xy+yz+zx+1$,

所以$(\frac{2a-b}{a-b})^2+(\frac{2b-c}{b-c})^2+(\frac{2c-a}{c-a})^2$

$=(1+x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2=3+x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)$

$=3+x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx+1)=5+(x+y+z)^2 \geqslant 5$,故原不等式获证.

9. 设$d=a_i-a_{i-1}$,注意到,当$k>1$时,$a_k^2 \geqslant a_k^2-d^2=(a_k+d)(a_k-d)=a_{k+1} \cdot a_{k-1}$,则

$\frac{1}{a_k^2} \leqslant \frac{1}{a_{k+1}a_{k-1}}=\frac{1}{a_{k+1}-a_{k-1}} \cdot (\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_{k+1}})=\frac{1}{2d}(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_{k+1}})$,

故$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{a_k^2} \leqslant \frac{1}{2d} \sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_{k+1}})=\frac{1}{2d}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$

$$= \frac{1}{2d} \cdot \frac{a_2 a_n a_{n+1} + a_1 a_n a_{n+1} - a_1 a_2 a_{n+1} - a_1 a_2 a_n}{a_1 a_2 a_n a_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2d} \cdot \frac{a_1 a_n (a_{n+1} - a_2) + a_2 a_{n+1} (a_n - a_1)}{a_1 a_2 a_n a_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2d} \cdot \frac{(n-1)d(a_1 a_n + a_2 a_{n+1})}{a_1 a_2 a_n a_{n+1}} = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{a_1 a_n + a_2 a_{n+1}}{a_1 a_2 a_n a_{n+1}}.$$

10. 当 $n = 1$ 时，$(a_2 - a_1)^2 = 1$，故 $a_2 - a_1 = \pm 1$，此时所求最大值为 1.

当 $n \geqslant 2$ 时，设 $x_1 = a_1, x_{i+1} = a_{i+1} - a_i, i = 1,2,\cdots,2n-1$，则

$\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 = 1$，且 $a_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, k = 1,2,\cdots,2n$. 由柯西不等式得

$$(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

$$= n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nx_{n+1} + (n-1)x_{n+2} + \cdots + x_{2n} - [nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + x_n]$$

$$= x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n + nx_{n+1} + (n-1)x_{n+2} + \cdots + x_{2n}$$

$$\leqslant [1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1]^{\frac{1}{2}} (x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[n^2 + 2 \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}.$$

当 $a_k = a_1 + \dfrac{\sqrt{3}k(k-1)}{2\sqrt{n(2n^2+1)}}, k = 1,2,\cdots,n+1$.

$a_{n+k+1} = a_1 + \dfrac{\sqrt{3}[2n^2 - (n-k)(n-k-1)]}{2\sqrt{n(2n^2+1)}}, k = 1,2,\cdots,n-1$ 时，上述不等式等号成立，

所以 $(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 的最大值为 $\sqrt{\dfrac{n(2n^2+1)}{3}}$.

11. 只须对任意 $1 \leqslant k \leqslant n$，证明 $a_k^2 \leqslant \dfrac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})^2$.

记 $d_k = a_k - a_{k+1}, k = 1,2,\cdots,n-1$，则

$a_k = a_k, a_{k+1} = a_k - d_k, a_{k+2} = a_k - d_k - d_{k+1}, \cdots, a_n = a_k - d_k - d_{k+1} - \cdots - d_{n-1}$,

$a_{k-1} = a_k + d_{k-1}, a_{k-2} = a_k + d_{k-1} + d_{k-2}, \cdots, a_1 = a_k + d_{k-1} + d_{k-2} + \cdots + d_1$,

将这 n 个式子相加，并利用已知等式可得

$na_k - (n-k)d_k - (n-k-1)d_{k+1} - \cdots - d_{n-1} + (k-1)d_{k-1} + (k-2)d_{k-2} + \cdots + d_1 = 0$，由柯西不等式可得

$$(na_k)^2 = [(n-k)d_k + (n-k-1)d_{k+1} + \cdots + d_{n-1} - (k-1)d_{k-1} - (k-2)d_{k-2} - \cdots - d_1]^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-k} i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right) \leqslant \frac{n^3}{3}\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right),$$

所以 $\quad a_k^2 \leqslant \dfrac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})^2$.

12. 令 $g(0)=-\sum_{i=1}^{n}x_i, g(k)=\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{n}x_i(1\leqslant k\leqslant n-1), g(n)=\sum_{i=1}^{n}x_i$,则

$|g(1)-g(0)|=2|x_1|=2, |g(k+1)-g(k)|=2|x_{k+1}|\leqslant 2, k=1,2,\cdots,n-2$,

$|g(n)-g(n-1)|=2|x_n|\leqslant 2$.

所以,对任何 $0\leqslant k\leqslant n-1$,均有

$|g(k+1)-g(k)|\leqslant 2$. ①

假设结论不真,则由条件对任何 $0\leqslant k\leqslant n$,均有 $|g(k)|>1$. ②

这时,若存在 $0\leqslant i\leqslant n-1$,有 $g(i)\cdot g(i+1)<0$,则不妨设 $g(i)>0, g(i+1)<0$.

由②式知 $g(i)>1, g(i+1)<-1$,故 $|g(i+1)-g(i)|>2$ 与式①矛盾,于是 $g(0), g(1), \cdots, g(n)$ 同号,但与 $g(0)+g(n)=0$ 矛盾,故原不等式获证.

13. 令 $x=\frac{c}{3}, y=\frac{b-c}{3}, z=\frac{a-b}{3}$,则

$x+y+z=\frac{a}{3}, x+y=\frac{b}{3}, x=\frac{c}{3}$,且 $3x+2y+z=1, a=\frac{3(x+y+z)}{3x+2y+z}, b=\frac{3(x+y)}{3x+2y+z}$,

$c=\frac{3x}{3x+2y+z}$,

将 a、b、c 的式子代入所证不等式,得

$3x^3+z^3+6x^2y+4xy^2+3x^2z+xz^2+4y^2z+6yz^2+4zyx\geqslant 0$.

由 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 且 x、y、z 不全为零,所以等号成立的条件为 $x=z=0$,

即 $c=0, a=b=\frac{3}{2}$.

14. 不妨设 $a+b+c=1$,则原不等式变形为

$$\frac{(1+a)^2}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{(1+b)^2}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{(1+c)^2}{2c^2+(1-c)^2}\leqslant 8.$$

由 $f(x)=\frac{(1+x)^2}{2x^2+(1-x)^2}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{8x+2}{3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}}\right]\leqslant\frac{12x+4}{3}$,

知 $f(a)+f(b)+f(c)\leqslant\frac{12(a+b+c)+12}{3}=8$.

注 这里"不妨设 $a+b+c=1$"利用了该不等式的齐次性.因为假设 $a+b+c=s$,其中,s 是任意正实数,则 $\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}=1$.令 $x=\frac{a}{s}, y=\frac{b}{s}, z=\frac{c}{s}$,即 $a=sx, b=sy, c=sz$,则 $x+y+z=1$.于是,原问题可转化为:

已知 $x+y+z=1$, x、y、$z\in\mathbf{R}^+$.求证:

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{(x+2y+z)^2}{2y^2+(z+x)^2}+\frac{(x+y+2z)^2}{2z^2+(x+y)^2}\leqslant 8.$$

一般地,具有齐次性的不等式,通常可以增加条件 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$、$\prod_{i=1}^{n}x_i=1$ 等使原不等式变得简单.

15. 显然,$0<a_n\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}, 0<b_n\leqslant 1$.令

$a_n = \sin\beta_n (0 < \beta_n \leqslant \frac{\pi}{4}), b_n = \tan\gamma_n (0 < \gamma_n \leqslant \frac{\pi}{4})$.

则 $a_{n+1} = \sin\frac{\beta_n}{2}, b_{n+1} = \frac{\sqrt{1+\tan\gamma_n^2}-1}{\tan\gamma_n} = \tan\frac{\gamma_n}{2}$.

所以，$\beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2}, \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n}{2}$.

故 $\beta_n = \frac{\pi}{4}(\frac{1}{2})^n, \gamma_n = \frac{\pi}{4}(\frac{1}{2})^n$，即 $a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}, b_n = \tan\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+2}}$.

又 $x \in (0, \frac{\pi}{2}), \sin x < x < \tan x$. 故原题得证．

16. 注意到$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} x_k x_j \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} \sqrt{\frac{k}{j}} x_k x_j = 1$.
当 $x_i = 1, x_k = 0 (k \neq i)$ 时，等号成立．

令 $x_j = \sqrt{j} y_j$，则 $1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} \sqrt{\frac{k}{j}} x_k x_j = \sum_{i=1}^{n} i y_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} k y_k y_i$，即

$(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 + (\sum_{i=2}^{n} y_i)^2 + \cdots + (\sum_{i=n-1}^{n} y_i)^2 + y_n^2 = 1$.

令 $u_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i, u_2 = \sum_{i=2}^{n} y_i, \cdots, u_n = y_n$，则

$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1, x_k = \sqrt{k} y_k = \sqrt{k}(u_k - u_{k+1})$，其中 $u_{n+1} = 0$.

由阿贝尔变换得$(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 = [\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}(u_k - u_{k+1})]^2 = [\sum_{k=1}^{n} u_k(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})]^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2$,

即 $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2}$，等号成立的条件是 $u_k = \lambda(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$,

将其代入到 $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$，得 $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2}}$,

所以 $u_k = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2}}$.

习题 B

1. 令 $x_k = a = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, x_t = b = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，如果 $x_2 \leqslant \frac{1+b}{2}$，则 $x_1(1 - x_1) \geqslant x_1(1 - \frac{1+b}{2}) = \frac{1}{2} x_1(1 - b) \geqslant \frac{1}{4} x_1(1 - x_n)$，从而取 $i = 1$ 即可．如果 $x_2 > \frac{1+b}{2}$，由于$\frac{a}{2} \leqslant \frac{1+b}{2}$

且 $x_i = b \leqslant \frac{1+b}{2}$,所以有以下两种情况:

(ⅰ)$x_1 = b, x_2 > \frac{1+b}{2}, \cdots, x_n > \frac{1+b}{2}$.令 $x_m = \min\{x_2, \cdots, x_n\}$,其中 $2 \leqslant m \leqslant n$.显然,

$x_{m-1}(1 - x_m) \geqslant x_1(1 - x_n) \geqslant \frac{1}{4}x_1(1 - x_n)$.

(ⅱ)存在 $2 \leqslant i \leqslant n-1$,使得 $x_i > \frac{1+b}{2}, x_{i+1} \leqslant \frac{1+b}{2}$,于是

$x_i(1 - x_{i+1}) \geqslant \frac{1+b}{2}(1 - \frac{1+b}{2}) \geqslant \frac{a}{4}(1-b) \geqslant \frac{1}{4}x_1(1 - x_n)$.

无论何种情况,要证之结论都成立.

2. 记 $S_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i, i = 1,2,\cdots,n, S_0 = 0, T_i = y_1 + y_2 + \cdots + y_i, i = 1,2,\cdots,n, T_0 = 0$.对于任何正数 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$,有 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(S_k - S_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{k+1} S_k = a_n S_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})S_k$.由于 $a_n > 0, a_k - a_{k+1} > 0, S_n > T_n, S_k > T_k$,从而 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k > a_n T_n + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})T_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k y_k$. ①

对于任意自然数 k,由条件(1)再多次用不等式①可得 $x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k > x_1^{k-1}y_1 + x_2^{k-1}y_2 + \cdots + x_n^{k-1}y_n > x_1^{k-2} \cdot y_1^2 + x_2^{k-2} \cdot y_2^2 + \cdots + x_n^{k-2} \cdot y_n^2 \cdots > y_1^k + y_2^k + \cdots + y_n^k$.

3. 当 $n = 3$ 时,不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$,原不等式左端 $= (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = (a_1 - a_2)^2 + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$,所以原不等式成立.

当 $n = 5$ 时,不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$.由于 $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) \geqslant 0$,

又 $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) \geqslant 0$.所以,所要证的不等式成立.

当 $n = 4$ 时,取 $a_1 = 0, a_2 = a_3 = a_4 = 1$;当 $n \geqslant 6$ 时,取 $a_1 = 0, a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = a_6 = \cdots = a_n = -1$,则原不等式左端 $= (-1)^3$,故不成立.

4. 一方面,我们有 $x + xyz \leqslant x + \frac{1}{2}x(y^2 + z^2) = x + \frac{1}{2}x(1 - x^2) = \frac{1}{2}(3x - x^3) \leqslant 1$.这里用到 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) > 0$,所以 $\sum \frac{x}{1 + yz} = \sum \frac{x^2}{x + xyz} \geqslant \sum x^2 = 1$(其中 $\sum$ 表循环和).另一方面,由对称性,不妨设 $x \leqslant y \leqslant z$,有 $\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \leqslant \frac{x+y+z}{1+xy}$.于是,只需证明 $\frac{x+y+z}{1+xy} \leqslant \sqrt{2}$,即证 $x + y + z - \sqrt{2}xy \leqslant \sqrt{2}$,即 $x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{2}xy < \sqrt{2}$.为此,令 $u = x + y, v = xy$,只需证明 $1 - u^2 + 2v \leqslant (\sqrt{2} + \sqrt{2}v - u)^2 \Leftrightarrow 2u^2 - 2\sqrt{2}uv + 2v^2 + 2v - 2\sqrt{2}u + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}u - v - 1)^2 + v^2 \geqslant 0$.最后一式显然成立,等号在 $v = 0, u = \frac{\sqrt{2}}{2}$,即 $x = 0, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$(此时 $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$)时取到.

5. 由条件，记 $a_i = -b_ix_i$，则方程组可改写为 $-2x_1+x_2=a_1, x_1-2x_2+x_3=a_2, x_2-2x_3+x_4=a_3, \cdots, x_{n-1}-2x_n=a_n$. 从而 $a_1+2a_2+\cdots+ka_k=-(k+1)x_k+kx_{k+1}, a_n+2a_{n-1}+\cdots+(n-k)a_{k+1}=(n-k)x_k-(n-k+1)x_{k+1}$，上述式子两边消去 x_{k+1} 得，$-(n+1)x_k=(n+1-k)\cdot(a_1+2a_2+\cdots+ka_k)+k[(n-k)\cdot a_{j+1}+\cdots+2a_{n-1}+a_n]$. 注意到对任意 $1\leqslant i\leqslant k$，均有 $(n+1-k)i\leqslant(n+1-i)i\leqslant(\frac{n+1}{2})^2, i(n-k)\leqslant(\frac{n+1}{2})^2$，所以，有 $(n+1)|x_k|\leqslant(\frac{n+1}{2})^2(|a_1|+\cdots+|a_n|)$，即 $|x_k|\leqslant\frac{n+1}{4}(b_1|x_1|+\cdots+b_n|x_n|)$，取 k，使得 $|x_k|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|>0$，就有 $b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant\frac{4}{n+1}$.

第十三章　几个著名不等式与不等式证明

习题 A

1. 由算术 - 几何平均值不等式，有 $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}}\geqslant n+1$，即 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}}}{n+1}\geqslant 1$. 又由幂平均不等式与指数函数性质，对 $m>1$，有 $\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}(\frac{x_i}{x_{i+1}})^m}{n+1}\geqslant(\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}}}{n+1})^m\geqslant\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}}}{n+1}$（其中 $x_{n+1}=x_0$）.

于是取 $m=n$，则有 $\sum\limits_{i=0}^{n}(\frac{x_i}{x_{i+1}})^n\geqslant\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}}$.

2. 由题设，运用排序不等式（或切比雪夫不等式）知

$\frac{a_1^p}{b_1^q}+\cdots+\frac{a_n^p}{b_n^q}\geqslant\frac{1}{n}(a_1^p+\cdots+a_n^p)(\frac{1}{b_1^q}+\cdots+\frac{1}{b_n^q})$. ①

又由幂平均不等式，有 $\frac{1}{n}(a_1^p+\cdots+a_n^p)\geqslant[\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)]^p$，②

及 $(\frac{b_1^{-q}+b_2^{-q}+\cdots+b_n^{-q}}{n})^{\frac{1}{-q}}\leqslant\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$，即

$\frac{1}{b_1^q}+\frac{1}{b_2^q}+\cdots+\frac{1}{b_n^q}\geqslant\frac{n^{q+1}}{(b_1+\cdots+b_n)q}$，③　由 ①、②、③ 即证.

3. 由于 $x>\sqrt{2}, y>\sqrt{2}$，及算术 - 几何平均值关系式，则 $\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\geqslant x^2y^2, \frac{(x^2+y^2)^2}{2}\geqslant(x^2+y^2)xy, \frac{(x^2+y^2)^2}{4}>x^2+y^2$，从而有 $(x^2+y^2)^2>(x^2+y^2)(1+xy)+x^2y^2$，即 $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4>x^2+y^2$.

4. 记 $a=x_1, b=x_2, c=x_3, d=x_4, s=x_1+x_2+x_3+x_4$，则原不等式可写为 $\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{x_i^3}{s-x_i}\geqslant\frac{1}{3}$. 由切比雪夫不等式可得 $\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{x_i^3}{s-x_i}\geqslant\frac{1}{4}(\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{s-x_i})(\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^3)\geqslant\frac{s}{16}(\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{s-x_i})\cdot(\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2)$，又由均值

不等式，得$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{s-x_i}\geqslant\sqrt[4]{\frac{1}{(s-x_1)(s-x_2)(s-x_3)(s-x_4)}}\geqslant\frac{4}{3s}$. 于是$\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i^3}{s-x_i}\geqslant\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}x_i^2$. 再利用题设和柯西不等式，有 $1=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1<x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$，从而获证.

5. 因为对任意实数 a，都有 $2a^2\leqslant 1+a^4$，所以，原不等式左端 $\leqslant\frac{n}{2}$，又由算术－调和平均值不等式，可得$\frac{(1+a_1)+(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}{n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}}$，即$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\geqslant\frac{n}{2}$. 故原不等式获证.

习题 B

1. 记 $a_{n+k}=a_k$，$k=1,2,\cdots,n$，则不等式左端可写为 $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}}$，不妨设 $a_1=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$. 记 $n_1=1$；$n_2=\begin{cases}2, a_2\geqslant a_3\\3, a_2<a_3\end{cases}$；$n_3=\begin{cases}n_2+1, a_{n_2+1}\geqslant a_{n_2+2}\\n_2+2, a_{n_2+1}<a_{n_2+2}\end{cases}\cdots$ 显然存在$\frac{n}{2}\leqslant r<n$，使得 $n_r=n+1$，由于 $S>\frac{1}{2}\left(\frac{a_{n_1}}{a_{n_2}}+\frac{a_{n_2}}{a_{n_3}}+\cdots+\frac{a_{n_{r-1}}}{a_{n_r}}\right)$，又 $a_{n_1}=a_{n_r}=a_1$，利用均值不等式可得

$$S>\frac{r}{2}\geqslant\frac{n}{4}.$$

2. 由 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_ix_ix_j=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i+a_j)x_ix_j\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$ 即证得命题. 其逆命题为：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实数. 如果对于任意满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$，则在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意两数之和非负. 事实上，若设 i,j 为自然数，且满足 $1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n,i\neq j$，取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $x_i=x_j=\frac{1}{2}$，$x_k=0(k\neq i,k=j)$，则由 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$，可得$\frac{1}{2}(a_i+a_j)\geqslant\frac{1}{4}(a_i+a_j)$，即 $a_i+a_j\geqslant 0$.

3. 记 $k_i=\frac{b_i}{a_i}$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $k_1\geqslant 1,k_1k_2\geqslant 1,\cdots,k_1k_2\cdots k_n\geqslant 1$.① 要证之不等式等价于 $a_1(k_1-1)+a_2(k_2-1)+\cdots+a_n(k_n-1)\geqslant 0$.

令 $d_m=(k_1-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_m-1)$，$m=1,2,\cdots,n$，则要证之不等式等价于 $d_1(a_1-a_2)+d_2(a_2-a_3)+\cdots+d_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+a_nd_n\geqslant 0$. 由均值不等式和 ① 可得 $d_m\geqslant m\sqrt[m]{k_1k_2\cdots k_m}\geqslant 0$，$m=1,2,\cdots,n$. 又 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$，所以 $d_1(a_1-a_2)+d_2(a_2-a_3)+\cdots+d_{n-1}\cdot(a_{n-1}-a_n)+a_nd_n\geqslant 0$. 其中等号成立的充要条件是 $a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

4. 记 $S_k=\sum_{i=0}^{k}a_i$，$k=0,1,2,\cdots,n$，则 $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}a_k=nc+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})=$

$nc+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\sum_{k=0}^{i}a_{i-k}=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})S_i=nc+S_1S_0+(S_2-S_0)S_1+(S_3-S_1)S_2+\cdots+(S_n-S_{n-2})S_{n-1}=nc+S_nS_{n-1}$，由 $a_n=0$ 可得 $S_{n-1}=S_n$，所以 $S_n\geqslant nc+S_n^2$，从而 $1-4nc\geqslant 0$，即 $c\leqslant\frac{1}{4n}$.

第十四章　数学归纳法与不等式证明

习题 A

1. 当 $n=1$ 时，结论显然成立. 假设对于 $n=k$ 不等式成立. 当 $n=k+1$ 时，不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}$. 由于 $(\sum_{i=1}^{k+1}a_i^3)^2=(\sum_{i=1}^{k}a_i^3)^2+2a_{k+1}^3\sum_{i=1}^{k}a_i^3+a_{k+1}^6$，再由归纳假设可知只需证明 $2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3\sum_{i=1}^{k}a_i^3\leqslant a_{k+1}^7+a_{k+1}^5$. ①　由立方公式及 $a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}$ 可得 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_k^3\leqslant 1^3+2^3+\cdots+(a_{k+1}-1)^3=\frac{1}{4}(a_{k+1}-1)^2\cdot a_{k+1}^2$. 又 $2a_{k+1}^6+a_{k+1}^3\cdot(a_{k+1}-1)^2\cdot a_{k+1}^2=a_{k+1}^7+a_{k+1}^5$，所以 ① 式成立，即当 $n=k+1$ 时要证的不等式成立. 当 $a_1=1,a_2=2,\cdots,a_n=n$ 时取等号.

2. 当 $n=2,3$，显然有 $x_1x_2\leqslant\frac{(x_1+x_2)^2}{4}=\frac{a^2}{4}$，$x_1x_2+x_2x_3=x_2(x_1+x_3)\leqslant\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{4}=\frac{a^2}{4}$.

当 $n\geqslant 4$ 时，可以证明更强的不等式 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\leqslant\frac{a^2}{4}$.　①

事实上，当 $n=4$ 时，由于 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1=(x_1+x_3)(x_2+x_4)\leqslant\frac{a^2}{4}$，所以 ① 式成立. 任取非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$，由 ① 式左端的轮换对称性，可设 $x_{k+1}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\}$. 令 $y_1=x_1+x_2,y_2=x_3,\cdots,y_{k-1}=x_k,y_k=x_{k+1}$，则 $y_1+y_2+\cdots+y_k=x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=a$. 由归纳假设知 $y_1y_2+y_2y_3+\cdots+y_{k-1}y_k+y_ky_1\leqslant\frac{a^2}{4}$. 再由 $y_1y_2+y_ky_1=(x_1+x_2)\cdot x_3+x_{k+1}(x_1+x_2)\geqslant x_1x_2+x_2x_3+x_{k+1}x_1$，可得 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_kx_{k+1}+x_{k+1}x_1\leqslant\frac{a^2}{4}$，即 ① 对于 $n=k+1$ 也成立. 所以对于 $n\geqslant 4$，① 成立.

3. 不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，记 $S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$. 当 $n<4$ 时，要证之不等式显然成立. 已用数学归纳法证明当 $n\geqslant 4$ 时，

$$S_n\leqslant\begin{cases}4(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{\frac{n}{2}-1}}),n\text{ 为偶数},\\4(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{\frac{n-1}{2}}}),n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

由此，立即可得要证之不等式当 $n\geqslant 4$ 时也成立.

显然 $S_4\leqslant\frac{4}{a_1}$，$S_5<4(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2})$. 假设当 $n\leqslant k(k\geqslant 5)$ 时，命题成立. 若 $k+1$ 为偶数，则 $k+$

$1>6$,从而 $k-1\geqslant 4$ 且为偶数,由归纳假设得 $S_{k+1}\leqslant 4(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{\frac{k-1}{2}-1}})+\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}+\frac{k+1}{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}$,又 $\frac{k}{a_1+\cdots+a_k}+\frac{k+1}{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}<\frac{k}{\frac{k+1}{2}+1}\cdot\frac{1}{a_{\frac{k-1}{2}}}+\frac{k+1}{\frac{k+1}{2}+2}\cdot\frac{1}{a_{\frac{k-1}{2}}}<\frac{4}{a_{\frac{k-1}{2}}}$,所以 $S_{k+1}<4(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{\frac{k-1}{2}}})$,即命题成立.

同理可证,若 $k+1$ 为奇数时,命题也成立.

4. 当 $n=1$ 时,命题显然成立.设 $n=2$ 时,由于 $a_1^2-a_2^2+a_3^2-(a_1-a_2+a_3)^2=(a_1-a_2)\cdot(a_1+a_2-a_1+a_2-2a_3)=2(a_1-a_2)(a_2-a_3)\geqslant 0$,命题成立.

设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时,命题成立,当 $n=k+1$ 时,由归纳假设得 $a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\cdots+a_{2k+1}^2=a_1^2-a_2^2+(a_3^2-a_4^2+a_5^2-\cdots+a_{2k+1}^2)\geqslant a_1^2-a_2^2+(a_3-a_4+a_5-\cdots+a_{2k+1})^2$.由于 $a_3-a_4+a_5-\cdots+a_{2k+1}=(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2k-1}-a_{2k})+a_{2k+1}=a_3-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2k}-a_{2k+1})$,所以 $0\leqslant a_3-a_4+a_5-\cdots+a_{2k+1}\leqslant a_3\leqslant a_2\leqslant a_1$.再由归纳假设,则 $a_1^2-a_2^2+a_3^2-\cdots+a_{2k+1}^2>(a_1-a_2+a_3-\cdots+a_{2k+1})^2$,即命题对 $n=k+1$ 也成立.

习题 B

1. 当 $n=1$ 时,不等式显然成立.假设 $n=k$ 时,不等式成立.当 $n=k+1$ 时,由轮换对称性,不妨设 x_{k+1} 最大,于是由归纳假设可得 $\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}+\frac{1+x_k}{1+x_1}\leqslant k+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{k}(x_j-a)^2$,① 由①可知,为证原不等式,只需证 $\frac{1+x_k}{1+x_{k+1}}+\frac{1+x_{k+1}}{1+x_1}-\frac{1+x_k}{1+x_1}\leqslant 1+\frac{1}{(1+a)^2}(x_{k+1}-a)^2$,② 将②式化简得等价不等式 $\frac{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_1)}{(1+x_{k+1})(1+x_1)}\leqslant\frac{1}{(1+a)^2}(x_{k+1}-a)^2$,③ 由于 $a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\}$,$x_{k+1}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\}$,显然③式成立.这就证明了 $n=k+1$ 时要证之不等式成立.而且为使 $n=k+1$ 时要证之不等式中的等号成立,当且仅当①和③中的等号成立.由归纳假设①中等号成立的充要条件是 $a=x_1=x_2=\cdots=x_k$,从而③中等号成立的充要条件是 $x_{k+1}=a$,故当 $n=k+1$ 时,原不等式中等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$.

2. $n=1$ 时,不等式显然成立.下面用数学归纳法证明 $n=2^k$(k 为非负实数)时,不等式成立.设 $n=2^m$(m 为某个非负整数)时,不等式成立.如果 $r_1,r_2,\cdots,r_{2n}\geqslant 1$,那么就有 $\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{r_j+1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j+1}+\sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{r_j+1}\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}+\frac{n}{\sqrt[n]{r_{n+1}r_{n+2}\cdots r_{2n}}+1}\geqslant\frac{2n}{\sqrt[2n]{r_1r_2\cdots r_{2n}}+1}$.因此,对于任意的非负整数 k,当 $n=2^k$ 时不等式成立.对于任意自然数 n,若 $m=2^k>n,k\in\mathbf{N}$,则令 $r_{n+1}=r_{n+2}=\cdots=r_m=\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}$,于是,有 $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{r_j+1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j+1}+\frac{m-n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}$.另一方面,由上面的证明可知 $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{r_j+1}\geqslant\frac{m}{\sqrt[m]{r_1r_2\cdots r_m}+1}=\frac{m}{(r_1r_2\cdots r_n)^{\frac{1}{m}}\cdot(r_{n+1}^{m-n})^{\frac{1}{m}}+1}=\frac{m}{(r_1r_2\cdots r_n)^{\frac{1}{m}}\cdot[(r_1r_2\cdots r_n)^{\frac{m-n}{n}}]^{\frac{1}{m}}+1}=$

$\frac{n}{(r_1r_2\cdots r_n)^{\frac{1}{n}}+1}=\frac{m}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}$. 由上面两式，有 $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j+1}+\frac{m-n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}\geqslant\frac{m}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}$，即 $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j+1}\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}$.

3. 当 $n=2$ 时，由 $x_1,x_2\in[0,1]$，则 $x_1+x_2-x_1x_2=1-(1-x_1)(1-x_2)<1$. 假设 $n=m$（正整数 $m\geqslant2$）时，对于 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in[0,1]$，有 $\sum_{k=1}^{m}x_k-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant m}x_kx_j\leqslant1$. 当 $n=m+1$ 时，$\sum_{k=1}^{m+1}x_k-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant m+1}x_kx_j=\sum_{k=1}^{m}x_k-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant m}x_kx_j+(1-\sum_{k=1}^{m}x_k)x_{m+1}$. 考虑函数 $f(x)=(\sum_{k=1}^{m}x_k-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant m}x_kx_j)+(1-\sum_{k=1}^{m}x_k)x$，其中 $x\in[0,1]$. 由归纳假设，$f(0)=\sum_{k=1}^{m}x_k-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant m}x_kx_j\leqslant1$，由已知条件：$f(1)=1-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant m}x_kx_j\leqslant1$. 因此，函数 $y=f(x)$，$x\in[0,1]$ 在坐标平面上的图象是一个直线段，其两个端点的纵坐标都不大于 1.

因为 $f(x)$ 的最大值在端点上才能达到，所以对于 $[0,1]$ 上任一实数 x，都有 $f(x)\leqslant1$. 特别地 $x_{m+1}\in[0,1]$，所以 $f(x_{m+1})\leqslant1$，即得 $\sum_{k=1}^{m+1}x_k-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant m+1}x_kx_j=1$. 由归纳法原理可知，本题获证.

第十五章　函数性质与不等式证明

习题 A

1. 令所证不等式左端为 L，考虑函数 $f(t)=2(ab+bc+ca)t^2-2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})t+L=[a\cdot(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]t^2-2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})t+L=[\sqrt{a(b+c)}t-\sqrt{\frac{1}{a^3(b+c)}}]^2+[\sqrt{b(c+a)}t-\sqrt{\frac{1}{b^3(c+a)}}]^2+[\sqrt{c(a+b)}t-\sqrt{\frac{1}{c^3(a+b)}}]^2\geqslant0$.

因 $2(ab+bc+ca)>0$，其判别式 $\Delta=4(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2-8L(ab+bc+ca)\leqslant0$. 由此有 $L\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$.

2. 令所证不等式左端为 N，考虑函数 $f(t)=2(ab+ac+ab+bc+bd+cd)t^2-2(a^2+b^2+c^2+d^2)t+N=[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(a+b+d)+d(a+b+c)]t^2-2(a^2+b^2+c^2+d^2)t+N=[\sqrt{a(b+c+d)}t-\sqrt{\frac{a^2}{b+c+d}}]^2+[\sqrt{b(c+d+a)}t-\sqrt{\frac{b^2}{a+c+d}}]^2+[\sqrt{c(a+b+d)}t-\sqrt{\frac{c^2}{a+b+d}}]^2+[\sqrt{d(a+b+c)}t-\sqrt{\frac{d^2}{a+b+c}}]^2\geqslant0$. 而 $2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)>0$，其判别式 $\Delta=4(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-8N(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\leqslant0$，又 $2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\leqslant3(a^2+b^2+c^2+d^2)$，故 $N\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}\geqslant$

$\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqslant \frac{1}{3}(ab+bc+cd+da) = \frac{1}{3}$.

3. 记 $s = b_1 + b_2 + \cdots + b_{1987}$，则原不等式左端为 $s \cdot \left(\frac{b_1}{s}\cdot\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{s}\cdot\frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{b_{1987}}{s}\cdot\frac{a_{1987}}{b_{1987}}\right)^2$. 注意到函数 $f(x) = x^2$ 的上凸性，知原不等式左端 $\leqslant s \cdot \left(\frac{b_1}{s}\cdot\frac{a_1^2}{b_1^2} + \frac{b_2}{s}\cdot\frac{a_2^2}{b_2^2} + \cdots + \frac{b_{1987}}{s}\cdot\frac{a_{1987}^2}{b_{1987}^2}\right) = \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}$.

注 可运用权方和不等式更简捷获证.

4. 令 $\alpha = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}s}\right)$，$\beta = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}s}\right)$，以 α,β 为两个根的二次函数为 $f(t) = t^2 - \frac{1}{6}pt + \frac{1}{6}s$，显然，有 $x < \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{3}(x+y+z) < z$. 又 $f(x) = x^2 - \frac{1}{6}px + \frac{1}{6}s = \frac{1}{3}(x^2 - xy - xz + yz) = \frac{1}{3}(y-x)(z-x) > 0$，$f(z) = z^2 - \frac{1}{6}pz + \frac{1}{6}s = \frac{1}{3}(z^2 - xz - yz + xy) = \frac{1}{3}(z-x)(z-y) > 0$. 所以 $x < \alpha < \beta < z$.

5. 令 $y = \frac{1}{a}(a-x)$，则 $0 < y < 1$，且只需证 $f(y) = a^6y^6 - 3a^6y^5 + \frac{5}{2}a^6y^4 - \frac{1}{2}a^6y^2 < 0$. 由于 $f(y) = a^6y^2\left(y^4 - 3y^3 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{2}\right) = a^6y^2(y-1)\cdot\left(y^3 - 2y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right) = a^6y^2(y-1)^2\left(y^2 - y - \frac{1}{2}\right)$. 又当 $0 < y < 1$ 时，$y^2 - y - \frac{1}{2} = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < -\frac{1}{2}$，所以 $f(y) < 0$，对任意 $0 < y < 1$.

习题 B

1. 利用均值不等式，得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+1)^{2k}}{(a_{i+1}+1)^k} + \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}+1)^k \geqslant 2n\sum_{i=1}^{n}(a_i+1)^k$. 因 $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}+1)^k = \sum_{i=1}^{n}(a_i+1)^k$，从而 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+1)^{2k}}{(a_{i+1}+1)^k} \geqslant \sum_{i=1}^{n}(a_i+1)^k$. 又 $k \geqslant 1$，利用函数 $f(x) = x^k$ 是 $(0,+\infty)$ 上的下凸函数，有 $\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+1)}{n}\right]^k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i+1)^k$，即 $\sum_{i=1}^{n}(a_i+1)^k \geqslant n^{1-k}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+1)\right]^k = n^{1-k}(n+n)^k = n\cdot 2^k$，其中等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 时成立.

2. 原不等式等价于 $x^4 + x^3 + y^4 + y^3 + z^4 + z^3 \geqslant \frac{3}{4}(1+x)(1+y)(1+z)$.

由于对任意正数 u,v,w，有 $u^3 + v^3 + w^3 \geqslant 3uvw$，因此，只需证明

$$x^4 + x^3 + y^4 + y^3 + z^4 + z^3 \geqslant \frac{1}{4}[(x+1)^3 + (y+1)^3 + (z+1)^3]. \quad ①$$

令 $f(t) = t^4 + t^3 - \frac{1}{4}(t+1)^3$，$g(t) = (t+1)(4t^2 + 3t + 1)$，则

$f(t)=\frac{1}{4}(t-1)g(t)$，且 $g(t)$ 是在 $(0,+\infty)$ 上的严格递增函数. 显然，① 式等价于 $f(x)+f(y)+f(z)\geqslant 0$，

即 $\frac{1}{4}(x-1)g(x)+\frac{1}{4}(y-1)g(y)+\frac{1}{4}(z-1)g(z)\geqslant 0.$ ②

因此，只需证明 ② 式就可以了.

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$，则 $g(x)\geqslant g(y)\geqslant g(z)>0$，由 $xyz=1$ 得 $x\geqslant 1, z\leqslant 1$，从而有 $(x-1)g(x)\geqslant(x-1)g(y),(z-1)g(y)\leqslant(z-1)g(z)$，故

$\frac{1}{4}(x-1)g(x)+\frac{1}{4}(y-1)g(y)+\frac{1}{4}(z-1)g(z)\geqslant\frac{1}{4}[(x-1)+(y-1)+(z-1)]\cdot g(y)=\frac{1}{4}(x+y+z-3)g(y)\geqslant\frac{1}{4}(3\sqrt[3]{xyz}-3)g(y)$，

从而原不等式成立，等号仅当 $x=y=z$ 时成立.

3. 设 $f(x)=x^2-2$. 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=f^{(2)}\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right)=\cdots=f^{(n)}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)=f^{(n)}(a)$.

于是 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_1}{a_0}\cdot a_0=f^{(n-1)}(a)\cdot f^{(n-2)}(a)\cdot\cdots\cdot f^{(0)}(a)$，其中 $f^{(0)}(a)=a$.

下面证明对任何 $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$，本题结论成立.

$k=0$ 时，$\frac{1}{a_0}=1<\frac{1}{2}(2+a-\sqrt{a^2-4})$，结论成立.

假设结论对 $k=m$ 成立，即

$$1+\frac{1}{f^{(0)}(a)}+\frac{1}{f^{(1)}(a)\cdot f^{(0)}(a)}+\cdots+\frac{1}{f^{(m-1)}(a)\cdot f^{(m-2)}(a)\cdot\cdots\cdot f^{(0)}(a)}<\frac{1}{2}(2+a-\sqrt{a^2-4}),\quad ①$$

由于 $a>2$ 时，$f(a)=a^2-2>2$，且 ① 式对所有的 $a>2$ 都成立，因此可用 $f(a)$ 代替 ① 式中的 a，得 $1+\frac{1}{f^{(1)}(a)}+\frac{1}{f^{(2)}(a)\cdot f^{(1)}(a)}+\cdots+\frac{1}{f^{(m)}(a)\cdot f^{(m-1)}(a)\cdot\cdots\cdot f^{(1)}(a)}<$

$\frac{1}{2}(2+f(a)-\sqrt{f^2(a)-4})=\frac{1}{2}(a^2-\sqrt{a^4-4a^2})=\frac{1}{2}a(a-\sqrt{a^2-4})$.

于是，我们有 $\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{m+1}}$

$$=1+\frac{1}{f^{(0)}(a)}+\frac{1}{f^{(1)}(a)\cdot f^{(0)}(a)}+\cdots+\frac{1}{f^{(m)}(a)\cdot f^{(m-1)}(a)\cdot\cdots\cdot f^{(0)}(a)}$$

$$=1+\frac{1}{f^{(0)}(a)}\cdot\left[1+\frac{1}{f^{(1)}(a)}+\cdots+\frac{1}{f^{(m)}(a)\cdot f^{(m-1)}(a)\cdot\cdots\cdot f^{(1)}(a)}\right]$$

$$<1+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}a(a-\sqrt{a^2-4})=\frac{1}{2}(2+a-\sqrt{a^2-4}),$$

即 $k=m+1$ 时结论也成立. 由数学归纳法原理，对所有 $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$，结论成立.

4. 设 $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x}$，$0<x<1$，则 $f'(x)=-\frac{1}{x+x^2}$，$f''(x)=\frac{2x+1}{(x+x^2)^2}>0$，知 $f(x)$ 在 (0,

1) 上为下凸函数,由琴生不等式,有

$$\frac{\sum\limits_{i=1,i\neq k}^{n}\ln(1+\frac{1}{x_i})}{n-1}\geqslant\ln(1+\frac{n-1}{\sum\limits_{i=1,i\neq k}^{n}x_i}),\text{即}\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(1+\frac{1}{x_i})\geqslant\left(1+\frac{n-1}{\sum\limits_{i=1,i\neq k}^{n}x_i}\right)^{n-1},$$

将 $k=1,2,\cdots,n$ 这几个不等式相乘即得

$$\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(1+\frac{1}{x_i})^{n-1}\geqslant\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{n-1}{\sum\limits_{i=1,i\neq k}^{n}x_i})^{n-1},\text{所以}\prod_{k=1}^{n}\frac{1+x_k}{x_k}\geqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{n-x_k}{1-x_k}.$$

5. 设 $f(x)=\frac{x^k}{s-x},x\in(0,s)$,则 $f'(x)=\frac{kx^{k-1}(s-x)+x_k}{(s-x)^2}$,

$f''(x)=\frac{k(k-1)x^{k-2}(s-x)+kx^{k-1}}{(s-x)^2}+\frac{kx^{k-1}(s-x)^2+2x^k(s-x)}{(s-x)^4}$,所以,当 $x\in(0,s),k>1$ 时,$f'(x)>0,f''(x)>0$,即 $f(x)$ 为下凸函数,从而由

$$\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n}\geqslant f(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})=f(\frac{s}{n}),$$

等号成立 $\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$.即证得原不等式.

6. 令 $\frac{1}{1+x_i}=a_i(i=1,2,3,4,5)$,则有 $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=1$,原不等式等价于 $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{a_i-a_i^2}{5a_i^2-2a_i+1}\leqslant1$.

设 $f(x)=\frac{x-x^2}{5x^2-2x+1},x\in(0,1)$,在均值 $x=\frac{1}{5}$ 处的切线函数为 $y=f'(\frac{1}{5})(x-\frac{1}{5})+f(\frac{1}{5})$ $=\frac{15x+1}{20}$,而 $\frac{x-x^2}{5x^2-2x+1}-\frac{15x+1}{20}=\frac{-(3x+1)(5x-1)^2}{20(5x^2-2x+1)}$,所以当 $0<x<1$ 时,$\frac{x-x^2}{5x^2-2x+1}\leqslant\frac{15x+1}{20}$.从而 $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{a_i-a_i^2}{5a_i^2-2a_i+1}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{15a_i+1}{20}=\frac{15+5}{20}=1$.

7. 令 $a+b+c=s,\frac{a}{a+b+c}=x_1,\frac{b}{a+b+c}=x_2,\frac{c}{a+b+c}=x_3$,则原命题转化为:设正实数 x_1,x_2,x_3 满足 $\sum\limits_{i=1}^{3}x_i=1$,求证:$\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{(1+x_i)^2}{2x_i^2+(1-x_i)^2}\leqslant8$.

设 $f(x)=\frac{(x+1)^2}{3x^2-2x+1},x\in(0,1)$,在均值 $x=\frac{1}{3}$ 处的切线函数为 $y=\frac{12x+4}{3}$.

而 $\frac{(x+1)^2}{3x^2-2x+1}-\frac{12x+4}{3}=\frac{-(4x+1)(3x-1)^2}{3(3x^2-2x+1)}\leqslant0$,且当 $x\in(0,1)$ 时.从而

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{(x_i+1)^2}{3x_i^2-2x_i+1}\leqslant\sum_{i=1}^{3}\frac{12x_i+4}{3}=\frac{12+12}{3}=8.$$

8. 将 a,b,c 分别换成 $\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}$,原不等式不变,于是不妨设 $0<a,b,c<1,a+b+c=1$.则 $\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}=\frac{(1-2a)^2}{a^2+(1-a)^2}=2-\frac{2}{1+(1-2a)^2}$.因 $0<a,b,c<1$,令 $1-2a=x_1,1-2b=x_2,1-2c=x_3$,则 $-1<x_1,x_2,x_3<1$ 且 $x_1+x_2+x_3=1$.于是,只须证明

$$\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\frac{1}{1+x_3^2}\leqslant\frac{27}{10}. \qquad (*)$$

设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}, x\in(-1,1)$. 在均值 $x=\frac{1}{3}$ 处的切线函数为 $y=\frac{27}{50}(2-x)$, 而 $\frac{1}{1+x^2}-\frac{27(2-x)}{50}=\frac{(3x-1)^2(3x-4)}{50(1+x^2)}\leqslant 0$, 且当 $-1<x<1$ 时. 故 $\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{1+x_i^2}\leqslant\sum_{i=1}^{3}\frac{27(2-x_i)}{50}=\frac{27}{10}$.

第十六章　构作数表(矩阵)与不等式证明

习题 A

1. 构作矩阵 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt a} & \frac{1}{\sqrt b} & \frac{1}{\sqrt c}\\ \frac{1}{\sqrt a} & \frac{1}{\sqrt b} & \frac{1}{\sqrt c}\end{bmatrix}, A'=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt a} & \frac{1}{\sqrt b} & \frac{1}{\sqrt c}\\ \frac{1}{\sqrt b} & \frac{1}{\sqrt c} & \frac{1}{\sqrt a}\end{bmatrix}$, 则 A 可同序, 由(16-2)式, 有 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}=\sqrt c+\sqrt a+\sqrt b$, 其中注意到 $abc=4R\cdot S_\Delta=1$.

2. 构作矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1+\frac{1}{n} & \cdots & 1+\frac{1}{n}\\ 1+\frac{1}{n} & 1 & \cdots & 1+\frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1+\frac{1}{n} & 1+\frac{1}{n} & \cdots & 1\end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$, 主对角线上元素均为 1, 其余均为 $1+\frac{1}{n}$.

由(16-1)式, 有 $\{[1+n(1+\frac{1}{n})]^{n+1}\}^{\frac{1}{n+1}}\geqslant(n+1)[(1+\frac{1}{n})^n]^{\frac{1}{n+1}}$, 由于矩阵中行的元素不成比例, 知上述不等式不能取等号, 故有 $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\frac{1}{n})^n$, 即证.

3. 构作矩阵 $\begin{bmatrix}\sin^3\alpha\cdot\cos^3\beta & \sin^3\alpha\cdot\cos^3\beta & 1\\ \sin^3\alpha\cdot\sin^3\beta & \sin^3\alpha\cdot\sin^3\beta & 1\\ \cos^3\alpha & \cos^3\alpha & 1\end{bmatrix}_{3\times3}$, 由(16-1)式, 有

$[(\sin^3\alpha\cdot\cos^3\beta+\sin^3\alpha\cdot\sin^3\beta+\cos^3\alpha)^2\cdot 3]^{\frac{1}{3}}\geqslant\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha=1$. 由此即证.

4. 构作矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{a}{\sin^n x} & \frac{a}{\sin^n x} & \sin^2 x & \cdots & \sin^2 x\\ \frac{b}{\cos^n x} & \frac{b}{\cos^n x} & \cos^2 x & \cdots & \cos^2 x\end{bmatrix}_{2\times(n+2)}$, 则由(16-1)式, 有

$[(\frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x})^2\cdot 1\cdots 1]^{\frac{1}{n+2}}\geqslant a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}$, 故 $\frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x}\geqslant(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n+2}{2}}$.

5. 构作矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1\end{bmatrix}_{n\times n}$，则由(16－1)式，有

$[(1+2+\cdots+n)^n]^{\frac{1}{n}}\geqslant n(n!)^{\frac{1}{n}}$，由此即有 $n!\leqslant(\frac{n+1}{2})^n$.

另证：若构作矩阵 A 的同序阵

$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{bmatrix}_{n\times n}$，则由(16－3)式，有

$n^n\cdot n!\leqslant(1+2+\cdots+n)^n=[\frac{n(n+1)}{2}]^n$，亦有 $n!\leqslant(\frac{n+1}{2})^n$.

习题 B

1. 由 $x+y+z=1$，且 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，知 $0<x<1,0<y<1,0<z<1$，则 $1-x>0,1-y>0,1-z>0$.

构作 3×4 矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{x^4}{y(1-y^2)} & y & 1+y & 1-y\\ \frac{y^4}{z(1-z^2)} & z & 1+z & 1-z\\ \frac{z^4}{x(1-x^2)} & x & 1+x & 1-x\end{bmatrix}_{3\times4}$，则由(16－1)式，有

$\{[\frac{x^4}{y(1-y^2)}+\frac{y^4}{z(1-z^2)}+\frac{z^4}{x(1-x^2)}]\cdot(x+y+z)\cdot(3+x+y+z)\cdot(3-x-y-z)\}^{\frac{1}{4}}\geqslant$ $x+y+z=1$，由此整理即得原不等式.

2. 原不等式可变形为 $\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$.

构作 3×2 矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{b^2c^2}{a(b+c)} & a(b+c)\\ \frac{c^2a^2}{b(c+a)} & b(c+a)\\ \frac{a^2b^2}{c(a+b)} & c(a+b)\end{bmatrix}_{3\times2}$，则由(16－1)式，有

$\{[\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}]\cdot2(ab+bc+ca)\}^{\frac{1}{2}}\geqslant ab+bc+ac$，

故 $\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ac)\geqslant\frac{1}{2}\cdot3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$.

3. 构作矩阵 $\begin{bmatrix} \frac{a^3}{b+c+d} & b+c+d \\ \frac{b^3}{a+c+d} & a+c+d \\ \frac{c^3}{a+b+d} & a+b+d \\ \frac{d^3}{a+b+c} & a+b+c \end{bmatrix}_{4\times 2}$，则由(16 - 1)式，有

$[(\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c})\cdot 3(a+b+c+d)]^{\frac{1}{2}} \geqslant a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}}$，注意幂平均不等式及题设条件，有 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}} \geqslant 4(\frac{a+b+c+d}{4})^{\frac{3}{2}}$，$1=ab+bc+cd+ad=(a+c)(b+d)$，及 $\frac{1}{12}(a+b+c+d)^2=\frac{1}{12}[(a+c)+\frac{1}{a+c}]^2 \geqslant \frac{1}{12}\cdot 4=\frac{1}{3}$.

故 $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}})^2}{3(a+b+c+d)} \geqslant$
$\frac{1}{12}(a+b+c+d)^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

4. 构作矩阵 $\begin{bmatrix} 1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n} & 1 & \underbrace{1 & \cdots & 1}_{n-1列} \end{bmatrix}_{2\times n}$，则由(16 - 1)式，有

$[(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n})\cdot 2^{n-1}]^{\frac{1}{n}} \geqslant (1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n})^{\frac{1}{n}}+(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n})^{\frac{1}{n}}$，即有 $2 \geqslant \sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}$，由此即得原不等式.

5. 构作 $m\times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} (qa_1+\frac{r}{a_1})^n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (qa_2+\frac{r}{a_2})^n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (qa_m+\frac{r}{a_m})^n & \underbrace{1 & 1 & \cdots & 1}_{n-1列} \end{bmatrix}_{m\times n}$，则由(16 - 1)式，有

$[\sum_{i=1}^{m}(qa_i+\frac{r}{a_i})^n\cdot m^{n-1}]^{\frac{1}{n}} \geqslant \sum_{i=1}^{m}(qa_i+\frac{r}{a_i})=qp+r\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i}$. 又构作 $m\times 2$ 矩阵

$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & a_1 \\ \frac{1}{a_2} & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_m} & a_m \end{bmatrix}_{m\times 2}$，再由(16 - 1)式，有 $[(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i})(\sum_{i=1}^{m}a_i)]^{\frac{1}{2}} \geqslant m$，故

$$\sum_{i=1}^{m}(qa_i+\frac{r}{a_i})^n \geqslant \frac{(qp+r\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i})^n}{m^{n-1}} \geqslant \frac{(qp+r\cdot\frac{m^2}{p})^n}{m^{n-1}} = \frac{(qp^2+m^2r)^n}{m^{n-1}\cdot p^n}.$$

6. 构作矩阵$\begin{bmatrix} x_1^m & x_2^m & \cdots & x_n^m \\ \frac{1}{x_1^m} & \frac{1}{x_2^m} & \cdots & \frac{1}{x_n^m} \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}_{3\times n}$，则由(16－1)式，有$[\prod_{i=1}^{m}(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a)]^{\frac{1}{n}} \geqslant$

$$(\prod_{i=1}^{n}x_i^m)^{\frac{1}{n}}+(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^m})^{\frac{1}{n}}+(a^n)^{\frac{1}{n}} = \frac{[1-(\prod_{i=1}^{n}x_i^m)^{\frac{1}{n}}]^2}{(\prod_{i=1}^{n}x_i^m)^{\frac{1}{n}}}+2+a.$$

再注意到算术－几何平均值不等式，有

$$(\prod_{i=1}^{n}x_i^m)^{\frac{1}{n}} = (\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^m \leqslant (\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^m = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)^m,$$

则 $$\frac{[1-(\prod_{i=1}^{n}x_i^m)^{\frac{1}{n}}]^2}{(\prod_{i=1}^{n}x_i^m)^{\frac{1}{n}}} \underset{(*)}{\geqslant} \frac{[1-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)^m]^2}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)^m} = \frac{[1-(\frac{s}{n})^m]^2}{(\frac{s}{n})^m},$$

于是$$\frac{[1-(\prod_{i=1}^{n}x_i^m)^{\frac{1}{n}}]^2}{(\prod_{i=1}^{n}x_i^m)^{\frac{1}{n}}}+2+a \geqslant \frac{[1-(\frac{s}{n})^m]^2}{(\frac{s}{n})^m}+2+a = (\frac{n}{s})^m+(\frac{s}{n})^m+a.$$

故$\prod_{i=1}^{n}(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a) \geqslant [(\frac{s}{n})^m+(\frac{n}{s})^m+a]^n$.

注　在$(*)$处用到条件$s \leqslant n$.

第十七章　含参数的不等式问题

习题 A

1. 设$x=\sin\theta+\cos\theta,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则$x\in[1,\sqrt{2}]$. 因$\sin2\theta=x^2-1,\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，则原不等式化为$x^2-1-(2+a)x-\frac{4}{x}+3+2a>0$，即$(x-2)(x+\frac{2}{x}-a)>0$. 又$x\in[1,\sqrt{2}]$，则$x+\frac{2}{x}-a<0$，即$a>x+\frac{2}{x},x\in[1,\sqrt{2}]$. 令$f(x)=x+\frac{2}{x}$，知$f(x)$在$[1,\sqrt{2}]$上单调递减，则$f(x)_{\max}=f(1)=3$，故$a>f(x)_{\max}$，即$a>3$.

2. 利用算术－几何平均值不等式可得

$x(t)=\underbrace{(t+1)^2+\cdots+(t+1)^2}_{5个}+\frac{a}{2(t+1)^5}+\frac{a}{2(t+1)^5} \geqslant 7\sqrt[7]{\frac{a^2}{4}}$，当且仅当$(t+1)^2=\frac{a}{2(t+1)^5}$时，等号成立. 于是有$7\sqrt[7]{\frac{a^2}{4}} \geqslant 24$，即$a \geqslant 2\sqrt{(\frac{24}{7})^7}$.

另一方面,当 $a=2\sqrt{(\frac{24}{7})^7}$, $t=\sqrt{\frac{24}{7}}-1$ 时,$x(t)=24$,从而 a 的最小值为 $2\sqrt{(\frac{24}{7})^7}$.

3. 对 λ 分两种情况:

(i)当 $\lambda\geqslant 2$ 时,有 $x^2+y^2+\lambda xy\geqslant x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$.

当 $xy=0$ 时,上述不等式等号成立.

(ii)当 $0<\lambda<2$ 时,有 $x^2+y^2+\lambda xy=(x+y)^2-(2-\lambda)xy\geqslant$

$(x+y)^2-(2-\lambda)(\frac{x+y}{2})^2=\frac{2+\lambda}{4}(x+y)^2$,

当 $x=y$ 时等号成立.

所以,最大的常数 $c(\lambda)=\begin{cases}1,\lambda\geqslant 2,\\ \frac{2+\lambda}{4},0<\lambda<2.\end{cases}$

4. 先估计 k 的上界.当 $a=b=c=d=1$ 时,有 $4k\leqslant 4+4$, $k\leqslant 2$.

下面证明:对于 a、b、c、$d\in[0,1]$,恒有 $a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

先证一个引理.

引理 若 $x,y\in[0,1]$,则有 $x^2y+1\geqslant x^2+y^2$. (*)

此不等式等价于 $(y-1)(x^2-y-1)\geqslant 0$.

从而式(*)成立.分别用 a、b 和 b、c 和 c、d 和 d、a 代替式(*)中的 x、y,得

$a^2b+1\geqslant a^2+b^2$, $b^2c+1\geqslant b^2+c^2$, $c^2d+1\geqslant c^2+d^2$, $d^2a+1\geqslant d^2+a^2$.

把上面四个不等式相加,即得

$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

综上所述,k 的最大值为 2.

5. 取 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$,由假设得 $\sum\limits_{k=1}^{n}r_ka_k\geqslant(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}}$. ①

取 $x_k=2a_k(k=1,2,\cdots,n)$,又得 $\sum\limits_{k=1}^{n}r_ka_k\leqslant(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}}$. ②

① 和 ② 给出 $\sum\limits_{k=1}^{n}r_ka_k=(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}}$. ③

由柯西不等式有 $\sum\limits_{k=1}^{n}r_ka_k\leqslant(\sum\limits_{k=1}^{n}r_k^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}}$,

又 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为 0,从而再由 ③ 可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}r_k^2\geqslant 1$. ④

另一方面,取 $x_k=r_k(k=1,2,\cdots,n)$,利用 ③ 和假设可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}r_k^2\leqslant(\sum\limits_{k=1}^{n}r_k^2)^{\frac{1}{2}}$.

再由 ④ 可推出 $\sum\limits_{k=1}^{n}r_k^2\leqslant 1$. ⑤

于是由 ④ 和 ⑤ 给出了 $\sum\limits_{k=1}^{n}r_k^2=1$. ⑥

由⑥和③,可知$\sum_{k=1}^{n} r_k a_k = (\sum_{k=1}^{n} r_k^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{\frac{1}{2}}$.

根据柯西不等式中等号成立的条件,则有实数λ,使得$r_k = \lambda a_k, k = 1,2,\cdots,n$.再由③得到$\lambda = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{-\frac{1}{2}}$.于是$r_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_i^2}}, i = 1,2,\cdots,n$.

习题 B

1. 令$b_n = b - \dfrac{2^3 - a}{2!} - \dfrac{3^3 - a}{3!} - \cdots - \dfrac{n^3 - a}{n!} = \dfrac{P(n)}{n!}$,其中$P(n)$是关于$n$的多项式.

显然,$P(n)$的次数不能大于2.设$P(n) = kn^2 + ln + m$.

由$b_{n+1} - b_n = -\dfrac{(n+1)^3 - a}{(n+1)!} = \dfrac{P(n+1)}{(n+1)!} - \dfrac{P(n)}{n!}$

及待定系数法得$k = 1, l = 3, m = 5, a = 5$.

从而,$b = \dfrac{2^3 - 5}{2!} + \dfrac{3^3 - 5}{3!} + \cdots + \dfrac{n^3 - 5}{n!} + \dfrac{n^3 + 3n + 5}{n!} (n > 2)$.

在上式中取$n + 1$及n,两式相减知b是常数,令$n = 3$,得$b = 9$.

由$b_n < \dfrac{c}{(n-2)!}$得$c > (n-2)! \cdot b_n = (n-2)! \cdot \dfrac{n^2 + 3n + 5}{n!} = 1 + \dfrac{4n + 5}{n^2 - n}$.

注意到$n > 2$时$\dfrac{4n + 5}{n^2 - n}$是关于n的减函数,从而$c > 1 + \dfrac{4 \times 3 + 5}{3^2 - 3} = \dfrac{23}{6}$.

可取$c = 4$.则$a = 5, b = 9, c_{\min} = 4$.

注 (ⅰ)利用类似方法可考虑更一般的情形:确定自然数a、b、c,使对任意n、$k \in \mathbf{N}, n > k - 1$,有$b - \dfrac{c}{(n - k + 1)!} < \dfrac{2^k - a}{2!} + \dfrac{3^k - a}{3!} + \cdots + \dfrac{n^k - a}{n!} < b$.

(ⅱ)由本题还可得到一些"副产品":

1° $\dfrac{2^2 - 2}{2!} + \dfrac{3^2 - 2}{3!} + \cdots + \dfrac{n^2 - 2}{n!} + \dfrac{n + 2}{n!} = 3 (n > 2)$.

2° $\dfrac{2^3 - 5}{2!} + \dfrac{3^3 - 5}{3!} + \cdots + \dfrac{n^3 - 5}{n!} + \dfrac{n^2 + 3n + 5}{n!} = 9 (n > 2)$.

3° $\dfrac{2^5 - 52}{2!} + \dfrac{3^5 - 52}{3!} + \cdots + \dfrac{n^5 - 52}{n!} + \dfrac{n^4 + 5n^3 + 14n^2 + 31n + 52}{n!} = 103$.

等等.这些结果给数学竞赛提供了丰富的素材.

2. 将条件式②变形为$(x - b)^2 + (y - 1)^2 > b$. ③

因对任意实数x、y,式①均成立,故$b < 0$.

于是式①为$2[2\cos^2(x - y) - 1] + 8b\cos(x - y) + 8b(b + 1) + 5 > 0$. ④

令$z = \cos(x - y), z \in [-1,1]$,则式④为$4z^2 + 8bz + 8b^2 + 8b + 3 > 0, z \in [-1,1]$.

作辅助函数$f(z) = 4z^2 + 8bz + 8b^2 + 8b + 3$,则$f(z)$在$[-1,1]$上恒大于0.

因$b < 0$,所以,有如下两种情形:

(ⅰ)$\Delta = 64b^2 - 4\times4(8b^2+8b+3) < 0$，则 $b < -\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2} < b < 0$；

(ⅱ)$\begin{cases}\Delta \geqslant 0,\\ -b > 1,\\ f(1) > 0,\end{cases}$ 有 $\begin{cases}-\frac{3}{2} \leqslant b \leqslant -\frac{1}{2},\\ b < -1,\\ b < -1-\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 或 } b > -1+\frac{\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$ 则 $-\frac{3}{2} \leqslant b < -1-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

综合(ⅰ)、(ⅱ)，可得 b 的取值范围为 $(-\infty, -1-\frac{\sqrt{2}}{4}) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$.

3. 对任意的 $x \in [0,1]$，有恒等式

$(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1) = -2x^2$ 成立.

因在闭区间上

$$0 < \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2 \leqslant \sqrt{1+x+\frac{x^2}{4}}+\sqrt{1-x+\frac{x^2}{4}}+2 =$$

$$(1+\frac{x}{2})+(1-\frac{x}{2})+2 = 4, 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1,$$

从而在 $[0,1]$ 上函数

$h(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)\cdot(\sqrt{1-x^2}+1)$，满足 $0 \leqslant h(x) \leqslant 4$.

故对 $x \in [0,1]$ 有 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2 = \frac{-x^2}{h(x)} \leqslant -\frac{x^2}{4}$.

如果对适合 $0 < \alpha < 2$ 的某数 α 及 $\beta > 0$，下列与上述类似的不等式成立：

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2 \leqslant -\frac{x^\alpha}{\beta}, x \in [0,1], \quad ①$$

即 $-\frac{x^2}{h(x)} \leqslant -\frac{x^\alpha}{\beta}$，则 $x^{2-\alpha} \geqslant \frac{h(x)}{\beta}(x \in [0,1])$.

令 $x \to 0$，得 $0 \geqslant \frac{h(0)}{\beta}$，但 $h(0) = 4$. 所得矛盾表明 $\alpha = 2$ 是满足条件 ① 的最小数.

使不等式 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2 \leqslant -\frac{x^2}{\beta}(x \in [0,1])$， ②

即 $-\frac{x^2}{h(x)} \leqslant -\frac{x^2}{\beta}$ 成立的最小正整数 β，等于满足 $h(x) \leqslant \beta(x \in [0,1])$ 的最小正整数 β. 因此，$\beta = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} h(x)$. 对任何 u、$v \geqslant 0$，有 $\sqrt{u}+\sqrt{v} \leqslant \sqrt{2(u+v)}$. ③

在 ③ 中，令 $u = 1+x, v = 1-x$，得 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \leqslant 2$.

于是，再次得到 $h(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)\cdot(\sqrt{1-x^2}+1) \leqslant 2(\sqrt{1-x^2}+1) \leqslant 4$.

另一方面，上面已经指出 $h(0) = 4$，因此，有 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} h(x) = 4$. 故满足 ② 的最小正数 $\beta = 4$.

综上知，适合条件的最小正数 $\alpha = 2$，此时一定存在 β(事实上 $\beta \geqslant 4$) 使原不等式成立.

4. 首先设 $a + c = n$. 如果 $b, d \geqslant n+1$，则 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \leqslant \frac{n}{n+1}$,

又显然有$\frac{n}{n+1}<\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n+1}<1$,所以不妨设 $b\leqslant n$.

取定 $b(2\leqslant b\leqslant n)$.当 $a=b-1$ 时,由 $a+c=n$ 可得$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b-1}{b}+\frac{n+1-b}{d}$.

从而为使$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$,$d$ 的最小值为 $d_1=b(n+1-b)+1$,此时$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值为

$$\frac{b-1}{b}+\frac{n+1-b}{b(n+1-b)+1}=1-\frac{1}{bd_1}.$$

当 $a=b-k,c=n+k-b$ 时.若 $d\geqslant d_1$,则

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b-k}{b}+\frac{n+k-b}{d}\leqslant\frac{b-k}{b}+\frac{n+k-b}{d_1}.$$

再由 $b<d_1$,从而$\frac{k-1}{d_1}\leqslant\frac{k-1}{b}$,于是

$$\frac{b-k}{b}+\frac{n+k-b}{d_1}\leqslant\frac{b-1}{b}+\frac{n+1-b}{d_1}=1-\frac{1}{bd_1}.$$

由此得到当 $d\geqslant d_1$ 时,有$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\leqslant 1-\frac{1}{bd_1}$.

若 $d<d_1$ 时,由于$\frac{b-k}{b}+\frac{n+k-b}{d}=\frac{m}{bd}<1$,

所以$\frac{b-k}{b}+\frac{n+k-b}{d}\leqslant\frac{bd-1}{bd}<\frac{bd_1-1}{bd_1}=1-\frac{1}{bd_1}$.

由此,固定 b,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值为$1-\frac{1}{bd_1}$,从而,在 $a+c=n$,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$ 的条件下,所求的最大值是$\max\limits_{\substack{2\leqslant b\leqslant n\\ b\in\mathbf{N}}}\left\{1-\frac{1}{b[b(n+1-b)+1]}\right\}$.

记 $f(b)=b[b(n+1-b)+1]=-b^3+(n+1)b^2+b$.由于

$$\begin{aligned}f(b+1)-f(b)&=-(3b^2+3b+1)+(n+1)(2b+1)+1\\&=-3b^2+(2n-1)b+n+1.\end{aligned}$$

令二次三项式 $-3b^2+(2n-1)b+n+1$ 的惟一正根为 $\bar{b}$,则

$$\bar{b}=\frac{1}{6}[2n-1+\sqrt{(2n-1)^2+12(n+1)}].$$

易知,当 $b<\bar{b}$ 时,$f(b+1)-f(b)>0$,当 $b>\bar{b}$ 时,$f(b+1)-f(b)<0$.从而当 b 等于不小于 b_1 的最小整数时,$f(b)$ 最大.再由$(2n-1)^2+12(n+1)=4n^2+8n+13$ 可知

$$2n+2<\sqrt{(2n-1)^2+12(n+1)}<2n+3.$$

所以,$\frac{2n}{3}+\frac{1}{6}<\bar{b}<\frac{2n}{3}+\frac{1}{3}$.于是易证不小于 b_1 的最大整数是$[\frac{2n}{3}+\frac{1}{6}]+1$.以上便证明了若 $a+c=n$,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$时,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值为$1-\frac{1}{[\frac{2n}{3}+\frac{7}{6}]([\frac{2n}{3}+\frac{7}{6}](n-[\frac{2n}{3}+\frac{1}{6}])+1)}$.

由于此数随 n 单调递增,从而它也是在 $a+c\leqslant n$,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$ 的条件下,$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值.

5. 注意到不等式左边的分子、分母关于 x 的二次式的系数的关系

$(a^2+4a-5)-(2a^2+2)=-a^2+4a-7.$

设关于 x 的方程

$x^2+(2a^2+2)x-a^2+4a-7=0, x^2+(a^2+4a-5)x-a^2+4a-7=0$

的两根分别为 x_1 和 $x_2(x_1<x_2)$、x_3 和 $x_4(x_3<x_4)$.

注意到 $x_1x_2=x_3x_4=-a^2+4a-7=-a(a-2)^2-3<0$,

$(x_1+x_2)-(x_3+x_4)=(a^2+4a-5)-(2a^2+2)=-a^2+4a-7<0$,

所以,x_1、x_2、x_3、x_4 的大小关系是 $x_1<x_3<x_2<x_4$.

故原不等式的解集为 $(x_1,x_3)\cup(x_2,x_4)$.

由题意得 $(x_3-x_1)+(x_4-x_2)\geqslant 4$,即 $a^2-4a+7\geqslant 4$.

解得 $a\leqslant 1$ 及 $a\geqslant 3$.

因此,$a\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

6.(1) 由 d 的定义知 $d\leqslant(a-b)^2, d\leqslant(b-c)^2, d\leqslant(c-a)^2$.

以上三式相加得

$3d\leqslant(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2ab-2bc-2ca<2(a^2+b^2+c^2)$.

从而,$d\leqslant\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

故可取 $\lambda=\frac{2}{3}$.

(2) 不妨设 $d\geqslant b\geqslant c$.

若 $b\leqslant\frac{a+c}{2}$,则 $a\geqslant 2b-c>0$ 且 $d=(b-c)^2$.

故 $5d-(a^2+b^2+c^2)=5(b-c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$\leqslant 5(b-c)^2-(2b-c)^2-b^2-c^2=-6bc+3c^2\leqslant 0$.

若 $b>\frac{a+c}{2}$,则 $a<2b$ 且 $d=(a-b)^2$.

故 $5d-(a^2+b^2+c^2)=5(a-b)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$=4a^2-10ab+4b^2-c^2=2(a-2b)(2a-b)-c^2<0$.

所以,$d\leqslant\frac{1}{5}(a^2+b^2+c^2)$.

因此,$\lambda_{\min}\leqslant\frac{1}{5}$.

下面证明:$\lambda\geqslant\frac{1}{5}$.

取 $b=\frac{a+c}{2}$,则 $d=(\frac{a-c}{2})^2$.此时,

$a^2+b^2+c^2=a^2+(\frac{a+c}{2})^2+c^2=(a-c)^2+(\frac{a-c}{2})^2+3ac=5d+3ac$.

由此可见,对任意正数 $\lambda<\frac{1}{5}$,有

$d=\frac{1}{5}(a^2+b^2+c^2)-\frac{3}{5}ac$

$=\lambda(a^2+b^2+c^2)+(\frac{1}{5}-\lambda)(a^2+b^2+c^2)-\frac{3}{5}ac$

$>\lambda(a^2+b^2+c^2)+(\frac{1}{5}-\lambda)a^2-ac.$ ②

于是,只要 $c\leqslant(\frac{1}{5}-\lambda)a$,式②就不小于 $\lambda(a^2+b^2+c^2)$.

因为 $c>0$,所以,当 $0<\lambda<\frac{1}{5}$ 时,不等式①不成立.

从而,$\lambda\geqslant\frac{1}{5}$.

综上所述,满足不等式①的最小正数 λ 的值为 $\frac{1}{5}$.

7. 先对特殊的数列 $\{a_n\}$ 得出 λ 的取值范围,再以任意数列 $\{a_n\}$ 给出证明.

令 $a_i=i(i=1,2,\cdots,n)$.

由不等式易求得 $\lambda\leqslant\frac{2(n-2)}{n-1}$.

下面证明:对任意正整数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,都有

$$a_n^2\geqslant\frac{2(n-2)}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+2a_n. \quad (*)$$

由 $a_k+(n-k)\leqslant a_n$,即 $a_k\leqslant a_n-(n-k)(k=1,2,\cdots,n-1)$,且 $a_n\geqslant n$,有

$\frac{2(n-2)}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\leqslant\frac{2(n-2)}{n-1}\{(n-1)a_n-[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]\}$

$=\frac{2(n-2)}{n-1}[(n-1)a_n-\frac{1}{2}n(n-1)]$

$=2(n-2)a_n-n(n-2)=(n-2)(2a_n-n)$.

而 $(a_n^2-2a_n)-(n-2)(2a_n-n)=a_n[(a_n-n)+(2-n)]+n(n-2)$

$=(n-2)(n-a_n)+a_n(a_n-n)=(a_n-n)[a_n-(n-2)]\geqslant0$,

于是,不等式(*)成立.

因此,λ 的最大值是 $\frac{2(n-2)}{n-2}(n\geqslant2)$.

8. 先寻找 m 的最小值,再给出证明.

当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时,由所给不等式得 $m\geqslant27$.

下面证明:不等式 $27(a^3+b^3+c^3)\geqslant6(a^2+b^2+c^2)+1$,对满足 $a+b+c=1$ 的任意正实数 a、b、c 都成立.

易知对任意正实数 a、b、c,均有

$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$,$b^3+c^3\geqslant b^2c+bc^2$,$c^3+a^3\geqslant c^2a+ca^2$.

三式相加得

$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$.

则 $3(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=a^2+b^2+c^2$.

故 $6(a^2+b^2+c^2)+1=6(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2$

$\leqslant 6(a^2+b^2+c^2)+3(a^2+b^2+c^2)$

$=9(a^2+b^2+c^2)\leqslant 27(a^3+b^3+c^3)$.

9. 先求出 c 的取值范围,再给出证明,最后指出 c 取最小值时等号成立的充要条件 .

当 $x_1=x_2=1, x_3=x_4=\cdots=x_n=0$ 时,

$c\geqslant\frac{1}{16}\times1\times1\times(1^2+1^2)=\frac{1}{8}$.

下面证明:不等式 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leqslant\frac{1}{8}(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^4$ 对所有的非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都成立 .

注意到 $(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^4=(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j)^2\geqslant4\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\cdot2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$

$=8\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\geqslant8\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)$. 故 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leqslant\frac{1}{8}(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^4$.

因此,c 的最小值为 $\frac{1}{8}$,且等号成立的充要条件是,其中两个 x_i 相等,其余的 $n-2$ 个 x_i 均为 0.

10. 设法将所给不等式左边转化成能运用平均值不等式的式子,并注意到将这个式子与 $(a^2+b^2+c^2)^2$ 建立联系,进而求出 M 的最小值 .

首先考虑 $P(t)=tb(t^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ct(c^2-t^2)$

易知 $P(b)=P(c)=P(-c-b)=0$.

则 $|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|$

$=|P(a)|=|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|$.

于是,原不等式等价于

$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|\leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2$.

由对称性,不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$,则

$|(b-c)(a-b)|=(b-a)(c-b)\leqslant\left[\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right]^2=\frac{(c-a)^2}{4}$,

且等号成立的充要条件是 $b-a=c-b$,即 $2b=a+c$.

注意到 $\left[\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right]^2\leqslant\frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2}$

$\Leftrightarrow 3(c-a)^2$

$\leqslant 2[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]$,

且等号成立的充要条件是 $2b=a+c$. 从而,

$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|$

$\leqslant\frac{1}{4}|(c-a)^3(a+b+c)|=\frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2}$

$$\leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\left\{\frac{2[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]}{3}\right\}^3(a+b+c)^2}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\sqrt[4]{\left[\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right]^3(a+b+c)^2}\right\}^2.$$

由平均值不等式有

$$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right]^2$$

$$=\frac{9\sqrt{2}}{32}(a^2+b^2+c^2)^2.$$

故 $M \geqslant \frac{9\sqrt{2}}{32}$，且等号成立的充要条件是 $2b=a+c$

及 $$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}=(a+b+c)^2.$$

解得 $2b=a+c,(c-a)^2=18b^2$.

取 $b=1$，得 $a=1-\frac{3\sqrt{2}}{2},c=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 此时，原不等式中的等号成立.

故 $M_{\min}=\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

第十八章　复数及运算的几何意义

习题 A

1. 由 $|z|=1,\bar{z}=1,\omega=\frac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$，得

$$\omega\bar{\omega}=\frac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}\cdot\frac{1-z^4}{1+(\bar{z})^4}=\frac{1-(\bar{z})^4-z^4+(z\bar{z})^4}{1+(\bar{z})^4+z^4+(z\bar{z})^4}=\frac{2-(\bar{z}^4+z^4)}{2+(\bar{z}^4+z^4)}$$

$$=\frac{2-2\cos4\theta}{2+2\cos4\theta}=\frac{1-\cos4\theta}{1+\cos4\theta}=\tan^2 2\theta.$$

即 $|\omega|^2=\tan^2 2\theta$，所以 $\tan2\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. 但 $0<\theta<\pi$，于是计算得 $\theta=\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12}$ 或 $\frac{11\pi}{12}$.

因为 $0\leqslant\arg\omega\leqslant\frac{\pi}{2}$，经检验得 $\theta=\frac{\pi}{12}$，或 $\frac{7\pi}{12}$.

2. 将条件转化为 $z=\frac{1+a\mathrm{i}}{1-a\mathrm{i}}=\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{2a}{1+a^2}\mathrm{i}$. 令 $a=\tan\frac{\theta}{2}$，则 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$. 于是

$$|z^2-z+2|=|\cos2\theta+\mathrm{i}\sin2\theta-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta+2|$$

$$=\sqrt{(\cos2\theta-\cos\theta+2)^2+(\sin2\theta-\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{8\cos^2\theta-6\cos\theta+2}=\sqrt{8\left(\cos\theta-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{8}}.$$

当 $\cos\theta=\frac{3}{8}$，即 $\frac{1-a^2}{1+a^2}=\frac{3}{8}$，$a=\pm\frac{\sqrt{55}}{11}$ 时，

$$|z^2-z+2|_{\min}=\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

3.(1) $zu=(1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(a^2+a\mathrm{i})=[a^2(1-\cos\theta)-a\sin\theta]+[a(1-\cos\theta)+a^2\sin\theta]\mathrm{i}$.又 zu 为纯虚数,则 $\begin{cases}a^2(1-\cos\theta)-a\sin\theta=0, & ①\\ a(1-\cos\theta)+a^2\sin\theta\neq 0. & ②\end{cases}$

由②知 $a\neq 0$,又 $0<\theta<2\pi$,所以 $1-\cos\theta\neq 0$,于是 $a=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\cot\frac{\theta}{2}$,$\tan(\arg u)=\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}=\tan\frac{\theta}{2}$,显然 $\theta=\pi$,当 $0<\theta<\pi$ 时,$a>0$,$\arg u\in(0,\frac{\pi}{2})$,所以 $\arg u=\frac{\theta}{2}$;当 $\pi<\theta<2\pi$ 时,$a<0$,$\arg u\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$,所以 $\arg u=\pi+\frac{\theta}{2}$.

(2) $\omega=(z+u)^2$,$z+u=(1-\cos\theta+a^2)+(a+\sin\theta)\mathrm{i}$.若 $\omega\in\mathbf{R}^+$,则 $z+u\in\mathbf{R}$,于是 $a+\sin\theta=0$.又 $a=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$,且 $\sin\theta\neq 0$,所以 $1+\frac{1}{1-\cos\theta}=0$,即 $\cos\theta=2$,这不可能.故 ω 不可能为正实数.

4. 由 $|z^2-3z-2|\geqslant 0$,故当 $z=-1$ 时,$|z^2-3z-2|_{\min}=0$;又 $|z^2-3z-2|=|(z+1)^2\cdot(z-2)|=|z+1|^2\cdot|z-2|$,且 $|z+1|^2=(z+1)(\overline{z}+1)=2+2\mathrm{Re}(z)$,$|z-2|^2=(z-2)(\overline{z}-2)=5-4\mathrm{Re}(z)$.令 $z=x+y\mathrm{i}$,$x,y\in\mathbf{R}$,$x\in[-1,1]$,故

$$|z^3-3z-2|=(2+2x)\sqrt{5-4x}\leqslant\left[\frac{(2+2x)+(2+2x)+(5-4x)}{3}\right]^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3},$$

当且仅当 $z=\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 时,$|z^3-3z-2|_{\min}=3\sqrt{3}$.

5. 构造复数 $z_1=x+y\mathrm{i}$,$z_2=a+b\mathrm{i}$,则 $|z_1|\leqslant 1$,$|z_2|\leqslant\sqrt{2}$.又 $z_1^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$,$z_1^2z_2=a(x^2-y^2)-2bxy+[b(x^2-y^2)+2axy]\mathrm{i}$,所以 $b(x^2-y^2)+2axy=\mathrm{Im}(z_1^2z_2)$.故 $|b(x^2-y^2)+2axy|=|\mathrm{Im}(z_1^2z_2)|\leqslant|z_1^2z_2|=|z_1|^2\cdot|z_2|=\sqrt{2}$.

6. 由 $\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}=|(2k-1)+a_k\mathrm{i}|$,$k=1,2,\cdots,n$,得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}|(2k-1)+a_k\mathrm{i}|\geqslant|\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)+(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k)\mathrm{i}|=|n^2+17\mathrm{i}|=\sqrt{n^4+17^2}$,显然等号可以取到,故 $S_n=\sqrt{n^4+17^2}>0$.

若 $S_n\in\mathbf{Z}$,则有 $(S_n-n^2)(S_n+n^2)=17^2$,于是有 $S_n-n^2=1$ 且 $S_n+n^2=17^2$,解得 $n=12$.

7. 若 $n<0$,由 $|z^{2n}-1|=|z^{-2n}-1|$ 知,只需考虑 $n\geqslant 0$ 的情形.

当 $n=0$ 时,$|z^{2n}-1|=0$,结论成立.

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,设 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,由题设,$\cos\theta$,$\sin\theta$ 均为有理数,且

$$|z^{2n}-1|=|\cos 2n\theta+\mathrm{i}\sin 2n\theta-1|=|2\sin n\theta|=|2\cdot\frac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n-(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^n}{2\mathrm{i}}|=$$
$$|2[C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots]|.$$

由 $\cos\theta$,$\sin\theta$ 为有理数,所以上式为有理数,即 $|z^{2n}-1|$ 为有理数.

8. 如图 18－5. 设 $z = x + yi(x, y \in \mathbf{R})$，则

$x^2 + y^2 = 1(y > 0)$. ①

记 $\arg(z - z_1) = \alpha, \arg(z - z_2) = \beta$，则

$\varphi = \alpha - \beta$，且 $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. ②

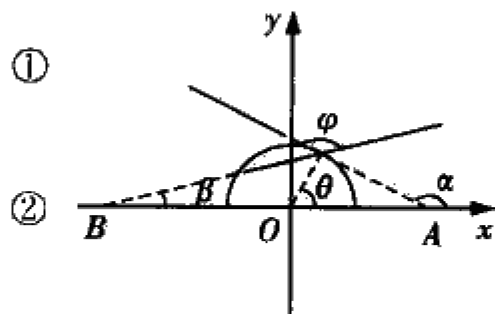


图 18－5

因为 $\tan\alpha = \frac{y}{x-2}, \tan\beta = \frac{y}{x+3}$，

所以 $\tan\varphi = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{5y}{x-5}$.

根据 ①，可设 $x = \cos\theta, y = \sin\theta, \theta \in (0, \pi)$，则

$\tan\varphi = \frac{5\sin\theta}{\cos\theta - 5}$. 即 $5\sin\theta - \tan\varphi \cdot \cos\theta = -5\tan\varphi$. ③

方程 ③ 在 $\theta \in (0, \pi)$ 内有实数解的充要条件是 $\left|\frac{-5\tan\varphi}{\sqrt{5^2 + \tan^2\varphi}}\right| \leqslant 1$.

解得 $-\frac{5\sqrt{6}}{12} \leqslant \tan\varphi \leqslant \frac{5\sqrt{6}}{12}$. ④

由 ②，④ 可得 $\varphi_{\min} = \pi - \arctan\frac{5\sqrt{6}}{12}$.

此时 P 的坐标为 $(\frac{1}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5})$.

习题 B

1. 由题设知，$z, \omega, 3$ 对应的向量可构成首尾相连的三角形，或共线的三线段，且 $|z| + |\omega| = 4$. 则问题等价于"$\triangle AOB$ 中，已知 α 的对边及其余两边之和，求 $\cos(180° - \alpha)$（即 $\cos(\arg z - \arg\omega)$）的最大值. 易知 $\cos(\arg z - \arg\omega) = 1 - \frac{7}{2|z|\cdot|\omega|} \leqslant 1 - \frac{7}{2[(|z| + |\omega|)/2]^2} = \frac{1}{8}$，故当且仅当 $|z| = |\omega| = 2$ 时，$[\cos(\arg z - \arg\omega)]_{\max} = \frac{1}{8}$.

2. 依题意，知 $2a = 6, F(2,0)$，所以 z_B 满足方程 $|z_B + 2| + |z_B - 2| = 6$. 设点 A 对应复数 z，则 $z_B - 2 = (z-2)(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = (z-2)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i), z_B + 2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}(z - 2\sqrt{3}i)$，所以 $|z_B - 2| + |z_B + 2| = |z-2| + |z - 2\sqrt{3}i|$，故 A 的轨迹方程为 $|z-2| + |z - 2\sqrt{3}i| = 6$，$A$ 的轨迹是以点 $(2,0)$，$(0, 2\sqrt{3})$ 为焦点，长轴长为 6 的椭圆.

3. 同时满足方程 $\arg(z + a + ai) = \frac{\pi}{4}, \arg(z - a - ai) = \frac{5\pi}{4}$ 的复数表示线段 AB 上的点 P，其中 $A(a, a), B(-a, -a)$. $\arg(z - b + bi)$ 可视为 x 轴正方向到射线 CP 所成的角，其中 $C(b, -b)$. 而 AC, BC 的斜率为 $k_{AC} = \frac{a+b}{a-b}, k_{BC} = \frac{a-b}{a+b}$，所以 $\arg(z - b + bi)$ 的取值范围是 $[\arctan\frac{a+b}{a-b}, \pi + \arctan\frac{a-b}{a+b}]$.

4. 设诸点对应的复数是 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$. 以诸点的重心为原点建立复平面,则 $\sum_{k=1}^{n}z_k=0$, $\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}=0$. 令 P 点对应复数 z,则常数 $l=\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|^2=n|z|^2+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$,即有 $|z|^2=\frac{1}{n}(l-\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2)$. 所以当 $l>\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$ 时,轨迹是以重心为圆心的圆;当 $l=\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$ 时,仅有一点,即重心;当 $l<\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$ 时,无轨迹.

5. 设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$,则 $x+y\mathrm{i}=a\cos^4t\cdot\mathrm{i}+2(\frac{1}{2}+b\mathrm{i})\cdot\cos^2t\cdot\sin^2t+(1+c\mathrm{i})\cdot\sin^4t$.

所以$\begin{cases}x=\cos^2t\cdot\sin^2t+\sin^4t=\sin^2t.\\y=a(1-x)^2+2b(1-x)x+cx^2(0\leqslant x\leqslant1),\end{cases}$

即 $y=(a+c-2b)x^2+2(b-a)x+a$. 因 A,B,C 不共线,所以 $a+c-2b\neq0$,可见所给曲线是抛物线弧. AB、BC 的中点坐标分别是 $D(\frac{1}{4},\frac{a+b}{2})$ 与 $E(\frac{3}{4},\frac{b+c}{2})$,所以直线 DE 的方程为 $y=(c-a)x+\frac{1}{4}(3a+2b-c)$.

联立直线与抛物线弧的方程,得 $(a+c-2b)(x-\frac{1}{2})^2=0$,解得 $x=\frac{1}{2}\in(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$,所以抛物线弧与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线 DE 有且只有一个公共点,此点的坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{a+c+2b}{4})$.

6. 如图 18-6,设 Z_1,Z_2 和 Z 对应的复数分别为 z_1,z_2 和 z,其中

$z_1=r_1(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),z_2=r_2(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$.

由于 Z 是 $\triangle OZ_1Z_2$ 的重心,则 $z=\frac{z_1+z_2}{3}$.

所以 $3z=z_1+z_2$

$=(r_1+r_2)\cos\theta+(r_1-r_2)\mathrm{i}\sin\theta.$ ①

设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$,由①,得

$\begin{cases}3x=(r_1+r_2)\cos\theta,\\3y=(r_1-r_2)\sin\theta.\end{cases}$

即$\begin{cases}\frac{3x}{\cos\theta}=r_1+r_2, & ②\\\frac{3y}{\sin\theta}=r_1-r_2. & ③\end{cases}$

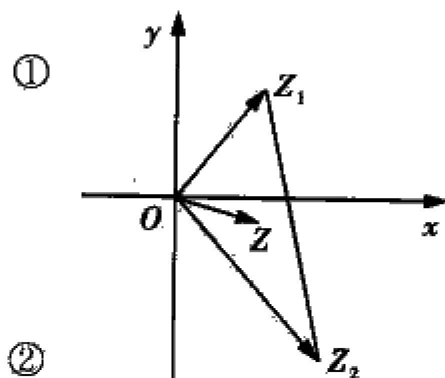


图 18-6

②^2 - ③^2,得 $\frac{9x^2}{\cos^2\theta}-\frac{9y^2}{\sin^2\theta}=4r_1r_2$. ④

又 $\triangle OZ_1Z_2$ 的面积为 S,即 $\frac{1}{2}r_1r_2\sin2\theta=S$.

亦 $r_1r_2=\frac{2S}{\sin2\theta}$. ⑤

由④、⑤，可得点 Z 的轨迹方程为$\frac{9x^2}{\cos^2\theta}-\frac{9y^2}{\sin^2\theta}=\frac{8S}{\sin2\theta}$.

又由①，得

$$\begin{aligned}|3z|^2&=(r_1+r_2)^2\cos^2\theta+(r_1-r_2)^2\sin^2\theta\\&=(r_1-r_2)^2\cos^2\theta+4r_1r_2\cos^2\theta+(r_1-r_2)^2\sin^2\theta\\&=(r_1-r_2)^2+\frac{8S\cos^2\theta}{\sin2\theta}=(r_1-r_2)^2+4S\cot\theta.\end{aligned}$$

当 $r_1=r_2=\sqrt{\frac{2S}{\sin2\theta}}$ 时，$|z|_{\min}=\frac{2}{3}\sqrt{S\cot\theta}$.

第十九章　复数与三角

习题 A

1. 由于 $1+\mathrm{i}\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,

$\tan\theta+\mathrm{i}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\mathrm{i}=\frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)=\frac{1}{\cos\theta}[\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)]$.

$$\text{所以原式}=\frac{[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]^8\cdot\frac{1}{\cos^5\theta}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^5}{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2\cdot\frac{1}{\cos\theta}[\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)]}$$

$$=\frac{1}{\cos^4\theta}[\cos(-4\theta-\frac{\pi}{2})+\mathrm{i}\sin(-4\theta-\frac{\pi}{2})]$$

$$=\frac{1}{\cos^4\theta}(-\sin4\theta-\mathrm{i}\cos4\theta)=-\frac{1}{\cos^4\theta}(\sin4\theta+\mathrm{i}\cos4\theta).$$

2. 因 $\cos4\theta+\mathrm{i}\sin4\theta=[(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2]^2=[(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2\mathrm{i}\cos\theta\sin\theta]^2$.

即 $\cos4\theta+\mathrm{i}\sin4\theta=(\cos^4\theta+\sin^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta)+4\mathrm{i}\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$.

依两复数相等，得 $\sin4\theta=4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$.

令 $\theta=\arcsin x(-1\leqslant x\leqslant1)$，代入上式，得

$$\begin{aligned}\sin(4\arcsin x)&=4\cos(\arcsin x)\sin(\arcsin x)[\cos^2(\arcsin x)-\sin^2(\arcsin x)]\\&=4\sqrt{1-x^2}\,x[(\sqrt{1-x^2})^2-x^2]=4x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

即 $\sin(4\arcsin x)=4x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}$.

3. 因 $x^7-1=0$ 的七个根为 $\cos\frac{2k\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{7}(k=0,1,2,\cdots,6)$. 由韦达定理得七个根之和为0. 于是，有 $1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cdots+\cos\frac{12\pi}{7}=0$. 再由诱导公式易得 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

4. 若 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta, n\in\mathbf{N}^*$，则

$\cos n\theta=\mathrm{Re}(z^n)=\frac{1}{2}(z^n+\overline{z^n})=\frac{1}{2z^n}(z^{2n}+1)$，即 $\sec n\theta=\frac{2z^n}{z^{2n}+1}$.

设 $z=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$，则 $z^9=1$，且 $z^8+z^7+\cdots+z+1=0$.

而 $$M=\sec\frac{2\pi}{9}+\sec\frac{4\pi}{9}+\sec\frac{6\pi}{9}+\sec\frac{8\pi}{9}$$
$$=\frac{2z}{z^2+1}+\frac{2z^2}{z^4+1}+\frac{2z^3}{z^6+1}+\frac{2z^4}{z^8+1}$$
$$=2z\left(\frac{1}{z^2+1}+\frac{z}{z^4+1}+\frac{z^2}{z^6+1}+\frac{z^3}{z^8+1}\right).$$

由于 $(z^4+1)(z^6+1)(z^8+1)=(z+z^6+z^4+1)(z^8+1)$
$=2+z^5+z^3+z^8+z+z^6+z^4=1-z^2-z^7$,

$z(z^2+1)(z^6+1)(z^8+1)=2+z+z^2+z^3+z^6+z^7+z^8=1-z^4-z^5$,

$z^2(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8=-1$,

$z^3(z^2+1)(z^4+1)(z^6+1)=2+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7=1-z-z^8$,

$(z^2+1)(z^4+1)(z^6+1)(z^8+1)=2+2z+2z^2+2z^3+z^4+2z^5+2z^6+z^7+2z^8=-z^4-z^7$,

故 $M=\frac{2z(3+z^3+z^6)}{-z^4-z^7}$. 又 $z^3+z^6=-1$，所以 $M=\frac{2z\cdot(3-1)}{-z\cdot(-1)}=4$.

5.(1) 令 $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{n}}$，则对任意复数 x 有恒等式 $1+x+\cdots+x^{n-1}=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$. (*)

在(*)式中令 $x=-1$，得 $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)\cdots(1+\varepsilon^k)=\frac{1}{2}[1-(-1)^n]$.

又 $1+\varepsilon^k=2\cos\frac{k\pi}{n}e^{i\frac{k\pi}{n}}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，所以 $2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2}[1-(-1)^n]e^{-i\frac{n-1}{2}\pi}$,

两边取模，整理，得 $\prod_{k=1}^{n-1}\left|\cos\frac{k\pi}{n}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n[1-(-1)^n]$.

(2) 在(*)式中令 $x=1$，得 $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1})=n$.

又 $1-\varepsilon^k=-2i\sin\frac{k\pi}{n}e^{i\frac{k\pi}{n}}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，所以 $(-2i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n\cdot e^{-i\frac{n-1}{2}\pi}$,

两边取模，整理得 $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

注　利用本题结论及三角恒等式 $\cos\frac{k\pi}{n}=-\cos\frac{n-k}{n}\pi$，$\sin\frac{k\pi}{n}=\sin\frac{n-k}{n}\pi$，易得 $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$；$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$；$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

6. 当 n 为大于 1 的奇数时，构造排列：$1,2,\cdots,\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2},\cdots,n,\frac{n+1}{2}$ 满足

$a_n=\frac{n+1}{2}$，$a_k+a_{n-k}=n+1\ (k=1,2,\cdots,n-1)$.

记 $S=\sum_{k=1}^{n}a_ke^{i\frac{2k\pi}{n}}$，则 $S=\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}e^{i\frac{2(n-k)\pi}{n}}+a_ne^{i\frac{2n\pi}{n}}=\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}e^{-i\frac{2k\pi}{n}}+a_n$.

所以 $2\mathrm{Re}(S)=\mathrm{Re}(\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}})+\mathrm{Re}(\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_{n-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}})+2a_n$

$$=\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n-1}(a_k+a_{n-k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}})+(n+1)$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}})=0.$$

故 $\mathrm{Re}(S)=0$,得证.

下面证明:若结论对 $m\in\mathbf{N}^*$ 成立,则对 $n=2m$ 亦成立.

假设存在 $1,2,\cdots,m$ 的排列 $b_1,b_2,\cdots,b_m$,使 $\mathrm{Re}(\sum\limits_{k=1}^{m}b_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{m}})=0$.

又 $\mathrm{Re}(\sum\limits_{k=1}^{m}(2k-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k-1)\pi}{m}})$

$$=\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{m}(2m-2k+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2m-2k+1)\pi}{m}})=\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{m}(2m-2k+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k-1)\pi}{m}})$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{m}[(2k-1)+(2m-2k+1)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k-1)\pi}{m}})=m\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k-1)\pi}{m}})=0,$$

即 $\mathrm{Re}(\sum\limits_{k=1}^{m}(2k-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k-1)\pi}{m}})=0$.

构造 $1,2,\cdots,2m$ 的排列为 $1,2b_1,3,2b_2,\cdots,2m-1,2b_m$,则

$$\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n}a_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}})=2\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{m}b_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{m}})+\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k-1)\pi}{m}})=0,$$

即 $n=2m$ 时结论成立.

综上所述,结论成立.

7. 因为 $\sin\alpha=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}$,$\cos\alpha=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}$,所以 $\tan\alpha=\frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}=\frac{1}{\mathrm{i}}(1-\frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha}+1})$.令 $\alpha=\theta+\frac{(j-1)\pi}{n}(j=1,2,\cdots,n)$,则 $\sum\limits_{j=0}^{n}\tan(\theta+\frac{j-1}{n}\pi)=\frac{1}{\mathrm{i}}\sum\limits_{j=0}^{n}(1-\frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\frac{j-1}{n}\cdot2\pi)}+1})=\frac{n}{\mathrm{i}}-\frac{2}{\mathrm{i}}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\frac{j-1}{n}\cdot2\pi)}+1}$,

注意到 $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j+1}=[n+(n-1)\sum\limits_{j=1}^{n}x_j+(n-2)\sum\limits_{(j_1,j_2)}x_{j_1}x_{j_2}+(n-3)\sum\limits_{(j_1,j_2,j_3)}x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}+\cdots+\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1})}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{n-1}}]\div\prod\limits_{j=1}^{n}(x_j+1)$,

其中$(j_1,\cdots,j_k)$表示从 $1,2,\cdots,n$ 中每次取 k 个数组成的所有组合形式.从而

$\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\frac{j-1}{n}2\pi)+1}}=\{n+(n-1)\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\frac{j-1}{n}2\pi)}+(n-2)\sum\limits_{(j_1,j_2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\frac{j_1-1}{n}\cdot2\pi)}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\frac{j_2-1}{n}\cdot2\pi)}+\cdots+\sum\limits_{(j_1,\cdots,j_{n-1})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\frac{j_1-1}{n}\cdot2\pi)}\cdots\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\frac{j_{n-1}-1}{n}\cdot2\pi)}\}\div\{\prod\limits_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\frac{j-1}{n}\cdot2\pi)}+1)\}$,

另一方面，$z^n-e^{i2n\theta}=0$的n个不同根是$e^{i2\theta},e^{i(2\theta+\frac{2\pi}{n})},\cdots,e^{i(2\theta+\frac{n-1}{n}\cdot 2\pi)}$.由韦达定理，知$\sum_{j=1}^{n}e^{i(2\theta+\frac{j-1}{n}2\pi)}=0$，$\sum_{(j_1,j_2)}e^{i(2\theta+\frac{j_1-1}{n}2\pi)}\cdot e^{i(2\theta+\frac{j_2-1}{n}\cdot 2\pi)}=0,\cdots,\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1})}e^{i(2\theta+\frac{j_1-1}{n}2\pi)}\cdot e^{i(2\theta+\frac{j_2-1}{n}\cdot 2\pi)}\cdots e^{i(2\theta+\frac{j_{n-1}-1}{n}\cdot 2\pi)}=0$，

$\prod_{j=1}^{n}e^{i(2\theta+\frac{j-1}{n}2\pi)}=(-1)^{n+1}e^{i2n\theta}$.

又由于$\prod_{j=1}^{n}(z-e^{i(2\theta+\frac{j-1}{n}\cdot 2\pi)})=z^n-e^{i2n\theta}$，令$z=-1$，有$\prod_{j=1}^{n}(-1-e^{i(2\theta+\frac{j-1}{n}\cdot 2\pi)})=(-1)^n-e^{i2n\theta}$，即$\prod_{j=1}^{n}(1+e^{i(2\theta+\frac{j-1}{n}\cdot 2\pi)})=(-1)^{n+1}\cdot e^{i2n\theta}+1$.

因此，$\sum_{j=1}^{n}\tan(\theta+\frac{j-1}{n}\pi)=\frac{n}{i}-\frac{2}{i}\cdot\frac{n}{(-1)^{n+1}e^{i2n\theta}+1}$.

当n为奇数时，
$$\sum_{j=1}^{n}\tan(\theta+\frac{j-1}{n}\pi)=\frac{n}{i}-\frac{2}{i}\cdot\frac{n}{e^{i2n\theta}+1}=\frac{n}{i}(1-\frac{2}{e^{i2n\theta}+1}$$
$$=\frac{n}{i}\cdot i\tan n\theta=n\tan n\theta.$$

当n为偶数时，
$$\sum_{j=1}^{n}\tan(\theta+\frac{j-1}{n}\pi)=\frac{n}{i}-\frac{2n}{i(-e^{i2n\theta}+1)}=\frac{n}{i}(1-\frac{2}{-e^{i2n\theta}+1})$$
$$=\frac{n}{i}\frac{e^{i2n\theta}+1}{e^{i2n\theta}-1}=\frac{n}{i}\cdot\frac{1}{i\tan n\theta}=n\cot n\theta.$$

第二十章　复数与方程

习题 A

1. 设$z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，代入原方程，得$x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=a$.根据复数相等的充要条件，得
$$\begin{cases}x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a, & ①\\ 2xy=0. & ②\end{cases}$$
由②得$x=0$或$y=0$.所以原方程若有解，其解为实数或纯虚数.

下面分别加以讨论.

(1) 若$y=0$，问题变为实数范围内解方程$x^2+2|x|=a$. ③

解方程③，得$|x|=-1+\sqrt{1+a}$.所以原方程的实数解是$z=\pm(-1+\sqrt{1-a})$.

(2) 若$x=0$，由于$y=0$的情形已作讨论，现只考察$y\neq 0$的情形，即求原方程的纯虚数解$z=yi(y\neq 0)$.此时，①化为$-y^2+2|y|=a$. ④

解方程④，得$|y|=1\pm\sqrt{1-a}(0\leqslant a\leqslant 1)$.

即当$0\leqslant a\leqslant 1$时，原方程的纯虚数解是$z=\pm(1+\sqrt{1-a})i$或$z=\pm(1-\sqrt{1-a})i(a\neq 0)$.而当$a>1$时，方程④无实根，原方程无纯虚数解.

2. 设方程的实根为x_0，则$a(1+i)x_0^2+(1+a^2i)x_0+a^2+i=0$，即

$(ax_0^2+x_0+a^2)+(ax_0^2+a^2x_0+1)i=0$.

根据复数相等的充要条件,得$\begin{cases} ax_0^2 + x_0 + a^2 = 0, & ① \\ ax_0^2 + a^2 x_0 + 1 = 0. & ② \end{cases}$

② - ①,并整理,得 $(x_0 - 1)(a^2 - 1) = 0$.所以 $x_0 = 1$ 或 $a^2 = 1$.

当 $x_0 = 1$ 时,代入①,有 $a^2 + a + 1 = 0$.

显然,此方程无实根,与 $a \in \mathbf{R}$ 矛盾.故 $x_0 \neq 1$.

当 $a^2 = 1$ 时,有 $a = \pm 1$.同理 $a = 1$ 也不合适.故 $a = -1$,此时 $x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

综上所述,$a = -1$.

3. 若 $6 \mid (n+2)$ 时,取 $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$,则 $\omega^{n+1} - \omega^n - 1 = \omega^5 - \omega^4 - 1 = e^{i\frac{5\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1 = (\cos\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3} - 1) + i(\sin\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}) = 0$,即 $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ 是方程 $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ 的模为 1 的复根.

若方程 $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ 有根 ω,且 $|\omega| = 1$.则 $\omega^{n+1} - \omega^n - 1 = 0$,即 $\omega^n(\omega - 1) = 1$.两边取模有 $|\omega^n||\omega - 1| = 1$,即 $|\omega - 1| = 1$.故 ω 为圆 $|z| = 1$ 与圆 $|z - 1| = 1$ 的交点所对应的复数.从而 $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$.因此 $\omega^k = 1$ 当且仅当 $6 \mid k (k \in \mathbf{Z})$.

又因 $\omega^3 = -1$,而 $\omega \neq 1$,故 $\omega^2 - \omega + 1 = 0$,即 $\omega - 1 = \omega^2$.

由 $\omega^{n+1} - \omega^n - 1 = 0$,有 $0 = \omega^n(\omega - 1) - 1 = \omega^n \cdot \omega^2 - 1$,即 $\omega^{n+2} = 1$,故 $6 \mid (n+2)$.

综上,命题成立.

4. 易知 $|AB| = |AC|$ 且 $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$,故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

设 $z = x + yi(x, y \in \mathbf{R})$,则以斜边 BC 为直径的圆的方程是 $x(x-2) + (y+1)(y-3) = 0$,即 $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$.设 $\alpha = a + bi, \beta = c + di(a, b, c, d \in \mathbf{R})$,代入已知方程,变形得 $x^2 + y^2 + 2ax - 2by + c + di = 0$.于是,有 $d = 0$ 且 $x^2 + y^2 + 2ax - 2by + c = 0$.对比系数,可得 $a = -1, b = 1, c = -3$.故 $\alpha = -1 + i, \beta = -3$.

5. 由 $|\omega| = 1$,可设 $\omega = \cos\theta + i\sin\theta$,从而 $(\frac{1 + ix}{1 - ix})^n = \cos\theta + i\sin\theta$.

于是 $\frac{1 + ix}{1 - ix} = \cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n} (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$.应用合分比定理,得

$$-ix = \frac{1 - \cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} - i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}}{1 + \cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

$$x = \frac{2\sin^2\frac{\theta + 2k\pi}{2n} - 2i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2n}}{2\cos^2\frac{\theta + 2k\pi}{2n} + 2i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2n}}$$

$$= \tan\frac{\theta + 2k\pi}{2n} \cdot \frac{i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{2n} + \cos\frac{\theta + 2k\pi}{2n}}{\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{2n}}$$

$$= \tan\frac{\theta + 2k\pi}{2n}.$$

由 $k=0,1,2,\cdots,n-1$，便可得出原方程的 n 个不同的实数根：$\tan\frac{\theta}{2n},\tan\frac{\theta+2\pi}{2n},\cdots,\tan\frac{\theta+2(n-1)\pi}{2n}$. ①

6. 设方程 $x^3-x^2-ax-b=0$

的3个正根为 x_1,x_2,x_3. 又设方程 $x^3-x^2+bx+a=0$ ②

的3个根为 y_1,y_2,y_3，由韦达定理得 $x_1+x_2+x_3=1$, ③

$x_1x_2+x_2x_2+x_3x_1=-a$, ④

$x_1x_2x_3=b$, ⑤

$y_1+y_2+y_3=1$, ⑥

$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=b$, ⑦

$y_1y_2y_3=-a$. ⑧

由④,⑤在 $a<0,b>0$，因此方程②的系数恰好正负相间. 这说明方程②不可能有负数根和零根，由于方程②是三次方程，故它必有一实根，此根只可能是正根.

为证方程②还有一对共轭虚根，只需证明它不可能有3个正根，以下应用反证法.

假设 $y_1,y_2,y_3\in\mathbf{R}^+$. 由⑥,⑧知 $1=y_1+y_2+y_3\geqslant 3\sqrt[3]{y_1y_2y_3}=3\sqrt[3]{-a}$.

所以 $0<-a\leqslant\frac{1}{27}$. ⑨

由⑦知 $b\geqslant 3\sqrt[3]{y_1^2y_2^2y_3^2}=3\sqrt[3]{a^2}$.

同理由④,⑤可得 $(-a)^3\geqslant 27b^2$. 所以 $9\sqrt[3]{a^4}\leqslant b^2\leqslant\frac{1}{27}(-a)^3$.

从而 $(-a)^9\geqslant 3^{15}\cdot a^4$，即 $-a\geqslant 27$. 与⑨矛盾. 故命题得证.

7. (1) 由虚根成对定理，可知 $\alpha-\beta i$ 也是方程的根，于是 $\begin{cases}a+b+c=2\alpha,\\ ab+bc+ca=\alpha^2+\beta^2.\end{cases}$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $c=2\alpha-(a+b)$. 令 $a+b=u$，则 $\alpha^2+\beta^2=ab+u(2\alpha-u)\leqslant\frac{1}{4}u^2+u(2\alpha-u)$. 于是有 $-\frac{3}{4}u^2+2\alpha u>\alpha^2$. 解这个不等式，可知 $\frac{2}{3}\alpha<u<2\alpha$，从而 $c=2\alpha-(a+b)>0$. 所以 a,b,c 都是正实数.

(2) 只需证明 $\sqrt{a}<\sqrt{b}<\sqrt{c}$.

由条件可知 $a(b+c)+bc=\alpha^2+\beta^2>\alpha^2=(\frac{a+b+c}{2})^2$，即 $(a+b+c)^2-4a(b+c)<4bc$. 从而 $a^2-2(b+c)a+(b-c)^2<0$. 于是，由求根公式可知 $a<(b+c)+\sqrt{(b+c)^2-(b-c)^2}=b+c+2\sqrt{bc}=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$. 所以，存在一个以 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 为边长的三角形.

8. 设正三角形中心对应的复数为 z_0，3个复数根对应的复数分别为 $z_1、z_2、z_3$，且

$\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$,

则 $z_2 - z_0 = (z_1 - z_0)\omega, z_3 - z_0 = (z_1 - z_0)\omega^2$.

由韦达定理知

$z_1 + z_2 + z_3 = (1 + \omega + \omega^2)z_1 + (2 - \omega - \omega^2)z_0 = 3z_0 = 0$,

$t = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = (\omega + \omega^2 + \omega^3)z_1^2 = 0$,

$s = -z_1 z_2 z_3 = -z_1^3$.

又 $|z_1| = |z_1 - z_0| = 1$,则 $|s| = 1$.

故 $s = \cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

第二十一章 复数与几何

习题 A

1.设三角形三顶点对应的复数分别为 z_1, z_2, z_3,H 对应的复数为 z,则$\frac{z - z_1}{z_3 - z_2}, \frac{z - z_2}{z_3 - z_1}$ 都是纯虚数,于是 $\frac{z - z_1}{z_3 - z_2} = -\frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2}, \frac{z - z_2}{z_3 - z_1} = -\frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}$.

消去$\bar{z}$,并结合 $z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1$,可得 $z = z_1 + z_2 + z_3$ 即为垂心对应的复数.

2. 因 z_1、z_2、z_3 共线,故$\overrightarrow{z_1 z_2}$ 与$\overrightarrow{z_1 z_3}$ 共线.则$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbf{R}$ 或 $\mathrm{Im}\,\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 0$,

即 $\mathrm{Im}(z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = 0$.

故 $\mathrm{Im}(\bar{z}_2 \cdot z_3 - z_1 \cdot \bar{z}_2 - z_3 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_1) = 0$.

而 $\mathrm{Im}(\bar{z}_1 \cdot z_2) = -\mathrm{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$,

$\mathrm{Im}(\bar{z}_3 \cdot z_1) = -\mathrm{Im}(z_3 \cdot \bar{z}_1)$,

$\mathrm{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_1) = 0$,

故 $\mathrm{Im}(\bar{z}_1 \cdot z_2 + \bar{z}_2 \cdot z_3 + \bar{z}_3 \cdot z_1) = 0$,

即$\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1 \in \mathbf{R}$.

3. **证法 1** 我们知道,以 $A = 1, B = \omega, C = \omega^3$ 为顶点的三角形是正三角形,且 $\triangle ABC$ 是正向绕行的.因此,若 $\triangle Z_1 Z_2 Z_3$ 是正向绕行的正三角形,则它与 $\triangle ABC$ 直接相似.于是有$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 1} = -\omega^2$,即 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$.

反之,若 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$,由于上面的推导是可逆的,反推上去得

$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 1}$,

即 $\triangle Z_1 Z_2 Z_3$ 与 $\triangle ABC$ 直接相似,也就是说 $\triangle Z_1 Z_2 Z_3$ 是正向绕行的正三角形.

证法 2 如图 21 - 16 所示,$\triangle Z_1 Z_2 Z_3$ 是正向绕行的正三角形的充要条件是:将向量$\overrightarrow{Z_1 Z_2}$ 绕 Z_1 按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$ 后与向量$\overrightarrow{Z_1 Z_3}$ 重合.又 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = -\omega^2$,于是有$\overrightarrow{Z_1 Z_3} = \overrightarrow{Z_1 Z_2} \cdot (-\omega^2)$,即 $z_3 - z_1$

$=(z_2-z_1)\cdot(-\omega^2)$,化简得 $z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3=0$,此即 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为正向绕行的正三角形的充要条件.

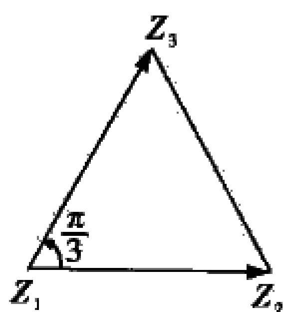


图 21 - 16

4. 设 P,A,B,C 对应复数 z,z_1,z_2,z_3,知

$$\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}+\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}=1.$$

所以 $\frac{uv}{ab}+\frac{vw}{bc}+\frac{wu}{ca}\geqslant 1$,

故 $\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}+\frac{w}{c}\right)^2\geqslant 3\left(\frac{uv}{ab}+\frac{vw}{bc}+\frac{wu}{ca}\right)\geqslant 3$,

从而结论成立.

5. 设四边形四个顶点分别为 A、B、C、D,各边中点依次为 M、N、E、F.由题设,得

$|MN|+|EF|=\frac{1}{2}(|AB|+|BC|+|CD|+|DA|)$.

利用中点公式,化简可得

$|(A-D)+(B-C)|+|(B-A)+(C-D)|=|A-D|+|B-C|+|B-A|+|C-D|$.

故只有 $|(A-D)+(B-C)|=|A-D|+|B-C|$,

$|(B-A)+(C-D)|=|B-A|+|C-D|$.

故求得 $A-D=B-C$,即 $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$,故 $ABCD$ 为平行四边形.

6. 设 C、D 的坐标分别为 (y_1^2,y_1),(y_2^2,y_2).由题设,得 $B-C=(D-C)\mathrm{i}$,得 B 的坐标为 $(y_1^2+y_1-y_2,y_2^2-y_1^2+y_1)$.

代入直线方程得 $y_2^2-2y_1^2+y_2-4=0$,

又 $\frac{y_1-y_2}{y_1^2-y_2^2}=1$,解得 $y_1=-1,y_2=2$ 或 $y_1=-2,y_2=3$.

故正方形面积为 $|CD|^2=18$ 或 $|CD|^2=50$.

7. 以 C 为原点建立复平面,设 $\angle ACB=\theta$.记 $\overrightarrow{CA}=1$.

则 $\overrightarrow{DB}=\frac{|DB|}{|DA|}\cdot\overrightarrow{DA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(90^\circ+\theta)}=\frac{|BC|}{|AC|}(1-D)\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$=\overrightarrow{CB}(1-D)\mathrm{i}=B(1-D)\mathrm{i}$.

又 $\overrightarrow{DB}=B-D$,则 $B(1-D)\mathrm{i}=B-D$.

所以 $D=\frac{B\mathrm{i}-B}{B\mathrm{i}-1}$.

故 $\frac{|AB|\cdot|CD|}{|AC|\cdot|BD|}=\frac{|B-1|\cdot\left|\frac{B\mathrm{i}-B}{B\mathrm{i}-1}\right|}{\left|B-\frac{B\mathrm{i}-B}{B\mathrm{i}-1}\right|}=\frac{|B|\cdot|B-1|\cdot|\mathrm{i}-1|}{|B|\cdot|B-1|}=\sqrt{2}$.

8. 如图 21 - 17,设 $AB=2t$,$AD=2$.则 $\odot O$: $|=\sqrt{1+t^2}$.

用 z_M 表示 z_P、z_Q、z_R、z_S,从而表示 $\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{RS}$.

注意到 $\mathrm{Re}^2 z_M=\mathrm{Im}^2 z=1+t^2$,易得 $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PQ}\cdot\mathrm{i}$.

习题 B

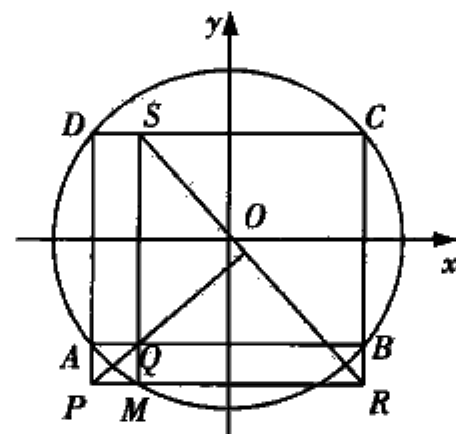


图 21 - 17

1. 置三角形于复平面,并设$\overrightarrow{AB}=z_1,\overrightarrow{BC}=z_2,\overrightarrow{CA}=z_3$,

则 $z_1+z_2+z_3=0$.

而$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(z_1-z_3)$.

同理$\overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}(z_2-z_1),\overrightarrow{CO}=\frac{1}{3}(z_3-z_2)$.

故 $AB^2+BC^2+CA^2-3(OA^2+OB^2+OC^2)$

$=z_1\cdot\overline{z}_1+z_2\cdot\overline{z}_2+z_3\cdot\overline{z}_3-\frac{1}{3}[(z_1-z_3)(\overline{z}_1-\overline{z}_3)+(z_2-z_1)(\overline{z}_2-\overline{z}_1)+(z_3-z_2)(\overline{z}_3-\overline{z}_2)]$

$=\frac{1}{3}(z_1\cdot\overline{z}_1+z_2\cdot\overline{z}_2+z_3\cdot\overline{z}_3+z_1\cdot\overline{z}_2+z_1\cdot\overline{z}_3+\overline{z}_1\cdot z_2+\overline{z}_1\cdot z_3+z_2\cdot\overline{z}_3+\overline{z}_2\cdot z_3)$

$=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)(\overline{z}_1+\overline{z}_2+\overline{z}_3)=0$.

则 $AB^2+BC^2+CA^2=3(OA^2+OB^2+OC^2)$.

2. 设$\overrightarrow{AO}=x\cdot\overrightarrow{AB}$,则$\overrightarrow{OB}=(1-x)\cdot\overrightarrow{AB}$,其中$0<x<1$.有

$OC=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{CA}+x\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})|=|(1-x)\cdot\overrightarrow{CA}+x\cdot\overrightarrow{CB}|$

$<(1-x)\cdot CA+x\cdot CB$.(因为向量$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{CB}$不平行)

由此得到

$OC\cdot AB<CA\cdot(1-x)\cdot AB+CB\cdot x\cdot AB$

$=CA\cdot OB+CB\cdot OA$.

3. 设$\overrightarrow{O_1O_3}$是向量$\overrightarrow{O_1O_2}$旋转60°得到的向量,A'、B'是A、B当$\odot O_1$作一旋转时的象点,如图 21 - 18.

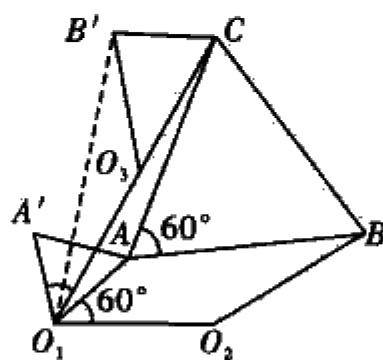


图 21 - 18

当$\overrightarrow{O_1A}$、$\overrightarrow{O_2B}$以相同角速度作匀速转动时,$\triangle O_1AA'$将绕着O_1,从而$\overrightarrow{O_3B'}$和$\overrightarrow{B'C}(=\overrightarrow{A'A})$将绕着$O_3$以相同的角速度旋转.于是,它们的和向量$\overrightarrow{O_3C}$也绕着$O_3$以相同的角速度作圆周运动.

4. 以点 R 为复平面原点,点 A 置于负实轴上.

且设 $z_A=-1$,则 $z_B=\cos30°+\mathrm{i}\sin30°$.

因$\frac{BP}{BC}=\frac{AQ}{AC}=\frac{\sin30°}{\sin105°}=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$,

则 $z_P=z_B+\overrightarrow{BP}=z_B+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}(z_C-z_B)\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$,

$z_Q=z_A+\overrightarrow{AQ}=z_A+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}(z_C-z_A)\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$.

容易验证 $z_Q=\mathrm{i}\cdot z_P$.

故 $\angle PRQ=90°,QR=PR$.

5. 设复数 u,v,ω,z 和向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$对应,则有 $u+v+\omega+z=0$,于是

$$|u\omega-vz|^2=|u\omega+v(u+v+\omega)|^2=|u+v|^2\cdot|v+\omega|^2=m^2n^2.$$

又 $|u\omega-vz|^2=(u\omega-vz)(\overline{u\omega}-\overline{vz})=|u\omega|^2+|vz|^2-(u\omega\overline{vz}+\overline{u\omega}vz)$,

因为 $|u\omega|=ac$, $|vz|=bd$,所以本题转化为证明下列等式:

$u\omega\overline{vz}+\overline{u\omega}vz=2abcd\cos(A+C)$.

这只要检验复数 $u\omega\overline{vz}$ 和$\overline{u\omega}vz$ 的辐角都等于 $x(\angle A+\angle C)$.这是显然的.

6.置图形于复平面.设 $\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,则 $\omega,\overline{\omega}$ 是 -1 的虚立方根,有性质:

$\omega\overline{\omega}=1,\omega^2=-\overline{\omega},\omega+\overline{\omega}=1$.

故 $z_E=\overrightarrow{BE}+z_B=\overrightarrow{BA}\cdot\omega+z_B=(z_A-z_B)\omega+z_B=\omega z^A+\overline{\omega}z_B$.

所以 $3z_{O_1}=z_A+z_B+z_E=(1+\omega)z_A+(1+\overline{\omega})z_B$,

同理,$3z_{O_3}=(1+\omega)z_C+(1+\overline{\omega})z_D$.

所以 $3\overrightarrow{O_1O_3}=(1+\omega)(z_C-z_A)+(1+\overline{\omega})(z_D-z_B)$.

同理,$3\overrightarrow{O_2O_4}=(1+\omega)(z_D-z_B)+(1+\overline{\omega})(z_A-z_B)$.

所以$\frac{\overrightarrow{O_1O_2}}{O_2O_4}=\frac{(z_C-z_A)+(1-\omega)(z_D-z_B)}{(z_D-z_B)+(1-\omega)(z_A-z_C)}=\frac{(z_C-z_A)+\overline{\omega}(z_D-z_B)}{(z_D-z_B)+\omega(z_A-z_C)}$.

所以分子与分母共轭的积 $=(z_C-z_A)(\overline{z_D-z_B})+(z_D-z_B)\cdot(\overline{z_A-z_C})+\omega(z_C-z_A)\cdot(\overline{z_A-z_C})+\overline{\omega}(z_D-z_B)(\overline{z_D-z_B})$(因为 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|=z_{AC}\overline{z_{BD}}-z_{BD}\overline{z_{AC}}+(\omega+\overline{\omega})|\overrightarrow{AC}|^2$,显然为纯虚数).

故 $O_1O_3\perp O_2O_4$.

7. 设$\triangle ABC$的外心O为复平面上的原点,$\triangle ABC$的外接圆半径为1,点A,B,C对应的复数为u,v,ω.则$\triangle ABC$的内心I、BC的中点D、AC的中点E对应的复数分别为$x=\frac{au+bv+c\omega}{a+b+c}$,$y=\frac{1}{2}(v+\omega)$,$z=\frac{1}{2}(u+\omega)$,这里 a,b,c 为$\triangle ABC$的三边长.

注意到,点 O,D,E 到$\frac{1}{2}\omega$对应的复数的距离都为$\frac{1}{2}$,于是,欲证 O,D,E,I 四点共圆,只需证明 $|x-\frac{1}{2}\omega|=\frac{1}{2}$,即证 $|2x-\omega|=1$.由于 $a+b=2c$,于是$2x-\omega=\frac{2au+2bv-c\omega}{3c}$.因而只需证 $|2au+2bv-c\omega|=3c$.

为此,设 $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},v=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta},\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}r}$,则

$a^2=|\omega-v|^2=2-(\omega\overline{v}+\overline{\omega}v)=2[1-\cos(\beta-r)]$.

于是 $\cos(\beta-r)=1-\frac{1}{2}a^2$.类似可证 $\cos(r-\alpha)=1-\frac{1}{2}b^2$,$\cos(\beta-\alpha)=1-\frac{1}{2}c^2$.

注意到 $|2au+2bv-c\omega|^2$

$=(2au+2bv-c\omega)(2a\overline{u}+2b\overline{v}-c\overline{\omega})$

$=4a^2+4b^2+c^2+4ab(u\overline{v}+\overline{u}v)-2ac(\omega\overline{u}+\overline{\omega}u)-2bc(v\overline{\omega}+\overline{v}\omega)$

$=4a^2+4b^2+c_2+8ab\cos(\beta-\alpha)-4ac\cos(r-\alpha)-4bc\cos(r-\beta)$

$= 4^2 + 4b^2 + c^2 + 8ab(1 - \frac{1}{2}c^2) - 4bc(1 - \frac{1}{2}b^2) - 4bc(1 - \frac{a^2}{2})$

$= 4a^2 + 4b^2 + c^2 + 8ab - 4(a+b)c + 2abc(a + b - 2c)$

$= 4(a+b)^2 + c^2 - 4(a+b)c$

$= 16c^2 + c^2 - 8c^2 = 9c^2$,

所以,命题成立.

8. 用点的字母表示对应的复数.依据定比分点公式,得

$M = (1-r)A + rC, M = (1-r)C + rE$.

因为 B、M、N 三点共线,所以有 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ B & M & N \\ \overline{B} & \overline{M} & \overline{N} \end{vmatrix} = 0$,

即 $\begin{vmatrix} 1 & (1-r)+r & (1-r)+r \\ B & (1-r)A + rC & (1-r)C + rE \\ B & (1-r)\overline{A} + r\overline{C} & (1-r)\overline{C} + r\overline{E} \end{vmatrix} = 0$,

从而可得 $(1-r)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ B & A & C \\ \overline{B} & \overline{A} & \overline{C} \end{vmatrix} + (1-r)r \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ B & A & E \\ \overline{B} & \overline{A} & \overline{E} \end{vmatrix} + r^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ B & C & E \\ \overline{B} & \overline{C} & \overline{E} \end{vmatrix} = 0$.

注意到 $\triangle BAC$ 和 $\triangle BAE$ 同向,而二者与 $\triangle BCE$ 反向,而又知 $S_{\triangle BAE} = S_{\triangle BEC} = 2S_{\triangle ABC}$,于是,结合上面的关系,便有 $(1-r)^2 + 2(1-r)r - 2r^2 = 0$,

即 $3r^2 - 1 = 0$,解得 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9.(1) 设 $A_k = \varepsilon^k (k = 1, 2, \cdots, n)$,$\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{n}i}$.如图 21 - 19,$P = e^{i\theta} (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n})$.

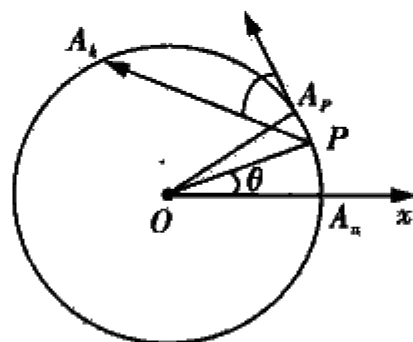


图 21 - 19

易知,$\angle A_1PA_k = \frac{\pi}{n}(k-1)$,故 $\arg[\overrightarrow{PA_k} \cdot e^{-\frac{\pi}{n}(k-1)i}] = \arg(\overrightarrow{PA_k})$,$k = 1, 2, \cdots, n$.

故 $\sum_{k=1}^{n} |PA_k| = \sum_{k=1}^{n} |e^{-\frac{\pi}{n}(k-1)i} \cdot (A_k - P)|$

$= |\sum_{k=1}^{n} P \cdot \exp(-\frac{(k-1)\pi}{n}i) - \exp(\frac{(k+1)\pi}{n}i)|$

$= |\frac{2P}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}i}} - \frac{2e^{\frac{2\pi}{n}i}}{1 - e^{\frac{\pi}{n}i}}|$

$= 2 \cdot |\frac{P + e^{\frac{\pi}{n}i}}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}i}}| = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2n})}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

因为 $\left|\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2n}\right| \leqslant \frac{\pi}{2n}$，所以当 P 为$\widehat{A_1A_n}$ 的中点时，$\sum_{k=1}^{n}|PA_k|$ 最大，最大值为 $2\csc\frac{\pi}{2n}$；当 P 为 A_1 或 A_k 时，$\sum_{k=1}^{n}|PA_k|$ 最小，最小值为 $2\cot\frac{\pi}{2n}$.

(2) 若 P 不限制在圆上，则有

$$\sum_{k=1}^{n}|PA_k| = \sum_{k=1}^{n}|A_k - P| = \sum_{k=1}^{n}|A_k^{-1}(A_k - P)| \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n}A_k^{-1}(A_k - P)\right|$$

$$= \left|n - P\cdot\sum_{k=1}^{n}A_k^{-1}\right| = n.$$

故当 $P=0$ 时，$\sum_{k=1}^{n}|PA_k|$ 有最小值 n.

第二十二章　多项式的因式分解与求值

习题 A

1. 这是一个关于 x,y,z 的三次齐次轮换式，且当 $x=-(y+z)$ 时，$f(x,y,z)=0$，所以 $f(x,y,z)$ 有因式 $x+y+z$. 从而 $f(x,y,z)$ 的另一个因式应是二次齐次轮换式，故可设 $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz=(x+y+z)[k_1(x^2+y^2+z^2)+k_2(xy+yz+zx)]$，其中 k_1,k_2 为待定常数. 比较上式两端的系数，由于左端没有 x^3,y^3,z^3 的项，故 $k_1=0$. 于是上式化为 $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz=(x+y+z)\cdot k_2(xy+yz+zx)$，令 $x=0,y=1,z=1$，求出 $k_2=1$. 故

$f(x,y,z)=(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

2. 这是一个关于 x,y,z 的五次齐次轮换式，且 $y=z$ 时，$f(x,y,z)=0$，因而 $f(x,y,z)$ 有因式 $y-z,z-x,x-y$(或由 $f(x,y,z)$ 为交代式也有此三个因式). 于是可设 $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5=(y-z)\cdot(z-x)\cdot(x-y)\cdot[k_1(x^2+y^2+z^2)+k_2(xy+yz+zx)]$. 令 $x=0,y=1,z=-1$ 得 $2k_1-k_2=15$，又令 $x=2,y=1,z=0$ 得 $5k_1+2k_2=15$，求解得 $k_1=5,k_2=-5$，故 $f(x,y,z)=5(y-z)(z-x)(x-y)\cdot(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$.

3. 令 $a-x=t$，则 $f(x)=g(t)=t^6-3at^5+\frac{5}{2}a^2t^4-\frac{1}{2}a^4t^4=t^2(t^4-3at^3+\frac{5}{2}a^2t-\frac{1}{2}a^4)=t^2(t^2+pt+q)(t^2+lt+k)$. 由此可求得 $p=-2a,q=a^2,l=-a,k=-\frac{1}{2}a^2$，于是 $g(t)=t^2\cdot(t-a)^2[t(t-a)-\frac{1}{2}a^2]=(a-x)^2\cdot x^2\cdot(x^2-ax-\frac{1}{2}a^2)$. 当 $0<x<a$ 时，$(a-x)^2\cdot x^2>0$，而 $x^2-ax-\frac{1}{2}a^2=-x(a-x)-\frac{1}{2}a^2<0$，故当 $0<x<a$ 时，$f(x)<0$.

4. 由题设有常数 A,B 和 C,D，使得 $p(x)=(x^2+x+2)(Ax+B)+x+2=(x^2+x-2)\cdot(Cx+D)+3x+4$，即有 $Ax^3+(A+B)x^2+(2A+B+1)x+2+2B=Cx^3+(C+D)x^2+(D-2C+3)x+4-2D$. 于是由 $A=C,A+B=C+D,2A+B-1=B-2A+3,2+2B=4-2D$，求得 $A=C=\frac{1}{2},B=D=\frac{1}{2}$，有 $p(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2+\frac{5}{2}x+3$，故 $a=\frac{1}{2},b=1,c=\frac{5}{2},d=3$.

5. 设 $f(x)=(x-a)(x-b)\cdot g(x)+mx+n$，由余数定理，知 $f(a)=c,f(b)=d$，即 $ma+$

$n=c, mb+n=d$,求得 $m=\dfrac{c-d}{a-b}, n=\dfrac{ad-bc}{a-b}$,故所求余式为$\dfrac{c-d}{a-b}x+\dfrac{ad-bc}{a-b}$.

6.(1) 令 $x=10$,则 $f(10)=10^4-3\cdot 10^2+9=9709=7\cdot 19\cdot 73$,由于 $7=10-3=x-3, 19=10+9=20-1$,有 $19=x+9$ 或 $2x-1$,而用 $x-3, x+9$ 去除原式,都不能整除,又 $2x-1$ 中 x 的系数为 2,而原式最高次项系数不含因数 2,故这三个式子都不是 $f(x)$ 的因式.注意到 $7\cdot 19=133$,有 x^2+3x+3 能整除 $f(x)$,故 $f(x)=(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$.

(2) 令 $x=10$,则 $f(10)=10^4-6\cdot 10^3+7\cdot 10^2+6\cdot 10-80=4680=2^8\cdot 5\cdot 3^2\cdot 13$,由于在因式 $x-8, x-5, x-7, x+3$ 或 $2x-7$ 中只有 $x-5$ 能整除 $f(x)$,则 $f(x)=(x-5)(x^3-x^2+2x+16)$,又 $x+2$ 能整除 $x^3-x^2+2x+16$,故 $f(x)=(x-5)(x+2)(x^2-3x+8)$.

习题 B

1. 考察反面情形:$g(x), h(x)$ 中至少有一个非零多项式,由于所给多项式都是实系数多项式,从而 $x\cdot[g(x)]^2+x\cdot[h(x)]^2$ 必为非零多项式,且为奇次,然而$[f(x)]^2$ 或为偶次多项式或为零多项式,这表明条件式左、右两边次数不等,与多项式相等矛盾.故 $g(x)=h(x)=0$.从而 $f(x)=0$.

2. 若所给四次多项式能分解成两个整系数二次三项式 x^2+ax+b 和 x^2+cx+d 的乘积,则 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd=x^4+2x^2+2x+2$,即有 $a+c=0$,① $b+ac+d=2$,② $bc+ad=2$,③ $bd=2$,④ 由第④式知 b 和 d 中一个为奇数(等于 ± 1),而另一个为偶数(等于 ± 2).不妨设 b 为奇数,而 d 为偶数,则由③式知,bc 为偶数,因 b 为奇数,则 c 为偶数,所以 $ac+d$ 为偶数,由②可得 b 为偶数矛盾.于是命题获证.

3. 设 $\varphi(x)=x^3+bx^2+cx+d$,因为 $bd+cd$ 是奇数,即$(b+c)d$ 是奇数,所以 $b+c$ 和 d 分别都是奇数.由此可进一步推出 b, c 两数为一奇一偶.

若 $\varphi(x)$ 能分解成两个整系数多项式的乘积,则一定有一个一次因子.由于 $\varphi(x)$ 的首项系数是 1,故不妨设 $\varphi(x)=(x+p)(x^2+qx+r)$,比较常数项可知 $pr=d$.
因为 d 是奇数,故 p 必然也是个奇数.用$(x+p)$ 除 $\varphi(x)$,根据余式定理,余数是

$$\varphi(-p)=-p^3+bp^2-cp+d.$$

不论 b、c 两数中哪个是奇数,哪个是偶数(但总是一奇一偶),余数中总有三项是奇数,一项是偶数,从而余数必然不等于零.故 $\varphi(x)$ 不能分解为两个整系数多项式之乘积.

4. 假设 $p(x)$ 能分解为两个次数大于零的整系数多项式之积,即 $p(x)=g(x)\cdot h(x)$,由 $p(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$,则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为$p(x)=-1$ 的 n 个不同的整数解,即 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 也是$g(x)\cdot h(x)=-1$ 的 n 个不同的整数解.又 $g(x), h(x)$ 是整系数多项式,且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是整数,则 $g(a_i), h(a_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 分别是整数 $1, -1$ 或者 $-1, 1$.故 $g(a_i)+h(a_i)=0(i=1, 2,\cdots,n)$,从而 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是$g(x)+h(x)=0$ 的 n 个不同的整数解.但 $h(x)$ 和 $g(x)$ 是低于 n 次且最高次项系数之积为 1 的多项式,$g(x)+h(x)=0$ 不可能有 n 个不同的解,因而推出矛盾.原结论获证.

5. 假设$f(x)$ 可分解为两个整系数多项式之积 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$,① 其中 $g(x)=a_p\cdot x^p+a_{p-1}\cdot x^{p-1}+\cdots+a_1x+a_0, h(x)=b_qx^q+b_{q-1}\cdot x^{q-1}+\cdots+b_1x+b_0$,且 $a_p=1, b_q=1, p, q, a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, b_0, b_1, \cdots, b_{q-1}\in \mathbf{Z}$.

首先可证：p 和 q 均不小于 2.若不然，不妨设 $p=1$，有 $f(x)=(x+a_0)h(x)$，由 $a_0b_0=3$，有 $a_0=\pm1$ 或 ±3，即 ±1 或 ±3 为 $f(x)=0$ 的解，但 $f(1)=8\neq0$，$f(-1)=(-1)^n+5(-1)^{n-1}+3=(-1)^{n-1}\cdot4+3\neq0$，$f(3)=3^n+5\cdot3^{n-1}+3\neq0$，$f(-3)=(-3)^n+5\cdot(-3)^{n-1}+3\neq0$，所以矛盾，即 p,q 均不小于 2.

设 $2\leqslant p\leqslant q\leqslant n-2$.由 $a_0b_0=3$，不妨设 $a_0=3$，$b_0=1$，设 $a_1,\cdots,a_{p-1}$ 中不能被 3 整除的系数中下标最小的为 a_k，有 $k\leqslant p$，且 $3\mid a_1,3\mid a_2,\cdots,3\mid a_{k-1},3\nmid a_k$，② 考虑 ① 两边 x^k 的系数，有 $0=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k$，即 $a_k=-(a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k)$，由 ② 即得 $3\mid a_k$，矛盾.所以 $f(x)$ 不能分解为两个整系数多项式的乘积.

第二十三章　多项式的根的性质及应用

习题 A

1. 设 x 是一个公共根，则 $x^2+ax+1=0$，①　$x^2+x+a=0$，②　由 ① - ② 得　$(a-1)\cdot(x-1)=0$.若 $a=1$，则方程 ① 和 ② 相同，此时两个多项式有公共根.若 $a\neq1$，则公共根 $x=1$，代入 ①，② 都得 $a=-2$.因此所求 $a=1$ 或 -2.

2. 当 x 是奇数时，$p(x)$ 与 $p(1)$ 的奇偶性相同；当 x 是偶数时，$p(x)$ 与 $p(0)$ 的奇偶性相同.由已知 $p(0)$ 和 $p(1)$ 都是奇数，因此不管 x 取什么整数，$p(x)$ 始终是奇数，从而 $p(x)\neq0$，所以，$p(x)$ 没有整数根.

3. 假设 $\frac{p}{q}$ 是它的有理根，其中 p,q 为整数且最大公约数 $(p,q)=1$，于是有 $a_0q^n+a_1q^{n-1}p+\cdots+a_np^n=0$.①　由此知 p 整除 a_0，q 整除 a_n.于是 p,q 都为奇数，从 $a_kq^{n-k}\cdot p^k$ 为奇数当且仅当 a_k 为奇数.由 ① 式左端是偶数，得 $a_0+a_1+\cdots+a_n$ 是偶数，这与 $f(1)$ 为奇数矛盾.故命题获证.

4. 由韦达定理，有 $\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=1$，$\gamma+\delta=-q$，$\gamma\delta=1$.由此得 $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)\cdot(\beta+\delta)=[\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2]\cdot[\alpha\beta+(\alpha+\beta)\delta+\delta^2]=(1+p\gamma+\gamma^2)(1-p\delta+\delta^2)=(\gamma^2+1+\gamma^2\delta^2+\delta^2)+p(\gamma-\delta-\delta\gamma^2+\gamma\delta^2)-p^2\gamma\delta=(\gamma+\delta)^2+p(\gamma-\delta)(1-\delta\gamma)-p^2=q^2-p^2$.

5. 由韦达定理，a,b,c 应满足 $a+b+c=-a$，①　$ab+bc+ca=b$，②　$abc=-c$.③　如果 $a=0$(或 $b=0$)，由 ③ 得 $c=0$，由 ① 得 $b=0$(或 $a=0$).因此，可以假设 $a\neq0,b\neq0$.如果 $c=0$，由 ② 得 $a=1$，再由 ① 得 $b=-2$.显然 $1,-2,0$ 是方程 $x^3+x^2-2x=0$ 的根.如果 $c\neq0$，则由 ③，$b=-\frac{1}{a}$，由 ① 和 ② 消去 c 后得到 $b^4+b^3-2b^2+2=0$，这个方程仅有的有理根是 $b=-1$，并且 $a=1$，$c=-1$.事实上，方程 $x^3+x^2-x-1=0$ 有 $1,-1,-1$ 作它的根.

习题 B

1. 由题意可知，R 和 P、Q 之一为三次多项式.假设 R 和 Q 为三次多项式，P 为二次多项式，如有必要，可以通过改变符号，使得 R 和 Q 的 x^3 项的系数为正，于是，$R+Q$ 为三次多项式.由 $P^2=R^2-Q^2=(R+Q)(R-Q)$ 知 $R-Q$ 为一次多项式，即 $R-Q=t(x-x_1)$，$t>0$(因为 P^2 中的 x^4 项的系数为正).于是，P^2 可被 $(x-x_1)^2$ 整除.因而 $R+Q$ 可被 $x-x_1$ 整除.又由于 $R-Q$ 可被 $x-x_1$ 整

除,所以,R 和 Q 都被 $x-x_1$ 整除,

即有 $R=(x-x_1)R_1$,$Q=(x-x_1)Q_1$,其中 R_1 和 Q_1 都是首项系数为正的二次多项式.

设 $P=a(x-x_1)(x-x_2)$,则由等式 $a^2(x-x_2)^2=(R_1+Q_1)(R_1-Q_1)$ 推知 $R_1-Q_1=t>0$,其中 t 为常数.

于是,$R_1=Q_1+t$,故 $a^2(x-x_2)^2=(2Q_1+t)t$,即 $Q_1=\frac{a^2}{2t}(x-x_2)^2-\frac{t}{2}$ 是具有两实根的二次多项式.所以,Q 为具有三个实根的三次多项式.

2. 设 $g(x)=0$ 的 n 个根为 $x_i(i=1,\cdots,n)$,则

$$g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x+x_i^2).$$

从而 $f(-1)=\prod_{i=1}^{n}(-1+x_i^2)=\prod_{i=1}^{n}(-1-x_i)\cdot\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)=g(-1)g(1)$.　①

又 $g(1)=\sum_{i=0}^{n}b_i=b_0+\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}b_{2i}+\sum_{i=1}^{[\frac{n+1}{2}]}b_{2i-1}$,

$$g(-1)=\sum_{i=0}^{n}b_i(-1)^{n-i}=(-1)^nb_0+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{[\frac{n+1}{2}]}b_{2i-1}+(-1)^{n-2}\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}b_{2i},$$

$$f(-1)=\sum_{i=0}^{n}a_i(-1)^{n-i}=(-1)^na_0+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}a_i$$

$$=(-1)^n+(-1)^n\sum_{i=1}^{n}(-1)^ia_i,$$

于是 $\sum_{i=1}^{n}(-1)^ia_i=(-1)^nf(-1)-1$.　②

由已知得,$g(-1)$,$g(1)$ 为实数,故由 ① 式得,$f(-1)$ 为实数.

从而,由 ② 式知 $\sum_{i=1}^{n}(-1)^ia_i$ 为实数.

3. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为方程的 n 个正实根,由韦达定理,有 $\sum_{i=1}^{n}x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$,$\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j=\frac{a_{n-2}}{a_n}$,$\cdots$,$\prod_{i=1}^{n-1}x_i+\cdots+\prod_{i=2}^{n}x_i=\frac{-(-1)^{n-1}}{a_n}$,① $\prod_{i=1}^{n}x_i=(-1)^n\cdot\frac{1}{a_n}$.② 由①,②得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=1$.因 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,则 $-1<1-\frac{2}{x_i}<1$,即 $-1<\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{2}{x_i})<1$.而 $\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{2}{x_i})\leqslant[\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{2}{x_i})}{n}]^n=(\frac{n-2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{n})^n=(\frac{n-2}{n})^n$.又 $\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{2}{x_i})=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\prod_{i=1}^{n}(x_i-2)=a_n\prod_{i=1}^{n}(2-x_i)=2^na_n+\cdots+2^2\cdot a_2-2+1\leqslant(\frac{n-2}{n})^2$,即 $2^na_n+\cdots+2^2a_2\leqslant(\frac{n-2}{n})^n+1$.另外,$-1<\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{2}{x_i})=2^na_n+\cdots+2^2a_2-2+1$.故 $0<2^na_n+\cdots+2^2a_2$.

第二十四章　条件多项式的求解

习题 A

1. 将 $x = 1, -2, 0$ 代入题中恒等式,可知多项式有根 0,1,-1,即它被 $x^3 - x$ 整除.其次,将 $p(x) = (x^3 - x)Q(x)$ 代入恒等式,可知多项式 $Q(x)$ 满足恒等式 $Q(x) \equiv Q(x-1)$,由此得到 $Q(0) = Q(-1) = Q(-2) = \cdots$ 因而 $Q(x) \equiv a$,a 为常数.于是,所求多项式为 $p(x) = a(x^3 - x)$.反之,容易验证所有这种形式的多项式也都满足题中的恒等式.

2. 令 $Q'(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{\varepsilon \in A}(\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n)$,其中 $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}(i = 1, 2, \cdots, n)$,$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$,$A$ 是 2^n 个数组 ε 的集合.于是 $Q'(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,且 P, Q' 均为非零整系数多项式.又由对称性知,对任意的 k,都有 $Q'(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n) \equiv Q'(x_1, x_2, \cdots, -x_k, \cdots, x_n)$,从而,含有 x_k 项的 x_k 的指数必为偶数.故 $Q'(x_1, x_2, \cdots, x_n) = Q(x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2)$,故原题获证.

3. 令 $\varphi(x) = f(x) - g(x) \cdot h(x) = d_5 x^5 + d_4 x^4 + \cdots + d_0$,则 $\varphi(10) = 0$.因 $d_k = a_k - \sum_{j=0}^{k} b_j C_{k-j}$,则 $|d_k| \leqslant |a_k| + \sum_{j=0}^{k} |b_j| \cdot |C_{k-j}| \leqslant 4 + (k+1) \leqslant 8(k = 0,1,2)$.当 $k = 3,4,5$ 时,$|d_k| \leqslant 8$ 也成立.若 $d_5 \neq 0$,于是 $|\varphi(10)| \geqslant 10^5 - 8(10^4 + 10^3 + \cdots + 1) = 10^5 - \frac{8}{9}(10^5 - 1) > 0$,导致矛盾,故 $d_5 = 0$.同理 $d_3 = \cdots = d_0 = 0$,从而 $\varphi(x) = 0$.故存在 $f(x)$,使 $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

4. 注意到 $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$,并作代换 $\sin t = x$,我们得到,题中要求的次数小于 4 的多项式是多项式 $S(x) = 7x^{31} + 8x^{13} - 5x^9 - 2$ 除以多项式

$$Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

的余式.因为恒等式 $S(x) = P(x)Q(x) + R(x)$ 对所有 $x \in [-1,1]$ 应当成立,从而对所有 $x \in \mathbf{C}$ 也成立.因为 $(x-1)Q(x) = x^5 - 1$,所以变量 x 有 4 个不同的值,使得 $Q(x) = 0$.对每个这样的 x 值都有 $x^5 = 1$,并且

$$R(x) = S(x) = 7x^{31} + 8x^{13} - 5x^9 - 2 = 7x + 8x^3 - 5x^4 - 2 + 5Q(x)$$
$$= 13x^3 + 5x^2 + 12x + 3.$$

于是 $R(x)$ 和 $13x^3 + 5x^2 + 12x + 3$ 在 4 个不同的点取值相同,但它们的次数都不大于 3,故它们相等.

习题 B

1. 设 P 是满足条件(1) ~ (3) 的 n 次多项式.由于常数多项式不可能同时满足(2) 和(3),故 $n \geqslant 1$.在(2) 中令 $a = b, c = -2a$,则由 P 的齐次性得

$$0 = P(2a, -2a) + P(-a, a) + P(-a, a) = [(-2)^n + 2]P(-a, a).$$

若 $n > 1$,则有 $P(-a, a) = 0$,因而 $P(x, y)$ 能被 $x + y$ 整除.

设 $P(x, y) = (x + y)P_1(x, y)$,则由(2) 得

$$P_1(a + b, c)(a + b + c) + P_1(b + c, a)(a + b + c) + P_1(c + a, b)(a + b + c) = 0,$$

故 $P_1(a+b,c)+P_1(b+c,a)+P_1(c+a,b)=0$，$P_1$ 仍是齐次的，且 $P_1(1,0)=P_1(1,0)(1+0)=P(1,0)=1$，即 P_1 也满足条件(1) ~ (3)，它的次数为 $n-1$.

如果 $n-1>1$，同样可再构造一个 $n-2$ 齐次多项式 P_2，它满足条件(1) ~ (3)，并且

$$P_1(x,y)=(x+y)P_2(x,y),$$

如此下去，最后总会得到一个一次多项式 $P_{n-1}(x,y)=mx+ny$.

由条件(2) 令 $a=1,b=c=0$，得 $2m+n=0$，再由(3) 得 $m=1$，故 $n=-2$，而

$$P(x,y)=(x+y)^{n-1}P_{n-1}(x,y)=(x+y)^{n-1}(x-2y),$$

不难验证这种形状的多项式的确满足条件(1) ~ (3)，这样我们就求出了所有满足条件(1) ~ (3) 的齐次多项式.

2.(1) 由于方程组

$\begin{cases}x-y+1=0\\y-z-1=0\\z-2x+1=0\end{cases}$ 有解 $x=1,y=2,z=1$.因此，当 $x=1,y=2,z=1$ 时，有

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=0.$$

故不存在多项式 P,Q,R，使恒等式 $(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=1$ 成立.

(2) 令 $u=x-y+1,v=y-z-1,w=z-x+1$，则 $(u+v+w)^7=1$. ①

在 ① 式左边展开式的每一项中，u,v,w 的次数至少有一个不小于 3，因此我们可以通过恒等变形得到 $u^3\cdot P+v^3\cdot Q+w^3\cdot R=1$.

故存在多项式 P,Q,R，使恒等式 $(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)^3R=1$ 成立.

3. 首先记 $g(t)=a_0t^n-a_2t^{n-1}+\cdots+(-1)^ja_{2j}t^{n-j}+\cdots+(-1)^na_{2n}$，显然 $f(x)=(-1)^ng(-x^2)$.

设多项式 $f(x)$ 的 $2n$ 个根是 $\pm i\beta_1,\pm i\beta_2,\cdots,\pm i\beta_j$，其中 $\beta_j>0,j=1,2,\cdots,n$，则多项式 $g(t)$ 的 n 个根为 $t_j=\beta_j^2>0,j=1,2,\cdots,n$.因此 $\dfrac{a_{2j}}{a_0}=\sum\limits_{k_1<k_2<\cdots<k_j}t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}>0$.

（在下面几行式子中，符号 $\sum$ 下方未标出的求和范围都是 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant n$.）

$$(C_n^j)^2\frac{a_{2n}}{a_0}=\left(C_n^j\sqrt{\frac{a_{2n}}{a_0}}\right)^2=\left[\sum\sqrt{t_{k_1}\cdots t_{k_j}}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{a_{2n}}{a_0}}}{\sqrt{t_{k_1}\cdots t_{k_j}}}\right]^2$$

$$\leqslant\left(\sum t_{k_1}\cdots t_{k_j}\right)\cdot\left[\sum\frac{\dfrac{a_{2n}}{a_0}}{t_{k_1}\cdots t_{k_j}}\right]=\frac{a_{2j}}{a_0}\cdot\frac{a_{2n-2j}}{a_0}.$$

注意到 $C_{2n}^n=\sum\limits_{j=0}^n(C_n^j)^2$，并根据上式和已知条件(2)，可得

$$C_{2n}^n\cdot\frac{a_{2n}}{a_0}=\sum_{j=0}^n(C_n^j)^2\frac{a_{2n}}{a_0}\leqslant\sum_{j=0}^n\frac{a_{2j}}{a_0}\cdot\frac{a_{2n-2j}}{a_0}\leqslant C_{2n}^n\cdot\frac{a_{2n}}{a_0}.$$

由上式可以看出，对于 $j=1,2,\cdots,n$，在以上两式中的"$\leqslant$"号都恰为"$=$"号.依据 Cauchy 不等式及等号成立的条件可知 $t_1=t_2=\cdots=t_n$.

记 $t_i = r^2(i=1,2,\cdots,n)$,我们有$\frac{a_{2j}}{a_0} = C_n^j \cdot r^{2j}, a_{2j} = a_0 C_n^j r^{2j}, j=1,2,\cdots,n$.

于是 $f(x) = a_0(x^2+r^2)^n, a_0>0, r>0$.

容易验证,这样的多项式 $f(x)$ 满足题目的全部条件.

4.(1) 约定 $F_k(x) = (x-1)f_k(x) + f_k(ax) - a^k x f_k(\frac{x}{a})$.

首先指出:$F_{k+1}(x) = xF_k(x) + F_k(ax)$.事实上,

$$F_{k+1}(x) - xF_k(x)$$

$$= (x-1)f_{k+1}(x) + f_{k+1}(ax) - a^{k+1} x f_{k+1}(\frac{x}{a}) - x(x-1)f_k(x) - xf_k(ax) - a^k x^2 f_k(\frac{x}{a})$$

$$= (x-1)[xf_k(x) + f_k(ax)] + [axf_k(ax) + f_k(a^2x)] - a^{k+1}x[(\frac{x}{a})f_k(\frac{x}{a}) + f_k(x)]$$

$$- x(x-1)f_k(x) - xf_k(ax) - a^k x^2 f_k(\frac{x}{a})$$

$$= (ax-1)f_k(ax) + f_k(a^2x) - a^{k+1}xf_k(k) = F_k(ax).$$

因为 $F_0(x) = 0$,所以 $F_n(x) = 0, n=0,1,2,\cdots$

下面用数学归纳法证明 $f_n(x) = x^n f_n(\frac{1}{x}), n=0,1,2,\cdots$

首先,显然有 $f_0(x) = x^0 f_0(\frac{1}{x})$.

假设已证得 $f_k(x) = x^k f_k(\frac{1}{x})$,则有

$$f_{k+1}(x) - x^{k+1} f_{k+1}(\frac{1}{x})$$

$$= f_{k+1}(x) - x^{k+1} f_{k+1}(\frac{1}{x}) - [f_k(x) - x^k f_k(\frac{1}{x})]$$

$$= (x-1)f_k(x) + f_k(ax) - x^{k+1}[(\frac{1}{x})f_k(\frac{1}{x}) + f_k(\frac{a}{x})] + x^k f_k(\frac{1}{x})$$

$$= (x-1)f_k(x) + f_k(ax) - a^k \cdot x \cdot [(\frac{x}{a})^k f_k(\frac{a}{x})]$$

$$= (x-1)f_k(x) + f_k(ax) - a^k x f_k(\frac{x}{a}) = F_k(x) = 0,$$

即 $f_{k+1}(x) = x^{k+1} f_{k+1}(\frac{1}{x})$.

由数学归纳法原理知,对于任意非负整数 n,都有 $f_n(x) = x^n f_n(\frac{1}{x})$.

(2) 由已知条件可知,$f_k(x)$ 的次数不大于 k.不妨设 $f_k(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j^{(k)} x^j, k=0,1,2,\cdots$

由已知条件容易看出 $b_0^{(k)} = 1, k=0,1,2,\cdots$

由已证得的(1) 的结论可知 $b_{k-j}^{(k)} = b_j^{(k)} (k=0,1,\cdots j=0,1,\cdots,k)$.

特别地 $b_0^{(k)} = b_k^{(k)} = 1, k=0,1,2,\cdots$.

比较式子 $f_n(x)=xf_{n-1}(x)+f_{n-1}(ax)$ 两边 x^j 和 x^{n-j} 的系数,分别得到

$$\begin{cases} b_j^{(n)}=b_{j-1}^{(n-1)}+a^j\cdot b_j^{(n-1)}, \\ b_{n-j}^{(n)}=b_{n-j-1}^{(n-1)}+a^{n-j}b_{n-j}^{(n-1)} \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} b_j^{(n)}=b_{j-1}^{(n-1)}+a^j\cdot b_j^{(n-1)}, \\ b_j^{(n)}=b_j^{(n-1)}+a^{n-j}b_{n-j}^{(n-1)}. \end{cases}$$

由上面的方程组中消去 $b_j^{(n-1)}$,得 $(a^j-1)b_j^{(n)}=(a^n-1)b_{j-1}^{(n-1)}$.

于是有 $b_j^{(n)}=\dfrac{a^n-1}{a^j-1}\cdot b_{j-1}^{(n-1)}=\dfrac{a^n-1}{a^j-1}\cdot\dfrac{a^{n-1}-1}{a^{j-1}-1}\cdot b_{j-2}^{(n-2)}$

$$\cdots$$

$$=\frac{(a^n-1)(a^{n-1}-1)\cdots(a^{n-j+1}-1)}{(a^j-1)(a^{j-1}-1)\cdots(a-1)}b_0^{n-j}=\frac{(a^n-1)(a^{n-1}-1)\cdots(a^{n-j+1}-1)}{(a^j-1)(a^{j-1}-1)\cdots(a-1)}.$$

故得 $f_n(x)=1+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{(a^n-1)(a^{n-1}-1)\cdots(a^{n-j+1}-1)}{(a^j-1)(a^{j-1}-1)\cdots(a-1)}x^j$.

第二十五章　一类三元三次齐次多项式的性质及应用

习题 A

1. 由 $\sum x^3-\sum x^2(y+z)+\sum x^3\geqslant\sum x^3-\sum x^2(y+z)+3xyz\geqslant0$(其中用到(21-1)式与(21-2)式),即证.

2. 由 $x+y\geqslant2\sqrt{xy}$ 知原不等式左半部分成立.

由 $8\sum x^3-3\prod(x+y)=8\sum x^3-3\sum x^2(y+z)-6xyz\geqslant3\sum x^3-3\sum x^2(y+z)+15xyz-6xyz=3[\sum x^3-\sum x^2(y+z)+3xyz]\geqslant0$(其中用到(21-2)式),即证得原不等式的右半部分.

3. 令 $f(a,b,c)=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-a^3-b^3-c^3$,则 $f(1,1,1)=1>0$,$f(1,1,0)=0$,$f(2,1,1)=0$,由(21-6)式,知 $f(a,b,c)>0$.由此即证.

4.(1)$2(\sum a)(\sum a^2)-3(\sum a^3+3abc)=2[\sum a^3+\sum a^2(b+c)]-3(\sum a^3+3abc)=-\sum a^3+2\sum a^2(b+c)-9abc\geqslant0$(其中用到(21-3)式),由此即证.

(2)$5[bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)]-3abc-(a+b+c)^3=5\sum a^2(b+c)-3abc-[\sum a^3+3\sum a^2(b+c)+6abc]=-\sum a^3+2\sum a^2(b+c)-9abc\geqslant0$(其中用到(21-2)式),由此即证.

(3)原不等式等价于 $2abc<\sum a^2(b+c-a)\leqslant3abc\Leftrightarrow2abc<\sum a^2(b+c)-\sum a^3\leqslant3abc$.由(21-2)及(21-4)式即证.

(4)由余弦定理,原不等式等价于 $1<\sum\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\leqslant\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow2abc<\sum a(b^2+c^2)-\sum a^3\leqslant3abc\Leftrightarrow2abc<\sum a^2(b+c)-\sum a^3\leqslant3abc$.由(3)题结论即证.

习题 B

1.(1)由 $2(x^2+y^2+z^2)+9xyz-1=2(x+y+z)\cdot(x^2+y^2+z^2)+9xyz-(x+y+z)^3=$

$2[\sum x^3 + \sum x^2(y+z)] + 9xyz - [\sum x^3 + 3\sum x^2(y+z) + 6xyz] = \sum x^3 - \sum x^2(y+z) + 3xyz \geq 0$(其中用到(21 - 2)式),故 $2(x^2+y^2+z^2)+9xyz \geq 1$.

(2) 由 $1-4(xy+yz+zx-3xyz) = (x+y+z)^3 - 4[(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz] = [\sum x^3 + 3\sum x^2(y+z) + 6xyz] - 4[\sum x^2(y+z) + 3xyz - 3xyz] = \sum x^3 - \sum x^2(y+z) + 6xyz \geq \sum x^3 - \sum x^2(y+z) + 3xyz \geq 0$(其中用到(21 - 2)式).

2. 由中线长公式,有 $4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2$,不等式(1)$\Leftrightarrow \sum a(2b^2+2c^2-a^2) \geq 9abc \Leftrightarrow -\sum a^3 + 2\sum a(b^2+c^2) - 9abc \geq 0 \Leftrightarrow -\sum a^3 + 2\sum a^2(b+c) - 9abc \geq 0$(其中用到(21 - 3)式).

不等式(2)$\Leftrightarrow \sum a(5a^2-b^2-c^2) \geq 9abc \Leftrightarrow 5\sum a^3 - \sum a^2(b+c) - 9abc \geq 0 \Leftrightarrow \sum a^3 - \sum a^2(b+c) + 12abc - 9abc \geq 0$(其中用到(21 - 2)式).

3. 易知中线所成三角形的面积为原三角形面积的$\frac{3}{4}$. 又 $R = \frac{abc}{4s_\triangle}$,所以,只需证 $m_a m_b m_c \geq \frac{5}{8}abc$,即$\prod \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} > 6abc$.(*) 令 $x = b^2+c^2-a^2, y = c^2+a^2-b^2, z = a^2+b^2-c^2$.由于原三角形为锐角三角形,所以 $x,y,z>0$,从而(*)式可化为$\prod(4x+y+z) > 25 \cdot \prod(x+y)$,而$\prod(4x+y+z) - 25\prod(x+y) = 4\sum x^3 + 21\sum x^2(y+z) + 78xyz - 25\sum x^2(y+z) - 50xyz = 4\sum x^3 - 4\sum x^2(y+z) + 28xyz > 0$(其中用到(21 - 2)式).

4. 所证不等式等价于

$$\sum \sqrt{a(a+b)(a+c)} \geq 2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow \sum a(a+b)(a+c) + 2\sum(a+b)\cdot\sqrt{(ab(a+b)(a+c)} \geq 4\sum ab(a+b) + 12abc$$

$$\Leftrightarrow \sum a^3 + \sum(a+b)\sqrt{ab(a+b)(a+c)} \geq 3\sum ab\cdot(a+b) + 9abc.$$

由柯西不等式知:$ab(a+b)(a+c) = (ab+bc)(ab+ac)(ab+\sqrt{ab}\cdot c)^2$,于是只需证

$$\sum a^3 + 2\sum(a+b)(ab+\sqrt{ab}\cdot c) \geq 3\sum ab(a+b) + 9abc$$

$$\Leftrightarrow \sum a^3 + 2\sum ab(a+b) + 2\sum(a+b)\cdot\sqrt{abc} \geq 3\sum ab(a+b) + 9abc$$

$$\Leftrightarrow \sum a^3 + 2\sum(a+b)\sqrt{abc} \geq \sum ab(a+b) + 9abc.$$

因为 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$,故只需证$\Leftrightarrow \sum a^3 + 12abc \geq \sum ab(a+b) + 9abc \Leftrightarrow \sum a^3 - \sum ab(a+b) + 3abc \geq 0 \Leftrightarrow \sum a(a-b)(a-c) \geq 0$.

5. 所证不等式等价于$(b+c+4a)(c+a+4b)(a+b+4c) > 25(a+b)(b+c)(c+a)$.令 $a+b+c=s$,则上式又等价于

$$(s+3a)(s+3b)(s+3c) > 25(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\Leftrightarrow 4s^3 + 9s\sum ab + 27abc > 25(s\sum ab - abc)$$

$\Leftrightarrow s^3+13abc>4s\sum ab$.

因为 $s^3=(a+b+c)^3=\sum a^3+3\sum ab(a+b)+6abc$,

$s\sum ab=\sum ab(a+b)+3abc$

$\Leftrightarrow \sum a^3+3\sum ab(a+b)+6abc+13abc>4(\sum ab(a+b)+3abc)$

$\Leftrightarrow \sum a^3-\sum ab(a+b)+7abc>0$

$\Leftrightarrow \sum a(a-b)(a-c)+4abc>0$.

6. 原式等价于 $\sum\frac{9a^2+9abc+9-31a}{a^2+abc+1}\geqslant 0$. 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,显然有 $9(a+b)<31$ 等,所以容易证明 $9a^2+9abc+9-31a\leqslant 9b^2+9abc+9-31b\leqslant 9c^2+9abc+9-31c$, $\frac{1}{a^2+abc+1}\leqslant\frac{1}{b^2+abc+1}\leqslant\frac{1}{c^2+abc+1}$,因此,由切比雪夫(Chebyshev)不等式有

$$3\sum\frac{9a^2+9abc+9-31a}{a^2+abc+1}\geqslant\sum(9a^2+9abc+9-31a)\cdot\sum\frac{1}{a^2+abc+1}.$$

于是只要证明 $\sum(9a^2+9abc+9-31a)\geqslant 0$,它等价于 $9\sum a^2+27abc+27-31\sum a\geqslant 0$,因为 $a+b+c=1$,所以只要证明 $9\sum a^2+27abc-4\geqslant 0$,即

$$9\sum a\sum a^2+27abc-4(\sum a)^3\geqslant 0. \qquad (*)$$

而 $\sum a\sum a^2=\sum a^3+\sum ab(a+b)$, $(\sum a)^3=\sum a^3+3\sum ab(a+b)+6abc$,于是$(*)$式等价于 $9[\sum a^3+\sum ab(a+b)]+27abc-4[\sum a^3+3\sum ab(a+b)+6abc]\geqslant 0$

$\Leftrightarrow 5\sum a^3-3\sum ab(a+b)+3abc\geqslant 0$

$\Leftrightarrow 3\sum a(a-b)(a-c)+2(\sum a^3-3abc)\geqslant 0$.

由 Schur 不等式和 $\sum a^3\geqslant 3abc$ 知最后一式成立,故所证得证.

7. 令 $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$,则所证等价于 $\sum\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{x}{z}-1\right)\geqslant 3$. $\qquad (*)$

$\Leftrightarrow \sum\frac{(x+z-y)(x+y-z)}{yz}\geqslant 3xyz$

$\Leftrightarrow \sum x(x+z-y)(x+y-z)\geqslant 3xyz \Leftrightarrow \sum x[x^2-(y-z)^2]\geqslant 3xyz$

$\Leftrightarrow \sum x^3-\sum x(y-z)^2\geqslant 3xyz \Leftrightarrow \sum x^3-\sum x(y^2+z^2-2yz)\geqslant 3xyz$

$\Leftrightarrow \sum x^3-\sum xy(x+y)+3xyz\geqslant 0$

$\Leftrightarrow \sum x(x-y)(x-z)\geqslant 0$.

注 令 $x+z-y=2p, x+y-z=2q, y+z-x=2r$,则 $x=p+q, y=q+r, z=r+p$,则$(*)$式又等价于 $\sum\frac{2p\cdot 2q}{(p+r)(q+r)}\geqslant 3$,即 $\Leftrightarrow\sum\frac{pq}{(p+r)(q+r)}\geqslant\frac{3}{4}$.故原不等式获证.

8. 原不等式等价于 $3-2\cdot\left(\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{b+ca}+\frac{ab}{c+ab}\right)\leqslant\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{b+ca}\geqslant\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{ab}{(1-a)(1-b)}+\frac{bc}{(1-b)(1-c)}+\frac{ca}{(1-c)(1-a)}\geqslant\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\geqslant\frac{3}{4}$.

注 4～8题解答是参见汤庆梅，邹守文的文章《用 Schur 不等式——"背景不等式"的背景证明竞赛不等式》(《中学数学研究》2008年第11期).

第二十六章 多项式 $f(x)=x^n-1$ 的根的性质及应用

习题 A

1. 设 ω 为任一异于1的三次单位根，将 $a=\omega$ 代入多项式，有 $\omega^5+\omega^4+1=\omega^2+\omega+1=0$，故可断定原多项式含有因式 a^2+a+1，再用多项式除法，求得另一因式 a^3-a+1，或辅之以拆项法求之，即由 $a^5+a^4+1=a^3(a^2+a+1)-(a-1)(a^2+a+1)$ 即得.

2. 设 ω 为1的异于1的三次单位值，令 $f(x)=(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$，则由 $f(\omega)=f(\omega^2)=0$ 即证.

3. 考虑异于1的四次单位根，将 $x=\varepsilon$ 代入原式得 $a+(a+b)\varepsilon+(a+2b)\varepsilon^2+(a+3b)\varepsilon^3+2b\varepsilon^5+b\varepsilon^6=(a+3b)(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3)=0$，知原式含有因式 x^3+x^2+x+1. 用多项式除法，得另一因式 $a+bx+bx^2+bx^3$. 故原式 $=(1+x)(1+x^2)(a+bx+bx^2+bx^3)$.

4. 由于 $\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{7}$ 为1的七次单位根，则 $\bar{\varepsilon}_1=\frac{1}{\varepsilon_1}=\cos\frac{2\pi}{7}-\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{7}$，从而 $2\cos\frac{2\pi}{7}=\varepsilon_1+\frac{1}{\varepsilon_1}$，$2\cos\frac{4\pi}{7}=\varepsilon_1^2+\frac{1}{\varepsilon_1^2}$，$2\cos\frac{6\pi}{7}=\varepsilon_1^3+\frac{1}{\varepsilon_1^3}$. 故原式 $=\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1^2}+\frac{\varepsilon_1^2}{1+\varepsilon_1^4}+\frac{\varepsilon_1^3}{1+\varepsilon_1^6}=\frac{2(1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2+\varepsilon_1^3+\varepsilon_1^4+\varepsilon_1^5+\varepsilon_1^6)-2\varepsilon_1^6}{(1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2+\varepsilon_1^3+\varepsilon_1^4+\varepsilon_1^5+\varepsilon_1^6)+\varepsilon_1^6}=-2$.

5. 因 $n\geqslant3$ 时，有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，运用1的异于1的三次单位根 W 的性质，则有 $a_n+(\omega+\omega^2)a_{n-1}+\omega^3a_{n-2}=0$. 于是，$a_n+\omega a_{n-1}+\omega^2\cdot(a_{n-1}+\omega a_{n-2})=0$，① $(a_n+\omega^2a_{n-1})+\omega(a_{n-1}+\omega^2a_{n-2})=0$，② 由①知 $\{a_n+\omega a_{n-1}\}$ 是公比为 $-\omega^2$ 的等比数列，即有 $a_n+\omega a_{n-1}=(a_2+\omega a_1)(-\omega^2)^{n-2}=a_2(-\omega^2)^{n-2}+a_1\omega(-\omega^2)^{n-2}$. ③

同理由②有 $a_n+\omega^2a_{n-1}=a_2(-\omega)^{n-2}+a_1\omega^2(-\omega)^{n-2}$.④

③－④得 $a_{n-1}=\frac{(-\omega)^{n-2}}{\omega-\omega^2}[(\omega^{n-2}-1)a_2+(\omega^{n-2}-\omega)\omega a_1]$.⑤ 又由于 $n\geqslant3$ 时，$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}=(a_{n-2}-a_{n-3})-a_{n-2}=a_{n-3}$. 由此推得 $n>6$ 时，$a_n=-a_{n-3}=a_{n-6}$，则该数列前六项为 $a_1,a_2,a_2-a_1,-a_1,-a_2,a_1-a_2$，且以后各项以六项为周期重复出现，每个周期中的六项之和为零. 因此 $S_{1492}=0+a_1+a_2+(a_2-a_1)-a_1=1985$，$S_{1998}=0+a_1+a_2+(a_2-a_1)-a_1-a_2=1492$，则 $a_1=-999$，$a_2=493$，把 a_1,a_2 代入⑤即得通项公式，$a_n=\frac{(-\omega)^{n-1}}{\omega-\omega^2}[(\omega^{n-1}-1)\cdot493-(\omega^{n-1}-\omega)\cdot\omega\cdot999]$.

6. 考虑1的三次单位根 ω. 令 $a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{198}=A$，$a_1+a_4+\cdots+a_{199}=B$，$a_2+a_5+$

$\cdots + a_{200} = C$,则 $A + B + C = 3^{100}$,$A + \omega B + \omega^2 C = 0$,$A + \omega^2 B + \omega C = 0$,由此求得 $A = 3^{99}$.

习题 B

1. 易知 $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^9, \omega^{10}(=1)$ 是 1 的 10 个十次方根,则有 $\prod_{k=1}^{10}(x - \omega^k) = x^{10} - 1$. ①

又 $\omega^2, \omega^4, \omega^6, \omega^8, \omega^{10}(=1)$ 是 1 的 5 个五次方根,从而有 $\prod_{k=1}^{5}(x - \omega^{2k}) = x^5 - 1$. ②

① ÷ ②,得 $\prod_{k=1}^{5}(x - \omega^{2k-1}) = x^5 + 1$. ③

注意到 $x - \omega^5 = x + 1$,在 ③ 式两边同除以 $x + 1$ 得

$f(x) = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

这是一个整系数四次多项式.

因为 $f(x)$ 的一次因式都不是整系数多项式,所以,若 $f(x)$ 可分解成两个至少为一次的整系数多项式的乘积,则这两个因式必都是二次的.

设 $f(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2)$,其中 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 皆为整数.不妨设 $a_1 > 0$,$a_2 > 0$,则由 $a_1a_2 = 1$ 得 $a_1 = a_2 = 1$.进而由假设有

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = -1, & ④ \\ c_1 + c_2 + b_1b_2 = 1, & ⑤ \\ b_1c_2 + b_2c_1 = -1, & ⑥ \\ c_1c_2 = 1. & ⑦ \end{cases}$$

由 ⑦ 式知 $c_1 = c_2 = 1$ 或 $c_1 = c_2 = -1$.

若 $c_1 = c_2 = -1$,则由式 ⑥ 得 $b_1 + b_2 = 1$.这与式 ④ 矛盾,于是,$c_1 = c_2 = 1$.

代入式 ⑤,得 $b_1b_2 = -1$.

与式 ④ 联立,解得

$$b_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, b_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad 或 \quad b_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, b_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

这与 b_1、b_2 为整数矛盾.

故 $f(x)$ 不能分解成两个至少为一次的整系数多项式的乘积.

2. 设 $S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$ 将原式两边同乘以 $(x-1)$,得恒等式 $(x-1)\cdot P(x^5) + x(x-1)Q(x^5) + x^2(x-1)R(x^5) = (x^5-1)\cdot S(x)$,所以 $(x-1)\cdot P(x^5) + x(x-1)\cdot Q(x^5) + x^2(x-1)R(x^5) = (x^5-1)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots)$,取出其中所有指数为 5 的倍数的项,得 $-P(x^5) = (x^5-1)(a_0 + a_5x^5 + a_{10}x^{10} + \cdots)$,因此,有 $P(x) = -(x-1)(a_0 + a_5x + a_{10}x^2 + \cdots)$,可见 $(x-1)$ 是 $P(x)$ 的一个因子.

另解:设 ε 为任一异于 1 的五次单位根,依次将 $x = \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$ 代入题所给方程得 4 个方程,再用 $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$ 依次去乘上述四个方程中的第一、二、三、四个方程,然后把这两组等式的左、右两边分别相加,便有 $4P(1) - Q(1) - R(1) = 0$,$-P(1) - Q(1) - R(1) = 0$,从而得 $P(1) = 0$,故 $x - 1$ 是

$P(x)$ 的因式.

注 由第二种解法很快看出,$Q(x)$,$R(x)$ 都有因式 $x-1$,且有关系式 $P(1)=Q(1)=R(1)=\frac{5}{3}S(1)$.

3. 先证 k 的存在性. 事实上,n 为偶数时,$((x+1)^n,x^n+1)=1$,于是存在有理系数多项式 $f^*(x)$,$g^*(x)$,使得

$$1=f^*(x)\cdot(x+1)^n+g^*(x)(x^n+1).$$

设 k 为 $f^*(x)$ 和 $g^*(x)$ 的所有系数的分母的一个公倍数,记 $f(x)=kf^*(x)$,$g(x)=kg^*(x)$,则 $f(x)$,$g(x)$ 是整系数多项式,且 $k=f(x)(x+1)^n+g(x)(x^n+1)$.
于是,k 的存在性得证.

下面来求 k 的最小值 k_0. 设 $n=2^\alpha t$,t 为奇数,α 为非负整数. 记 $m=2^\alpha$. 于是,我们有

$x^n+1=(x^m)^t+1=(x^m+1)\cdot h(x)$,其中 $h(x)$ 是整系数多项式.

设 $x^m+1=0$ 的 m 个根为 $w_j=e^{i\cdot\frac{2j-1}{m}\pi}$,$j=1,2,\cdots,m$,$m=2^\alpha$.

若正整数 k,整系数多项式 $f(x)$,$g(x)$ 满足 $k=f(x)\cdot(x+1)^n+g(x)(x^n+1)$,
则 $k=f(w_j)(w_j+1)^n$,$j=1,2,\cdots,m$,从而有

$$k^m=\prod_{j=1}^{m}f(w_j)\cdot\prod_{j=1}^{m}(w_j+1)^n.$$

设 $\sigma_1=\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_m$,$\sigma_2=\omega_1\omega_2+\omega_1\omega_3+\cdots+\omega_{m-1}\omega_m$,

…

$\sigma_m=\omega_1\omega_2\cdots\omega_m$.

由韦达定理知 σ_j 为整数,$j=1,2,\cdots,m$. 因为 $\prod_{j=1}^{m}f(\omega_j)$ 是关于 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 的整系数对称多项式,所以 $\prod_{j=1}^{m}f(w_j)$ 可表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 的整系数多项式,于是它为整数. 又因为

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}(\omega_j+1)^n&=\left[\prod_{j=1}^{m}(\omega_j+1)\right]^n\\&=(1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_m)^n=2^n,\end{aligned}$$

所以,$2^n\mid k^m$,于是有 $2^t\mid k$,$k\geqslant 2^t$.

另一方面,我们记 $E(x)=(x+1)(x^3+1)\cdots(x^{2m-1}+1)=(x+1)^m\cdot F(x)$.

对于固定的 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$,考虑集合 $\{\omega_j,\omega_j^3,\omega_j^5,\cdots,\omega_j^{2m-1}\}$,其中的元素均为 $x^m+1=0$ 的根,且两两不等,故它是 $x^m+1=0$ 的解集. 于是

$$E(\omega_j)=(1+\omega_j)(1+\omega_j^3)\cdots(1+\omega_j^{2m-1})=(1+\omega_1)(1+\omega_2)\cdots(1+\omega_m)=2,$$

即 ω_j 是 $E(x)-2$ 的根. 因此可设 $G(x)(x^m+1)+2=E(x)=(x+1)^mF(x)$,
两边 t 次方得 $G^*(x)\cdot(x^m+1)+2^t=(x+1)^nF^t(x)$, ①
其中 $G^*(x)$ 为某个整系数多项式.

由于 $x^n+1=(x^m+1)h(x)$,其中 $h(x)$ 满足 $h(-1)=1$. 因此可设

$c(x)\cdot(x+1)=h(x)-1$,

两边 n 次方,得 $C^n(x)\cdot(x+1)^n = h(x)\cdot d(x)+1$, ②

其中 $d(x)$ 为某个整系数多项式.

由 ① 和 ② 得 $G^*(x)d(x)\cdot(x^n+1) = G^*(x)\cdot(x^m+1)\cdot d(x)\cdot h(x) =$

$$[(x+1)^n F^t(x)-2^t]\cdot[C^n(x)(x+1)^n-1] = (x+1)^n\cdot U(x)+2^t,$$

其中 $U(x)$ 为某个整系数多项式.

因此,存在整系数多项式 $f(x)$,$g(x)$,其中 $f(x) = -U(x)$,$g(x) = G^*(x)\cdot d(x)$,使得 $f(x)\cdot(x+1)^n + g(x)\cdot(x^n+1) = 2^t$.

综上所述,k 的最小值 $k_0 = 2^t$,其中 $n = 2^\alpha\cdot t$,t 为奇数,α 为非负整数.

第二十七章　多项式的拉格朗日公式及应用

习题 A

1.(1) 考虑多项式 $f(x) = 1$,取 $x_1 = a$,$x_2 = b$,$x_3 = c$,由拉格朗日公式,有

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}\cdot f(a)+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}\cdot f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\cdot f(c) = f(x).$$

比较上式 x^2 的系数,即证.

(2)、(3) 类同(1),分别考虑多项式 $f(x) = x$,$f(x) = x^2$,由拉格朗日分式,再比较 x^2 的系数即证.

2. 取 x_1,x_2,x_3 依次为 1,2,3,由拉格朗日公式有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\cdot f(1)+\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\cdot f(2)+\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\cdot f(3)\\ &= \frac{1}{2}(x-2)(x-3)f(1)-(x-1)(x-3)f(2)+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)f(3)\\ &= x^2+px+q. \end{aligned}$$

比较上式两边 x^2 的系数,得 $\frac{1}{2}f(1)-f(2)+\frac{1}{2}f(3) = 1$,

从而 $1 \leqslant \frac{1}{2}|f(1)|+|f(2)|+\frac{1}{2}|f(3)| \leqslant \left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)\max\{|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|\}$.

故 $\max\{|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|\} \geqslant \frac{1}{2}$.

3. 取 $x_k = -1,1,2,3$,由拉格朗日公式有

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{(4-1)(4-2)(4-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)}\cdot f(-1)+\frac{(4+1)(4-2)(4-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)}f(1)+\\ &\quad \frac{(4+1)(4-1)(4-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)}f(2)+\frac{(4+1)(4-1)(4-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)}f(3)\\ &= -\frac{1}{4}(-1)+\frac{5}{2}f(1)+(-5)f(2)+\frac{5}{4}f(3). \end{aligned}$$

因 $-\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{4}f(-1) \leqslant -\frac{1}{4}$,$\frac{5}{2} \leqslant \frac{5}{2}f(1) \leqslant \frac{15}{2}$,$-20 \leqslant -5f(2) \leqslant -10$,$-\frac{15}{4} \leqslant \frac{15}{4}f(3) \leqslant \frac{15}{4}$,故 $-21\frac{3}{4} \leqslant f(4) \leqslant 1$,从而知,$f(4)$ 的最大值是 1,最小值是 $-21\frac{3}{4}$. 故 $f(4)$ 的取值范围是

$\left[-21\frac{3}{4},1\right]$.

习题 B

1. 先证明结论对 $k=0,1,\cdots,n-1$ 成立.构造一个次数不高于 $n-1$ 次的多项式,使它在每个点 a_i 处取值为 a_i^k, $i=1,2,\cdots,n$,由拉格朗日公式,这个多项式为

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i^k\prod_{\substack{j\neq i\\1\leqslant j\leqslant n}}\frac{x-a_j}{x_i-a_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{p_i}\prod_{\substack{j\neq i\\1\leqslant j\leqslant n}}(x-a_j),\text{其中 }x^{n-1}\text{ 的系数为}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{p_i}.$$

另一方面,多项式 $p(x)$ 和多项式 x^k 相等,因此,当 $k<n-1$ 时,x^{n-1} 的系数为 0,而当 $k=n-1$ 时,则为 1,这就证明了对 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{p_i}$ 都是整数.

现在证明,如果对某个 $k\geqslant n$,满足

$$(*)\begin{cases}\dfrac{a_1^{k-1}}{p_1}+\dfrac{a_2^{k-1}}{p_2}+\cdots+\dfrac{a_n^{k-1}}{p_n}=b_1\\ \dfrac{a_1^{k-2}}{p_1}+\dfrac{a_2^{k-2}}{p_2}+\cdots+\dfrac{a_n^{k-2}}{p_n}=b_2\\ \cdots\\ \dfrac{a_1^{k-n}}{p_1}+\dfrac{a_2^{k-n}}{p_2}+\cdots+\dfrac{a_n^{k-n}}{p_n}=b_n\end{cases}$$

的 $b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{Z}$,则 $b_0=\frac{a_n^k}{p_n}+\frac{a_2^k}{p_2}+\cdots+\frac{a_a^k}{p_a}$ 也是整数,于是,由数学归纳法,所欲证的结论对每个 $k\in\mathbf{N}$ 成立.

该多项式 $x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n$ 的根为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,则由韦达定理,这个多项式有系数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为整数,并且对每个 $j=1,2,\cdots,n$ 有 $a_j^n=-\sum\limits_{i=1}^{n}c_ia_j^{n-i}$.方程组(*)中的方程依次乘以 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,然后求和,得到

$$\sum_{i=1}^{n}c_ib_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_i\frac{a_j^{k-i}}{p_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k-n}}{p_j}\sum_{i=1}^{n}c_ia_j^{n-i}$$
$$=-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k-a}}{p_i}\cdot a_j^a=-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^k}{p_j}=-b_0,$$

即 $b_0=-\sum\limits_{i=1}^{a}c_ib_i$ 为整数,这正是所要证明的.

2. 用反证法.设 $d\leqslant p-2$,则多项式 $f(x)$ 完全由它在 $0,1,\cdots,p-2$ 处的值所确定,由拉格朗日插值公式,对于任一 x,有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p-2}f(k)\cdot\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)(x-k-1)\cdots(x-p+2)}{k!(-1)^{p-k}\cdot(p-k-2)!}.$$

将 $x=p-1$ 代入上式,得

$$f(p-1)=\sum_{k=0}^{p-2}f(k)\cdot\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k)}{(-1)^{p-k}\cdot k!}=\sum_{k=0}^{p-2}f(k)\cdot(-1)^{p-k}\cdot C_{p-1}^{k}.\qquad①$$

对 k 简单地归纳可发现,若 p 是素数,且 $0 \leqslant k \leqslant p-1$,则 $C_{p-1}^{k} \equiv (-1)^{k} \pmod{p}$. ②

当 $k=0$ 时,上述结论显然成立.设 $C_{p-1}^{k-1} \equiv (-1)^{k-1} \pmod{p}$,

则由 $C_{p}^{k} \equiv 0 \pmod{p}$,可得 $C_{p-1}^{k} = C_{p}^{k} - C_{p-1}^{k-1} \equiv 0-(-1)^{k-1} = (-1)^{k} \pmod{p}$.

由数学归纳法原理可知,结论②成立.

由①和②得 $f(p-1) \equiv (-1)^{p}\sum\limits_{k=0}^{p-2} f(k) \pmod{p}$.

注意到 $f(0)=0$,因此上式对任意素数 p 都可化为 $f(0)+f(1)+\cdots+f(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$.

另一方面,由已知 $f(0)=0, f(1)=1, f(i) \equiv 0$ 或 $1 \pmod{p}$, $i=2,3,\cdots,p-1$.因此

$f(0)+f(1)+\cdots+f(p-1) \equiv k \pmod{p}$,其中 k 为满足 $f(i) \equiv 1, 1 \leqslant i \leqslant p-1$ 的 i 的个数.

显然 $1 \leqslant k \leqslant p-1$,此与③式矛盾.故 $d \geqslant p-1$.

第二十八章　多项式的牛顿公式及应用

习题 A

1. 设 a,b,c 是三次多项式 $f(x)=t^{3}+a_{1}t^{2}+a_{2}t+a_{3}$ 的三根,由牛顿公式,有 $T_{1}=-a_{1}=0$,即 $a_{1}=0$. $T_{3}=-a_{1}T_{2}-a_{2}T_{1}-3a_{3}=-3a_{3}=0$,即 $a_{3}=0$.故当 $k \geqslant 3$ 时, $T_{k}=-a_{2}T_{k-2}$,从而 $T_{19}=-a_{2}T_{17}=a^{2}T_{15}=\cdots=-a_{2}^{9}T_{1}=0$.故 $a^{19}+b^{19}+c^{19}=0$.

2. 令 $T_{n}=x_{1}^{n}+x_{2}^{n}$,则据牛顿公式,有 $T_{n}=-3T_{n-1}-T_{n-2}$.

由 $T_{1}=x_{1}+x_{2}=-3, T_{2}=x_{1}^{2}+x_{2}^{2}=(x_{1}+x_{2})^{2}-2x_{1}x_{2}=7$,

故 $T_{3}=-3T_{2}-T_{1}=-18, T_{1}=-3T_{2}-T_{2}=47, T_{5}=-3T_{4}-T_{3}-123$,

$T_{6}=-3T_{5}-T_{4}=322, T_{7}=-3T_{6}-T_{5}=-843$,

即 $x_{1}^{7}+x_{2}^{7}=-843$.

3. 设 $T_{n}=ax^{n}+by^{n}$,这里 x、y 是一元二次方程 $t^{2}=pt+q$ 的两个实根,则据牛顿公式,有

$T_{n}=pT_{n-1}+qT_{n-2}$,则 $\begin{cases} T_{3}=pT_{2}+qT_{1}, \\ T_{4}=p_{3}+qT_{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 16=7p+3q \\ 42=16p+7q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-14, \\ q=38. \end{cases}$

故 $T_{5}=pT_{4}+qT_{3}=-14\times 42+38\times 16=20$,即 $ax^{5}+by^{5}=20$.

4. 依题设知 a,b,c 是方程 $x^{3}+(ab+bc+ca)x-abc=0$ 的三根.

令 $T_{n}=a^{n}+b^{n}+c^{n}(n=0,1,2,\cdots)$,则 $T_{n}=-(ab+bc+ca)T_{n-2}+abcT_{n-3}(n \geqslant 3)$.

又 $T_{0}=3, T_{1}=0$,则 $T_{3}=-(ab+bc+ca)T_{1}+bacT_{0}=3abc$.

而 $T_{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}=(a+b+c)^{2}-2(ab+bc+ca)=-2(ab+bc+ca)$,从而

$T_{n}=\frac{1}{2}T_{2}T_{n-2}+\frac{1}{3}T_{3}T_{n-3}(n \geqslant 3)$,故 $T_{4}=\frac{1}{2}T_{2}^{2}$,

$T_{5}=\frac{1}{2}T_{2}T_{3}+\frac{1}{3}T_{3}T_{2}=\frac{5}{6}T_{2}T_{3}, T_{7}=\frac{1}{2}T_{2}T_{5}+\frac{1}{3}T_{3}T_{4}=\frac{7}{12}T_{2}^{2}T_{3}$,

从而 $T_{2}T_{3}T_{4}T_{5}=\frac{5}{12}T_{2}^{4}T_{3}^{2}, T_{7}^{2}=\frac{49}{144}T_{2}^{4}T_{3}^{2}$.

故 $\frac{T_{7}^{2}}{T_{2}T_{3}T_{4}T_{5}}=\frac{49}{144}\cdot T_{2}^{4}T_{3}^{2}\cdot\frac{12}{5T_{2}^{4}T_{3}^{2}}=\frac{49}{60}$,即所证等式成立.

习题 B

1. 易知 $\theta = k\alpha(k = 0,1,2,\cdots,6,\alpha = \frac{\pi}{7})$ 是方程 $\tan(7\theta) = 0$ 的根. 令 $x = \tan\theta$, 由 $\tan 4\theta = -\tan 3\theta$ 得 $\frac{4x - 4x^3}{1 - 6x^2 + x^4} = -\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$, 则

$x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7 = 0.$

令 $x^2 = y$, 于是易知方程 $y^3 - 21y^2 - 35y - 7 = 0$ ①

的根为 $\tan^2\alpha, \tan^2 2\alpha, \tan^2 3\alpha$. 据牛顿公式, 有 $f(n + 3) = 21f(n + 2) - 35f(n + 1) + 7f(n)$. ②

由方程 ① 及韦达定理知 $f(0) = 3, f(1) = 21, f(2) = \tan^4\alpha + \tan^4 2\alpha + \tan^4 3\alpha = (\tan^2\alpha + \tan^2 2\alpha + \tan^2 3\alpha)^2 - 2(\tan\alpha\tan^2 2\alpha + \tan\alpha\tan^2 3\alpha + \tan^2 2\alpha\tan^2 3\alpha) = 21^2 - 2\times 35 = 371$. 根据递推关系式②, 不难用数学归纳法证明 $f(n) \in \mathbf{N}(n \geq 0)$.

2. 设 x, y, z, w 是四次多项式 $f(x) = t^4 + a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4$ 的四个根, 令 $T_n = x^n + y^n + z^n + w^n$, 则 $T_1 = -a_1 = 0$, 即 $a_1 = 0$. $T_2 = -2a_2, T_3 = -3a_3, T_4 = 2a_2^2 - 4a_4, T_5 = 5a_2a_3, T_7 = 7a_3(a_4 - a_2^2) = 0$, 则 $a_4 - a_2^2 = 0$ 或 $a_3 = 0$. (i) 若 $a_4 - a_2^2 = 0$, 则 $T_4 = -2a_2^2 \leq 0$, 但 $T_4 = x^4 + y^4 + z^4 + w^4 \geq 0$, 因此 $T_4 = 0$, 即 $x = y = z = w = 0$, 此时, $w(w + x)(w + y)(w + z) = 0$. (ii) 若 $a_3 = 0$, 则 $f(x) = (t - x)(t - y)(t - z)(t - w) = t^4 + a_2t^2 + a_4$. 因此, 多项式 $f(t)$ 的四个根必由两对正负相反的数构成. 此时 $w(w + x)(w + y)(w + z) = 0$. 故所求值总为 0.

3. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是四次多项式 $f(t) = t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + D$ 的四个根. 令 $T_n + a_1^n + a_2^n + a_3^n = a_4^n$, 则 $T_1 = -A, T_2 = A^2 - 2B, T_3 = -A^3 + 3AB - 3C, T_{k+4} = -AT_{k+3} - BT_{k+2} - CT_{k+1} - DT_k$. 又 t^3 与 $t(t \in \mathbf{N})$ 的奇偶性相同, 及 $T_3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 = 0$ 是偶数, 则 $A = -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ 是偶数, 从而 $2 \mid A$, 再由 $T_3 = 0$ 知 $A^3 = 3AB - 3C$, 知 $3 \mid A^3$, 从而 $3 \mid A$. 由 $(2,3) = 1$, 得 $6 \mid A$. 又结合 $A^3 = 3AB - C$, 得 $6 \mid C$. 下面用数学归纳法证明 $6 \mid T_{2n-1}, n = 1,2,\cdots$ 当 $n = 1$ 时, $6 \mid T_1$, 假设 $n \leq k$ 时, 命题成立, 对 $n = k + 1, T_{2(k+1)-1} = -AT_{2k} - BT_{2k-1} - CT_{2k-2} - DT_{2k-3}$. 由 $6 \mid A, 6 \mid C$, 结合归纳假设, $6 \mid T_{2k-1}, 6 \mid T_{2k-3}$ 和上面的等式, 可知 $6 \mid T_{2(k+1)-1}$. 由数学归纳法原理, 对所有 $n \in \mathbf{N}$, $6 \mid T_{2n-1}, n = 1,2,\cdots$

第二十九章　多项式与母函数方法

习题 A

1. 因 $a_n: 1, -2, 3, -4, \cdots, (-1)^n(n + 1), \cdots$

由 $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^n(n + 1)x^n + \cdots$

$$= 1 - C_2^1x + C_3^2x^2 - C_4^3x^3 + \cdots + (-1)^nC_{n+1}^nx^n + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}^k(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2+k-1}^k(-x)^k = \frac{1}{[1 - (-x)]^2} = \frac{1}{(1 + x)^2}.$$

故所求数列 $\{a_n\}$ 的母函数 $f(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}$.

2. 由 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots - x \cdot f(x)$

$= -a_0x - a_1x^2 - \cdots - a_{n-1}x^n - x^2 \cdot f(x) = -a_0x^2 - \cdots - a_{n-2}x^n - \cdots$

以上三式相加,注意到题设有$(1-x-x^2)f(x) = 1$.

故所求数列$\{a_n\}$的母函数为$f(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$.

3. 当 $m = n$ 时,$\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^kC_n^k = \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k = (-1)^n = 0$;当 $m < n$ 时,考虑数列

$C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n, 0, \cdots, 0, \cdots$ 和 $1, (-1), \cdots(-1)^n, 0, \cdots, 0, \cdots$

它们对应的母函数分别是 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k = (1+x)^n$, $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kx^k = \dfrac{1}{1+x}$,这两式相乘,左边 x^m 的系数为$\sum\limits_{k=0}^{m}C_n^k(-1)^{m-k} = (-1)^m\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^kC_n^k$,而右边为$\dfrac{(1+x)^n}{1+x} = (1+x)^{n-1}$,将其展开之,$x^m$ 的系数为 $C_{n-1}^m(m < n)$,因此有$\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^kC_n^k = (-1)^mC_{n-1}^m$,综合起来,得

$$S = \sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_n^k = \begin{cases}0, \text{当 } m = n \text{ 时}, \\ (-1)^mC_{n-1}^m, \text{当 } m < n \text{ 时}.\end{cases}$$

4. 由公式 4 与公式 2,可知$\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{n+k}^kx^k$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$.

由$\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} = \dfrac{1}{(1-x)^n}\cdot\dfrac{1}{1-x}$,得$\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{n+k}^kx^k = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^kx^k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k\right)$,

比较 x^m 的系数 $C_{n+m}^m = C_{n-1}^0 \cdot 1 + C_n^1 \cdot 1 + \cdots + C_{n+m-1}^m \cdot 1$

$= C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \cdots + C_{n+m-1}^m$.

利用恒等式 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 并把 $n-1$ 换成 n 即证.

习题 B

1. **解法 1** 由于同一颜色的球不可辨,属于 3 个元素的 12 元重复组合.又因每次抽取时,要求三种颜色的球都有,于是我们可以先取红、白、黑球各一个,然后再从红、白、黑色种颜色的球中,无限制地每次取 9 个,而每种颜色的球可取 $0,1,2,\cdots,9$ 个,因此,如果设每次取出 r 个球的取法的总数为a_r,对$\{a_r\}$的母函数为 $f(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^9)^3$.

由于 $f(x) = (\dfrac{1-x^{10}}{1-x})^3 = (1-x^{10})^3\cdot(1-x)^{-3} = (1-x^{10})^3\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{r+2}^rx^r$.

显然,x^9 的系数只能由$\sum$ 内令 $r = 9$ 而得.故 $a_9 = C_{11}^9 = 55$ 为所求.

解法2 依题意,每种颜色的球至少取一个1,即每种颜色的球不能取0个,而最多取 10个,因此,如果设每次取出 r 个球的取法的总数为 a_r,则数列$\{a_r\}$的母函数为 $f(x) = (x+x^2+\cdots+x^{10})^3$.

由 $f(x) = x^3(1+x+x^2+\cdots+x^9)^3 = x^3\cdot\left(\dfrac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3 = x^3\cdot(1-x^{10})^3\cdot(1-x)^{-3}$

$= x^3(1-3x^{10}+3x^{20}-x^{30})\cdot\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{r+2}^rx^r$.

显然，x^{12} 的系数只可能由 $\sum$ 内 $r=9$ 而得. 故 $a_{12}=C_{11}^{9}=55$ 为所求.

2.(1) 由题设，有母函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$，

$$\text{而} f(x)=\frac{1}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1+x+x^2}$$
$$=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{(1-x)^2}+\frac{D}{(1-x)^3}+\frac{E}{1-\omega x}+\frac{F}{1-\omega^2 x}.$$

其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，通过计算其待定系数为

$$A=\frac{1}{8},B=\frac{17}{72},C=\frac{1}{4},D=\frac{1}{6},E=\frac{1}{9},F=\frac{1}{9}.$$

$$\text{于是} f(x)=\frac{1}{8(1+x)}+\frac{17}{72(1-x)}+\frac{1}{4(1-x)^2}+\frac{1}{6(1-x)^3}+\frac{1}{9(1-\omega x)}+\frac{1}{9(1-\omega^2 x)}$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{1}{8}(-1)^r)+\frac{17}{72}+\frac{1}{4}C_{r+1}^{r}+\frac{1}{6}C_{r+2}^{r}+\frac{1}{9}(\omega^r+\omega^{2r})\right]x^r$$

$$\text{从而 } a_r=\frac{(r+2)(r+1)}{12}+\frac{r+1}{4}+\frac{17}{72}+\frac{1}{8}(-1)^r+\frac{2}{9}\cos\frac{2r\pi}{3}. \qquad (*)$$

$$\text{故 } a_{15}=\frac{17\times16}{12}+\frac{16}{4}+\frac{17}{72}-\frac{1}{8}+\frac{2}{9}=27 \text{ 为所求.}$$

(2) 令 $x=x'+1, y=y'+1, z=z'+1$，则本题化为求 $x'+2y'+3z'=9$ 的非负整数解，由(*)式即求得 $a_r=12$，这就是要求得结果.

3. 设方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=r$，满足条件 $x_1\leqslant9, x_2\leqslant8, x_3\leqslant7, x_4\leqslant6$ 的正整数解的个数为 a_r，则 $\{a_r\}$ 的母函数为 $(x+x^2+\cdots+x^9)(x+x^2+\cdots+x^8)(x+x^2+\cdots+x^7)(x+x^2+\cdots+x^6)$ $=x^4\cdot f(x)=x^4\cdot\dfrac{(1-x)^9(1-x^8)(1-x^7)(1-x^6)}{(1-x)^4}$，因此求算开式中 x^{22} 的系数 a_{23} 就是求 $f(x)$ 中 x^{19} 的系数. 而 $\dfrac{1}{(1-x)^4}=\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{r+3}^{3}x^r$，把 $f(x)$ 的分子乘出来，并去掉次数高于 19 次的项，问题就变成求 $(1-x^6-x^7-x^8-x^9+x^{13}+x^{14}+2x^{15}+x^{16}+x^{17})\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{r+3}^{3}x^r$ 展开式中 x^{19} 的系数，易知它等于 $C_{22}^{3}-C_{16}^{3}-C_{15}^{3}-C_{14}^{3}-C_{13}^{3}+C_{9}^{3}+C_{8}^{3}+2C_{7}^{3}+C_{6}^{3}+C_{5}^{3}=115$ 为所求.

4. 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$

$$-2x\cdot f(x)=-2a_0x-2a_1x^2-\cdots-2a_{n-1}x^n-\cdots,$$
$$-3x^2\cdot f(x)=-3a_0x^2-\cdots-3a_{n-2}x^n-\cdots,$$
$$-\frac{1}{1-3x}=-1-3x-3^2x^2-\cdots-3^nx^n-\cdots.$$

以上四式相加，并利用已知条件得 $(1-2x-3x^2)\cdot f(x)-\dfrac{1}{1-3x}=-2$.

故 $f(x)=\dfrac{6x-1}{(1+x)(1-3x)^2}=\dfrac{A}{1+x}+\dfrac{B}{(1-3x)^2}+\dfrac{C}{1-3x}$，

则 $A = f(x)(1+x)\big|_{x=-1} = -\dfrac{7}{16}$，$B = f(x)(1-3x)\big|_{x=\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}$，

$$0 = \lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{Ax}{1+x} + \frac{Bx}{(1-3x)^2} + \frac{Cx}{1-3x}\right) = A - \frac{1}{3}C.\text{于是 } C = 3A = -\frac{21}{16}.$$

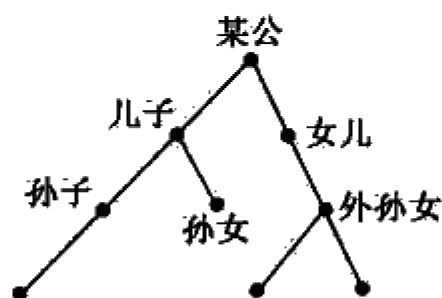
故 $f(x) = -\dfrac{7}{16(1+x)} + \dfrac{3}{4(1-3x)^2} - \dfrac{21}{16(1-3x)}$

$$= -\frac{7}{16}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot x^k + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+1}^{1}3^kx^k - \frac{21}{16}\sum_{k=0}^{\infty}3^kx^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(4k-3)\cdot 3^{k+1} - 7(-1)^k}{16}\right]x^k.$$

故 $a_n = \dfrac{1}{16}[(4n-3)\cdot 3^{n+1} - 7(-1)^n]$ 为所求.

4. 某公的家谱可用类似于右边的树形图表示，这种家谱可如下作出，每位成员用黑点表示，有父子(女)，母子(女)关系者用线段联结；任一成员的儿子画在该成员的左下方，女儿画在右下方，记 a_n 为所求家谱的种数，显然 $a_1 = 1, a_2 = 2$，记 $a_0 = 1$. 现考虑 $n \geqslant 3$，把家谱中的某公划掉，变成某公的儿子及女儿的两张家谱图，有下述各种可能情况，某公的儿子一系有 k 人，其家谱图有 a_k 种可能，此时某公的女儿一系有 $n-k-1$ 人，其家谱图有 a_{n-k-1} 种可能，即共有 a_ka_{n-k-1} 种可能，其中 $k = 0,1,2,\cdots,n-1$. 于是有关系式 $a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_0$.



设数列 $\{a_n\}$ 的母函数为 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$，因

$$a_0 = a_1 = 1, x\cdot f^2(x) = x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots)^2$$

$$= a_0^2x + (o_0a_1 + a_2a_0)x^2 + \cdots + (a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_0)x^n + \cdots$$

$$= a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = f(x) - 1.$$

即母函数 $f(x)$ 适合方程 $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$. 于是有 $2xf(x) = 1 \pm \sqrt{1-4x}$，但因 $f(0) = a_0 = 1$，故有 $f(x) = \dfrac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$. (＊)

应用公式 5，把 $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ 展开，并代入(＊)则可求得(过程略)$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k+1}C_{2k}^{k}\cdot x^k$.

故 $a_n = \dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n}(n \geqslant 0)$ 为所求.

第三十章 差分方法与差分多项式

习题 A

1. 令 $f(n) = \dfrac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx - \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$，则 $\Delta f(n-1) = f(n) - f(n-1) = \cos nx -$

$\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}=0=\Delta f(n)$. 又 $f(1)=\dfrac{1}{2}+\cos x-\dfrac{3\sin\frac{x}{2}-4\sin^3\frac{x}{2}}{2\sin\frac{1}{2}x}=-1+\cos x+2\sin^2\dfrac{x}{2}=0$,故 $f(n)=f(1)=0$.

2. 设原式左边 $=a_n$,作出差分方程:$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{(2n-1)2n}$,即有

$\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{2},\\a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2n}.\end{cases}$ 令 $n=2,3,\cdots,n$,把所得的 $n-1$ 个式子累加得 $a_n-a_1=\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)2n}\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)2n}$.故原等式成立.

3. 将递推关系变为一阶差分方程:$f(x+1)=3f(x)+2x-1$,$f(1)=1$.其特征根为3,令 $g(x)=2x-1$,设特解 $R(x)=Ax+B$,代入方程,$A(x+1)+B=3(Ax+B)+2x-1$.整理后比较等式两边同次幂的系数可得:$\begin{cases}A=3A+2,\\A+B=3B-1,\end{cases}$解出 $A=-1$,$B=0$,故通解为 $f(x)=c\cdot 3^x-x$.又

$f(1)=1$,有 $3c-1=1$,得 $c=\dfrac{2}{3}$.所以数列通项为 $a_n=\dfrac{2}{3}\cdot 3^n-n$.

4. 由 $\Delta^{2n+1}p(0)=\sum\limits_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\cdot C_{2n+1}^k\cdot p(2n+1-k)=0$,即有

$(-30)+\sum\limits_{j=1}^{n}C_{2n+1}^{2j}\cdot 2=0$,即 $(-30)+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2^{2n+1}-1\right)=0$,求得 $n=2$.

习题 B

1. 由 $\Delta^{n+1}p(0)=0$,即 $\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\cdot C_{n+1}^k\cdot p(k)=0$,得 $p(n+1)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k=\begin{cases}1,\text{当 } n \text{ 为偶数时},\\0,\text{当 } n \text{ 为奇数时}.\end{cases}$

2. 所有次数低于 n 的多项式 $p(x)$ 合要求.事实上,这时有 $\Delta^n p(x)=0$.于是由本章性质2,令 $x=0$,得 $\Delta^n p(0)=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\cdot C_n^i\cdot p(i)=0$,这里 $\Delta^n p(0)$ 是 $\Delta^n p(x)$ 在 $x=0$ 的值.从而 $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\cdot C_n^i\cdot p(i)=0$.

3. 由于题设结论涉及 $n+2$ 个连续整数,对于 $f(x)=a^x-g(x)$,应用本章性质2作估计可获证明.依定义 $\Delta a^x=a^{x+1}-a^x=(a-1)a^x$,$\Delta^2a^x=(a-1)\Delta a^x=(a-1)^2\cdot a^x,\cdots,\Delta^{n+1}a^x=(a-1)^{n+1}\cdot a^x$.故 $\Delta^{n+1}a^x|_{x=0}=(a-1)^{n+1}$.于是由性质2,得 $\Delta^{n+1}f(0)=\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\cdot C_{n+1}^k\cdot[a^k-g(k)]=\Delta^{n+1}a^x|_{x=0}-\Delta^{n+1}g(0)=(a-1)^{n+1}$.若对一切 $k=0,1,\cdots,n+1$,$|a^k-g(k)|<1$,则

$2^{n+1} \leqslant (a-1)^{n+1} < \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} = 2^{n+1}$,而这是不可能的,从而结论获证.

4. 作差分方程 $f(x+1)-f(x)=(3x+2)^3$,且 $f(1)=8$,设特解 $R(x)=x\cdot Q_3(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx$,代入差分方程并整理得 $4Ax^3+(6A+3B)x^2+(4A+3B+2C)x+(A+B+C+D)=27x^3+54x^2+36x+8$.比较两端同次项系数可得:$4A=27,6A+3B=54,4A=3B+2C=36,A+B+C+D=8$,从中解出 $A=\frac{27}{4},B=\frac{9}{2},C=-\frac{9}{4},D=-1$,在通解 $f(x)=C\cdot 1^x+R(x)$ 中令 $x=1$,得 $8=c+8$,亦得 $c=0$.故求和公式为 $S_n=\frac{n}{4}(27n^3+18n^2-9n-4)$.

5. 考虑多项式 $f(x)$ 的 n 阶差分.当 x 取连续整数 $a,a+1,\cdots,a+m$ 时,$f(a),f(a+1),\cdots,f(a+m)$ 皆为整数,由性质 2 知,$\Delta f(a),\Delta^2 f(a),\cdots,\Delta^m f(a)$ 皆为整数.又由性质 4,对 m 次多项式 $f(x)$,有 $f(a+n)=f(a)+C_n^1\Delta f(a)+C_n^2\Delta^2 f(a)+\cdots+C_n^m\Delta^m f(a)$.所以,对任意整数 n,$f(a+n)$ 皆为整数,即 $f(x)$ 为整值多项式.

参考文献

[1] 张景中.函数方程.上海教育出版社,1993:297 ~ 346
[2] 李成章.极值问题.上海教育出版社,1993:347 ~ 412
[3] 严镇军.多项式.上海教育出版社,1993:155 ~ 194
[4] 方廷刚.应用阿贝尔变换解竞赛题.中等数学,2003(6):5 ~ 8
[5] 慕泽刚.函数 $y=\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-c)^2+d^2}$ 的最小值的求法探索.数学教学通讯,2002(3):39 ~ 40
[6] 李康海.一个函数不等式及其应用.数学通报,1997(12):21 ~ 23
[7] 王延文.证明数列不等式的若干方法.中等数学,2002(1):17 ~ 20
[8] 崔金兴,李运浩.竞赛中有关数列的存在性问题.中等数学,2001(6)6 ~ 10
[9] 程峰.含参数不等式中的参数最值问题.中等数学,2002(6):6 ~ 10
[10] 周珺.含参数的不等式问题.中等数学,2002(4):14 ~ 14
[11] 鲍春桉.对多项式因式分解的探索.中等数学,1992(3):23 ~ 24
[12] 高灵.三角形不等式的一个基本定理.湖南数学通讯,1984(2):21 ~ 22
[13] 浦敏亚.三次不等式的证明.数学竞赛(19).湖南教育出版社,1994:41 ~ 47
[14] 周万林.牛顿恒等式与数学竞赛题.湖南数学通讯,1994(3):32 ~ 35
[15] 黄玉民,夏兴国主编.世界数学奥林匹克解题大辞典——代数卷.河北少年儿童出版社,2003
[16] 沈文选主编.初等数学研究教程.湖南教育出版社,1996
[17] 沈文选.矩阵的初等应用.湖南科学技术出版社,1996
[18] 沈文选.中学数学解题方法基础.哈尔滨出版社,1997
[19] 沈文选.中学数学解题典型方法例说.湖南师范大学出版社,1996
[20] 沈文选.中学数学建模方法导引与解题技巧.湖南师范大学出版社,1999
[21] 沈文选.利用不动点解题.数学通讯,1989(2):30 ~ 34
[22] 沈文选.函数不动点及应用.中学教研(数学),1993(3):29 ~ 33
[23] 沈文选.广义凸函数及应用.中学数学,2000(12):36 ~ 38
[24] 沈文选.数集的划分与覆盖.数学竞赛(17).湖南教育出版社,1993:27 ~ 33
[25] 沈文选.整数的多项式表示及应用.湖南数学通讯,1990(3):32 ~ 35
[26] 沈文选.二次函数.湖南数学通讯,1990(6):34 ~ 37
[27] 沈文选.逻辑推理问题.湖南数学通讯,1991(1)
[28] 沈文选.数的二进位制及应用.中学数学(江苏),1990(10):30 ~ 32
[29] 沈文选.矩阵中元素的几条运算性质与不等式的证明.数学教学研究,1994(4):39 ~ 43

[30] 沈文选.卡尔松不等式是一批著名不等式的综合.中学数学,1994(7):28 ~ 30
[31] 沈文选.一类和(或积)不等式的统一求解方法.数学通讯,1993(6):18 ~ 19
[32] 沈文选.数学竞赛中条件多项式的求解方法.中学数学(江苏),1994(6):41 ~ 44
[33] 沈文选.多项式的拉格朗日公式及应用.中学教研(数学),1994(11):32 ~ 36
[34] 沈文选.单位根的性质及应用.中学数学研究,1987(4):17 ~ 20
[35] 沈文选.1 的 n 次单位根的性质及应用.中学教研(数学),1993(9):31 ~ 35
[36] 沈文选.3 的剩余类及应用.中等数学,1991(3):2 ~ 4
[37] 冷岗松.高中数学竞赛解题方法研究.清华大学出版社,1993
[38] 羊明亮,沈文选.柯西不等式的应用举例.中学数学杂志,2003(6):55 ~ 56
[39] 羊明亮,沈文选.构造函数 $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ 解题.中学数学,2003(8):28 ~ 29
[40] 刘诗雄主编.奥数教程·高二年级.上海:华东师范大学出版社,2002
[41] 岑爱国主编.复数与多项式.杭州:浙江大学出版社,2007

奥赛经典

高级教程系列

◎数学奥林匹克教程
◎物理奥林匹克教程
◎物理奥林匹克实验教程
◎化学奥林匹克教程
◎化学奥林匹克实验教程
◎生物奥林匹克教程
◎生物奥林匹克实验教程
◎信息学奥林匹克教程·基础篇
◎信息学奥林匹克教程·提高篇
◎信息学奥林匹克教程·语言篇
◎信息学奥林匹克教程·数据结构篇

初中教程系列

◎初中数学奥林匹克实用教程　第一册
◎初中数学奥林匹克实用教程　第二册
◎初中数学奥林匹克实用教程　第三册
◎初中数学奥林匹克实用教程　第四册

解题金钥匙系列

◎初中数学　◎高中数学
◎初中物理　◎高中物理
◎初中化学　◎高中化学
◎高中生物　◎高中信息学

专题研究系列

◎奥林匹克数学中的代数问题
◎奥林匹克数学中的几何问题
◎奥林匹克数学中的组合问题
◎奥林匹克数学中的数论问题
◎奥林匹克数学中的真题分析

热点专题系列

◎初中数学竞赛热点专题
◎初中物理竞赛热点专题
◎初中化学竞赛热点专题
◎初中生物竞赛热点专题
◎高中数学竞赛热点专题
◎高中物理竞赛热点专题
◎高中化学竞赛热点专题
◎高中生物竞赛热点专题

典型试题系列

◎数学奥林匹克典型试题剖析
◎物理奥林匹克典型试题剖析
◎化学奥林匹克典型试题剖析
◎信息学奥林匹克典型试题剖析

分级精讲与测试系列

◎初一数学　◎初二数学
◎初三数学　◎初二物理
◎初三物理　◎初三化学
◎高一数学　◎高二数学
◎高一物理　◎高二物理
◎高一生物　◎高二生物
◎高一化学　◎高二化学

⊙组　　稿＝廖小刚
⊙责任编辑＝廖小刚
⊙装帧版式＝周基东

定价：31.00元

ISBN 978-7-5648-0027-7

